МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА

СТЕХУН Анжела Олексіївна

УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь, геометрії та топології факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І.І. Мечникова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ЄВТУХОВ В'ячеслав Михайлович,
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь,
геометрії та топології.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
БОЙЧУК Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії крайових задач
теорії диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка,
професор кафедри математики.

Захист відбудеться «26» лютого 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 41.051.05 при Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова за адресою: 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, ауд. 73.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І.І. Мечникова за адресою: 65082, м. Одеса, вул. Преображенська, 24.

Автореферат розісланий «25» січня 2021 року.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради М.О. Білозерова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Незважаючи на більш ніж вікову історію розвитку, асимптотична теорія нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь привертає до себе увагу багатьох дослідників і в теперішній час.

Ще наприкінці XIX та на початку XX століття в роботах J.H. Lane, R. Emden і R. Fowler були розроблені методи дослідження асимптотичної поведінки розв'язків істотно нелінійного диференціального рівняння другого порядку $y'' = \pm t^n y^\sigma$, яке отримало в подальшому назву рівняння Емдена-Фаулера. Це рівняння вперше з'явилося в астрофізичних дослідженнях, які проводилися у другій половині XIX століття, а потім застосовувалось в ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини та в інших галузях природознавства. Основні результати про асимптотичну поведінку розв'язків рівняння Емдена-Фаулера викладені в монографіях Р. Беллмана і Дж. Сансоне, що були опубліковані в 1954 році. Методика дослідження даного рівняння суттєво використовувала наявність в ньому степеневого коефіцієнта. У випадку довільної знакосталої неперервної функції в якості коефіцієнта цього рівняння його почали називати узагальненим рівнянням типу Емдена-Фаулера. Перший важливий результат – критерій коливності всіх розв'язків даного рівняння був отриманий у 1955 році F.V. Atkinson. Перший метод встановлення асимптотики його неколивних розв'язків був створений І.Т. Кігурадзе. В подальшому узагальнене рівняння типу Емдена-Фаулера досліджувалось в роботах Т.А. Чантурія, S. Belohorec, K.V. Coffman, J.S.W. Wong, Л.В. Клебанова, О.В. Костіна, В.О. Кондратьєва, В.М. Євтухова та багатьох інших авторів. Отримані при цьому результати були підсумовані в монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія, яка була надрукована в 1990 році. Треба зазначити, що і в теперішній час рівняння Емдена-Фаулера залишається предметом досліджень деяких відомих авторів. Про це свідчать, наприклад, роботи K. Kamo і H. Usami, які було виконано у 2002 році.

Далі, в роботах P. Ohme, Г.О. Стойкової, М.М. Аріпова і Т. Каюмова, Б. Абдул Гані, В.М. Євтухова, І.В. Асташової були здійснені спроби поширення створених методик на узагальнені рівняння типу Емдена-Фаулера третього порядку. Незважаючи на досягнутий у даному напрямку прогрес, отримати такі ж закінчені результати, які були одержані для узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера другого порядку, тут вже не вдалося. Навіть для самих найпростіших з таких рівнянь зі степеневим коефіцієнтом, які вивчались у роботі P. Ohme. Багато питань для таких рівнянь залишились невирішеними, незважаючи на те, що в теперішній час отримана вже значна кількість результатів для узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера n-го порядку.

Починаючи з 80-х років XX століття активно почали досліджуватись двочленні диференціальні рівняння другого порядку з нелінійностями, що в деякому сенсі є близькими до степеневих, а саме до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Цьому сприяли значні досягнення у створеній J. Karamata теорії правильно змінних функцій. Перші вагомі результати про асимптотичну поведінку розв'язків таких рівнянь були отримані в роботах V. Maric, M. Tomic, J.S.W. Wong і S.D. Taliaferro. Ці результати були доповнені та розширені в роботах В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової, М.О. Білозерової, В.М. Харькова та інших авторів. При цьому в одній з робіт В.М. Євтухова розглядався також випадок нелінійного диференціального рівняння

другого порядку, що у деякому сенсі є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння.

Таким чином, актуальною є задача про дослідження асимптотичної поведінки розв'язків двочленного істотно нелінійного диференціального рівняння третього порядку з правильно змінною нелінійністю і рівняння третього порядку, що є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння. Це буде сприяти подальшому розвитку даного напрямку досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась згідно з планом науково-дослідної роботи Одеського національного університету імені І.І. Мечникова у рамках держбюджетної теми кафедри диференціальних рівнянь «Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь аналітичними та якісними методами» (номер державної реєстрації 0109U003665).

Мета та задачі дослідження. Основною метою дисертаційної роботи є встановлення асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків двочленних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку з правильно змінною нелінійністю, зокрема, рівнянь, що є асимптотично близькими до лінійних диференціальних рівнянь. Її досягнення передбачає вирішення наступних задач: встановлення необхідних умов існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно; встановлення достатніх умов існування розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і визначення кількості таких розв'язків; одержання результатів про умови існування та асимптотику сингулярних $P_{t_*}(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків.

Об'єкти дослідження. Об'єктами дослідження є два класи нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

і

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{2}$$

в яких $\alpha_0 \in \{-1;1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a \le \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, що задовольняє умови

$$\varphi'(y) \ne 0, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma - 1, \tag{3}$$

$L\colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ – неперервна і повільно змінна функція при $y \to Y_0$, Y_0 –дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0. З умов (3) випливає, що функція φ є правильно змінною при $y \to Y_0$ функцією порядку σ. При $\sigma \ne 1$, рівняння (1) є істотно нелінійним, а при $\sigma = 1$ воно може бути переписаним у вигляді (2) і є у деякому сенсі асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y. \tag{4}$$

Предмет дослідження. Предметом дослідження є асимптотична при $t \uparrow \omega$ поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку (1) і (2). Множина всіх таких розв'язків за своїми апріорними асимптотичними властивостями розпадається на п'ять підмножин, які не перетинаються і таки, що відповідають наступним значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \qquad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 = \pm\infty. \qquad (5)$$

Тому $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки кожної з цих п'яти множин потребують окремого розгляду.

Методика дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи класичного і функціонального аналізу, лінійної алгебри, теорії правильно та повільно змінних функцій, асимптотичні методи, а також сучасні результати теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані у дисертації результати є новими і строго обґрунтованими. До головних з них відносяться наступні результати:

1) для диференціальних рівнянь виду (1) (випадок істотно нелінійного диференціального рівняння) і (2) (випадок рівняння, що є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння) вперше побудовано два відмінних один від одного підходи для дослідження асимптотичної поведінки всіх типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків;

2) при кожному із значень (5) параметру λ_0 встановлені необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно;

3) при кожному із значень (5) параметру λ_0 одержано достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і з'ясовано питання про кількість таких розв'язків;

4) знайдено додаткову умову на нелінійність φ, при виконанні якої встановлені у неявному вигляді асимптотичні зображення для $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1) у перших із трьох випадків (5) можуть бути записаними в явному вигляді;

5) для диференціальних рівнянь (1) і (2) при кожному $t_* \in]a, \omega[$ одержано умови існування і асимптотичні при $t \uparrow t_*$ зображення сингулярних $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків і вирішено питання про кількість розв'язків з отриманими зображеннями.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати роботи і побудована в ній методика дослідження можуть бути використаними і частково вже застосовувались в дослідженнях асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціальних рівнянь четвертого і більш високих порядків з правильно змінними нелінійностями. Крім того, можливо їх застосування в задачах, що виникають на практиці.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. В роботах [1] – [3], опублікованих у співавторстві з Євтуховим В.М., науковому керівнику належать постановка задач, визначення мети дослідження, вибір напрямків розв'язання задач і загальне керівництво роботою.

Апробація результатів. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових конференціях і семінарах:

– Міжнародна наукова конференція «Шості Боголюбовські читання» (Чернівці, 26–30 серпня 2003 р.);

– Міжнародна математична конференція імені В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.);

– Міжнародна конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Київ, 6–9 червня 2005 р.);

– Международная конференция «Интегральные уравнения и их применения» (Одесса, 29 июня – 4 июля 2005 г.);

– Восьмая Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Симферополь, Украина, 10–17 сентября 2006 г.);

– Міжнародна наукова конференція «Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування» (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);

– Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Чернівці, Україна, 11–14 жовтня 2006 р.);

– Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова (Одесса, Украина, 9–14 августа 2010 г.);

– Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.);

– International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2016" (Tbilisi, Georgia, December 24-26, 2016);

– Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування», присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка (Ужгород, 19–21 травня 2016 р.);

– Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Кам'янець-Подільський, Україна, 19–21 травня 2017 р.);

– Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.);

– Міжнародна конференція «Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV» (Світязь, Волинь, 20–26 червня 2019 р.);

на міжвузівському науковому семінарі Одеської державної академії будівництва та архітектури, під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора Ю.Й. Черського, на міжнародному науковому семінарі International Workshop «Nonlinear Analysis and Nonautonomous Ordinary Differential Equations», присвяченому 80-річчю професора І.Т. Кігурадзе, на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора В.М. Євтухова.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано п'ять статей, дві з яких [3], [5] надруковані в фахових виданнях, переклад яких індексований у наукометричній базі SCOPUS, та три інші [1], [2], [4] у наукових виданнях з переліку

фахових видань, затвердженого МОН України, і 14 тез доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових математичних конференціях [6] – [19].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 119 найменувань, і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 162 сторінки, основний текст займає 146 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовується актуальність обраної теми, сформульовано мету та визначено основні задачі та методи дослідження, наукову новизну роботи і теоретичне значення отриманих результатів.

У *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд досліджень двочленних диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями, проведено аналіз існуючих методів дослідження. Визначено актуальність задачі про дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків істотно нелінійного диференціального рівняння виду (1) і диференціального рівняння виду (2), яке є асимптотично близьким у деякому сенсі до лінійного диференціального рівняння третього порядку.

Означення 1. *Розв'язок у диференціального рівняння* (1), *або рівняння* (2), *називається* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, *якщо він визначений на деякому проміжку* $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ *і задовольняє умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty \end{cases} \ (k = 1,2), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0.$$

Згідно з цим означенням і видом рівнянь (1) і (2) кожний $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок та його похідні до третього порядку включно зберігають знаки на деякому проміжку $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причому

$$sign\, y(t) = \mu_0, \quad sign\, y'(t) = \mu_1 \ \text{ при } \ t \in [t_1, \omega[,$$

де числа μ_0 і μ_1 визначаються наступним чином

$$\mu_0 = sign\, b, \qquad \mu_1 = \begin{cases} \mu_0, & \text{якщо } Y_0 = \pm\infty, \\ -\mu_0, & \text{якщо } Y_0 = 0, \end{cases}$$

b – будь-яке число з проміжку Δ_{Y_0}, що задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \text{ при } Y_0 = 0, \quad b > 1 \ (b < -1) \ \text{ при } Y_0 = +\infty \ (\text{при } Y_0 = -\infty).$$

Без обмеження загальності будемо також вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл } Y_0, \\ ]Y_0, b], & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл } Y_0. \end{cases}$$

В подальшому будуть використовуватись допоміжні функції

$$\Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi(s)}, \qquad \Phi_1(y) = \int_{B_1}^y \frac{ds}{sL(s)}, \qquad \Phi_2(y) = \int_{B_2}^y \frac{ds}{s\, L^{\frac{1}{3}}(s)},$$

де кожна з меж інтегрування B, B_i $(i = 1,2)$, дорівнює або b, або Y_0 і обирається таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував або до нуля, або до $\pm\infty$ при $y \to Y_0$. Звернемо увагу на те, що перша з цих функцій є правильно змінною порядку $1-\sigma$, а дві інші є повільно змінними при $y \to Y_0$. Крім того, вони є строго монотонними на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$ і тому мають обернені функції $\Phi^{-1}(z)$, $\Phi_i^{-1}(z)$ $(i = 1,2)$, які визначені, відповідно, на проміжках $\Delta_Z(c)$, $\Delta_{Z_i}(c_i)$ $(i = 1,2)$, де

$$c = \Phi(b), \qquad c_i = \Phi_i(b) \quad (i = 1,2),$$

$$Z = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \Phi(y), \qquad Z_i = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \Phi_i(y) \quad (i = 1,2).$$

У *другому* розділі дисертаційної роботи досліджуються асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків істотно нелінійного диференціального рівняння третього порядку виду (1). При цьому окремо розглядаються випадки, коли параметр λ_0 приймає одне із п'яти можливих значень (5).

В § 2.1 цього розділу досліджуються $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки рівняння (1) в неособливому випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$. Для формулювання отриманих результатів введемо допоміжну функцію

$$I_1(t) = \int_{A_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau,$$

де межа інтегрування $A_1 \in \{a;\ \omega\}$ і обирається таким чином, щоб інтеграл прямував або до нуля, або до $+\infty$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\sigma \neq 1$ *і* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків необхідно, а якщо виконується одна з наступних трьох умов*

$$-8 \le \sigma < 1, \tag{6}$$

$$\sigma < -8 \ \text{ і } \ \lambda_0 \neq \frac{-(\sigma+2) \pm \sqrt{(\sigma+2)(\sigma+8)}}{6}, \tag{7}$$

$$\sigma > 1 \ \text{ і } \ \lambda_0 \neq \frac{-(\sigma+2) - \sqrt{(\sigma+2)(\sigma+8)}}{6}, \tag{8}$$

то і достатньо, щоб

$$\alpha_0\lambda_0\mu_1 > 0, \qquad \mu_0\mu_1(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a,\omega[, \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)} = \frac{(1-\sigma)(2\lambda_0-1)}{\lambda_0-1}, \qquad Z = \alpha_0\lambda_0 \lim_{t\uparrow\omega} I_1(t). \tag{10}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\pi_\omega^3(t)p(t)[1+o(1)], \tag{11}$$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)]. \qquad (12)$$

Важливим додатком до теореми 2.1 є встановлений результат про кількість $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями (11), (12).

Теорема 2.2. *Нехай* $\sigma \neq 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0; \frac{1}{2}; 1\}$ *і виконуються умови* (9), (10) *та одна з умов* (6) – (8). *Тоді диференціальне рівняння* (1) *має хоча б один* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язок і для існування у нього: 1) трипараметричної сім'ї таких розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності*

$$\beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)(2\lambda_0 - 1)(1 - \sigma) > 0, \qquad (13)$$

$$2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0, \quad \beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)[6\lambda_0^2 + (\sigma + 2)(2\lambda_0 - 1)] > 0; \qquad (14)$$

2) двопараметричної сім'ї $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність*

$$\beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)(2\lambda_0 - 1)(1 - \sigma) < 0 \qquad (15)$$

і хоча б одна з нерівностей

$$2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 \leq 0, \quad \beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)[6\lambda_0^2 + (\sigma + 2)(2\lambda_0 - 1)] \geq 0; \qquad (16)$$

3) однопараметричної сім'ї $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність* (13) *і хоча б одна з нерівностей*

$$2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 \leq 0, \quad \beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)[6\lambda_0^2 + (\sigma + 2)(2\lambda_0 - 1)] \geq 0. \qquad (17)$$

Якщо виконуються додаткові для всіх цих умов нерівності (15) *і*

$$2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0, \quad \beta\lambda_0(\lambda_0 - 1)[6\lambda_0^2 + (\sigma + 2)(2\lambda_0 - 1)] < 0, \qquad (18)$$

то рівняння (1) *має хоча б один* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язок.*

В **теоремі 2.3** при умові, коли не виконується жодна з умов (6), (7), (8) одержано при деяких додаткових до теореми 2.1 обмеженнях асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків у виді

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)} p(t)\pi_\omega^3(t)\left[1 + \frac{o(1)}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right],$$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} + \frac{o(1)}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} + \frac{o(1)}{\ln|\pi_\omega(t)|}.$$

Вкажемо тепер додаткову умову, при виконані якої одержані в теоремі 2.1 асимптотичні зображення у неявному виді (11), (12) можуть бути поданими в явному виді.

Означення 2. *Будемо говорити, що повільно змінна функція* $L: \Delta_Y \to]0, +\infty[$, *де* Y *дорівнює або нулю або* $\pm\infty$ *і* Δ_Y*–однобічний окіл* Y *задовольняє умову* S, *якщо*

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)]ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \ \ (y \in \Delta_Y),$$

де $\mu = sign\, y$.

Теорема 2.4. *Нехай* $\sigma \neq 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0;\frac{1}{2};1\}$ *і повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову S. Тоді у разі існування у рівняння* (1) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків для кожного з них мають місце при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні співвідношення*

$$y(t) = \mu_0 \left|\frac{(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} p(t)\pi_\omega^3(t) L\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)],$$

$$y'(t) = \frac{\mu_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \left|\frac{(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} p(t)\pi_\omega^3(t) L\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)],$$

$$y''(t) = \frac{\mu_0\lambda_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)^2\pi_\omega^2(t)} \left|\frac{(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} p(t)\pi_\omega^3(t) L\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)].$$

Оскільки при розгляді диференціального рівняння (1) припускалося, що $\omega \leq +\infty$, то отримані для цього рівняння результати охоплюють і випадок, коли ω є скінченим числом. Зокрема, у якості ω може бути обрано будь-яке внутрішнє число з проміжку визначення функції p. Це дає можливість з отриманих теорем встановити умови існування і асимптотичні зображення сингулярних розв'язків у диференціального рівняння (1).

Означення 3. *Розв'язок у диференціального рівняння* (1) *називається сингулярним* $P_{t_*}(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язком, де* $t_* \in]a,\omega[$ *і* $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, *якщо він визначений на деякому проміжку* $[\,t_0,t_*\,[\subset [a,t_*]$ *і задовольняє умови означення 1 з заміною в них* ω *на* t_*.

Теорема 2.5. *Нехай* $\sigma \neq 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ *і* $t_* \in]a,\omega[$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) *сингулярних* $P_{t_*}(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\frac{3(\lambda_0-1)}{2\lambda_0-1} = 1-\sigma, \quad \alpha_0\lambda_0\mu_1 > 0, \quad \mu_0\mu_1(1-\sigma) < 0. \tag{19}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0}{3}\frac{(1-\sigma)^3}{(2\sigma+1)(\sigma+2)}(t-t_*)^3 p(t_*)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow t_*,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{3}{1-\sigma}\frac{1}{t-t_*}[1+o(1)], \qquad \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\sigma+2}{1-\sigma}\frac{1}{t-t_*}[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow t_*,$$

причому, при $\sigma \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$ *існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими асимптотичними зображеннями, при* $\sigma \in \left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ *– однопараметрична сім'я таких розв'язків і при* $\sigma \in \left(-\frac{1}{2},1\right)$ *існує принаймні один такий розв'язок.*

Теорема 2.6. *Нехай* $\sigma \neq 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$, $t_* \in]a,\omega[$ *і повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову S. Тоді, в разі існування у рівняння* (1)

сингулярних $P_{t_*}(Y_0,\lambda_0)$*-розв'язків, для кожного з них мають місце при* $t\uparrow t_*$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=\mu_0\left|\frac{(1-\sigma)^3}{3(2\sigma+1)(\sigma+2)}(t-t_*)^3p(t_*)L\left(\mu_0|t-t_*|^{\frac{3}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)],$$

$$y'(t)=\frac{3\mu_0}{(1-\sigma)(t-t_*)}y(t)[1+o(1)],$$

$$y''(t)=\frac{3\mu_0(\sigma+2)}{(1-\sigma)^2(t-t_*)^2}y'(t)[1+o(1)].$$

В теоремі 2.5, на відміну від теореми 2.1, вдалося зняти додаткову до необхідних умову, оскільки одна з умов (6) – (8) завідомо виконується за рахунок першої рівності з (19). Тому теорема 2.5 носить характер критерія.

В § 2.2 другого розділу роботи досліджені $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки диференціального рівняння (1) в особливих випадках, коли $\lambda_0=1$ і $\lambda_0=\frac{1}{2}$.

Для $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язків з використанням допоміжних функцій

$$I_2(t)=\int\limits_{A_2}^{t}p(\tau)d\tau,\qquad I_{21}(t)=\int\limits_{A_{21}}^{t}I_2(\tau)d\tau,\quad I_{22}(t)=\int\limits_{A_{22}}^{t}I_{21}(\tau)d\tau,$$

де кожна з меж інтегрування A_2, A_{21} і A_{22} обирається з множини $\{a;\omega\}$ таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував при $t\uparrow\omega$ або до нуля, або до $\pm\infty$, встановлені наступні три теореми.

Теорема 2.7 *Нехай* $\sigma\neq1$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0,1)$*-розв'язків необхідно, а якщо* $\sigma\neq-8$, *то і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p(t)I_{21}(t)}{I_2^2(t)}=1$$

і виконувалися нерівності

$$\alpha_0\mu_0(1-\sigma)I_2(t)>0,\quad \mu_0\mu_1(1-\sigma)I_{22}(t)>0\quad \text{при}\quad t\in]a,\omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення (у неявному виді)*

$$\frac{y(t)}{\varphi\big(y(t)\big)}=\alpha_0(1-\sigma)^3I_{22}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{I_{21}(t)[1+o(1)]}{(1-\sigma)I_{22}(t)},\qquad \frac{y''(t)}{y'(t)}=\frac{I_2(t)[1+o(1)]}{(1-\sigma)I_{21}(t)},$$

причому у випадку $(\sigma-1)(\sigma+8)>0$ *(відповідно* $(\sigma-1)(\sigma+8)<0$*) при* $\mu_0\mu_1(1-\sigma)>0$ *існує однопараметрична (трипараметрична) сім'я таких розв'язків, а при* $\mu_0\mu_1(1-\sigma)<0$ *– двопараметрична сім'я розв'язків (хоча б один розв'язок) з такими зображеннями.*

Теорема 2.8. *Нехай $\sigma \neq 1$ і повільно змінна складова функції φ задовольняє умову S. Тоді у разі існування у диференціального рівняння* (1) *$P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків, для кожного з них мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (в явному виді)*

$$y(t) = \mu_0 \left|(1-\sigma)^3 I_{22}(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \frac{\mu_0 I_{21}(t)}{(1-\sigma) I_{22}(t)} \left|(1-\sigma)^3 I_{22}(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y''(t) = \frac{\mu_0 I_2(t)}{(1-\sigma)^2 I_{22}(t)} \left|(1-\sigma)^3 I_{22}(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)].$$

Теорема 2.9. *Нехай $\sigma \neq 1$. Тоді при будь-якому $t_* \in]a, \omega[$ диференціальне рівняння* (1) *не має сингулярних $P_{t_*}(Y_0, 1)$-розв'язків.*

Звернемо увагу на те, що $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язки на відміну від решти $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків є швидко змінними функціями разом зі своїми похідними до другого порядку включно при $t \uparrow \omega$.

Використовуючи вже введені вище допоміжні функції I_1 (з § 2.1) і I_2, сформулюємо теореми для $P_\omega\left(Y_0, \frac{1}{2}\right)$-розв'язків диференціального рівняння (1).

Теорема 2.10. *Нехай $\sigma \neq 1$. Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) *$P_\omega\left(Y_0, \frac{1}{2}\right)$-розв'язків необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{I_2(t)} = -2$$

і виконувалися нерівності

$$\alpha_0 \mu_1 > 0, \quad \alpha_0 \mu_0 (1-\sigma) I_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (у неявному виді)

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0}{2}(1-\sigma) I_1(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{1-\sigma} \frac{\pi_\omega^2(t) p(t)}{I_1(t)} [1 + o(1)], \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)],$$

причому таких розв'язків існує трипараметрична сім'я у випадку, коли $\omega < +\infty$ і $\alpha_0 \mu_0 (1-\sigma) > 0$, двопараметрична, коли $\omega < +\infty$ і $\alpha_0 \mu_0 (1-\sigma) < 0$, однопараметрична, коли $\omega = +\infty$ і $\alpha_0 \mu_0 (1-\sigma) > 0$.

Теорема 2.11. *Нехай $\sigma \neq 1$ і повільно змінна складова функції φ задовольняє умову S. Тоді у разі існування у диференціального рівняння* (1) *$P_\omega\left(Y_0, \frac{1}{2}\right)$-розв'язків, для кожного з них мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$y(t) = \mu_0 \left|\frac{1}{2}(1-\sigma) I_1(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \frac{\mu_0 \pi_\omega^2(t) p(t)}{(1-\sigma) I_1(t)} \left| \frac{1}{2}(1-\sigma) I_1(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y''(t) = -\frac{\mu_0 \pi_\omega(t) p(t)}{(1-\sigma)^2 I_1(t)} \left| \frac{1}{2}(1-\sigma) I_1(t) L\left(\mu_0 |I_{22}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)].$$

Теорема 2.12. *Нехай* $\sigma \neq 1$. *Тоді при будь-якому* $t_* \in]a, \omega[$ *диференціальне рівняння* (1) *не має сингулярних* $P_{t_*}\left(Y_0, \frac{1}{2}\right)$*-розв'язків.*

У § 2.3 встановлюються умови існування і асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1) у випадках, коли $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 = \pm\infty$. Ці випадки виявилися доволі складними при їх дослідженні. Однак вдалося їх дослідити при додатковому припущенні, що повільно змінна складова функції φ задовольняє умову *S*. При цьому асимптотичні зображення для таких розв'язків були отримані в явному вигляді. Для формулювання отриманих результатів введемо допоміжні функції

$$I_3(t) = \int_{A_3}^{t} p(\tau)\varphi(\mu_0 |\pi_\omega(\tau)|)d\tau, \qquad I_{31}(t) = \int_{A_{31}}^{t} I_3(\tau)d\tau,$$

$$I_4(t) = \int_{A_4}^{t} p(\tau)\varphi\left(\mu_0 \pi_\omega^2(\tau)\right)d\tau,$$

де кожна з меж інтегрування A_3, A_{31}, A_4 є або t_0 (t_0 – деяке число з проміжку $]a, \omega[$), або ω і обирається так, щоб відповідний інтеграл прямував або до нуля, або до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$.

Теорема 2.13. *Нехай* $\sigma \neq 1$ *і повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0, 0)$*-розв'язків необхідно, а якщо існує скінченна або рівна* $\pm\infty$ *границя* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_3'(t)}{I_3(t)}$, *то і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[I_3(t)]^2}{I_{31}(t) I_3'(t)} = 0$$

і виконувались нерівності

$$\mu_0 \mu_1 \pi_\omega(t) > 0, \quad \alpha_0 \mu_1 (1-\sigma) I_{31}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]t_0, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \mu_1 \pi_\omega(t) |(1-\sigma) I_{31}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \mu_1 |(1-\sigma) I_{31}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

$$y''(t) = \alpha_0 I_3(t) |(1-\sigma) I_{31}(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} [1 + o(1)],$$

причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я у випадку, коли $\alpha_0\mu_1(1-\sigma) > 0$, *і двопараметрична сім'я у випадку, коли* $\alpha_0\mu_1(1-\sigma) < 0$.

Теорема 2.14. *Нехай* $\sigma \neq 1$, $t_* \in]a,\omega[$ *і повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову* S. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) *сингулярних* $P_{t_*}(Y_0,0)$*-розв'язків необхідно, а якщо* $\sigma \neq -1$, *то і достатньо, щоб*

$$\sigma = -2, \quad \mu_0\mu_1 < 0 \ \ (Y_0 = 0), \quad \alpha_0\mu_1 I_{31}^*(t) > 0 \ \ \text{при} \ \ t \in]t_0, t_*[,$$

де

$$I_{31}^*(t) = \int_{A_{31}^*}^{t} (\tau - t_*)\varphi(\mu_0(t_* - \tau))\, d\tau,$$

межа $A_{31}^* \in \{t_0; t_*\}$ *і обрана таким чином, щоб інтеграл прямував або до нуля, або до* $-\infty$ *при* $t \uparrow t_*$. *Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при* $t \uparrow t_*$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \mu_1(t - t_*)p^{\frac{1}{3}}(t_*)|3I_{31}^*(t)|^{\frac{1}{3}}[1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \mu_1 p^{\frac{1}{3}}(t_*)|3I_{31}^*(t)|^{\frac{1}{3}}[1 + o(1)],$$

$$y''(t) = \alpha_0 p^{\frac{4}{3}}(t_*)(t_* - t)\varphi(\mu_0(t_* - t))|3I_{31}^*(t)|^{-\frac{2}{3}}[1 + o(1)],$$

причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, якщо $\alpha_0\mu_1 > 0$, *і двопараметрична сім'я, якщо* $\alpha_0\mu_1 < 0$.

Теорема 2.15. *Нехай* $\sigma \neq 1$ *і повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову* S. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0, \quad \alpha_0\mu_0(1-\sigma)I_4(t) > 0 \quad \text{при} \ \ t \in]t_0, \omega[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{I_4(t)} = 0.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \mu_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \pi_\omega^2(t)|(1-\sigma)I_4(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \mu_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \pi_\omega(t)|(1-\sigma)I_4(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1 + o(1)],$$

$$y''(t) = \mu_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} |(1-\sigma)I_4(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1 + o(1)],$$

причому, якщо $\omega = +\infty$, *то таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли* $\alpha_0\mu_0(1-\sigma) < 0$, *і трипараметрична сім'я, коли* $\alpha_0\mu_0(1-\sigma) > 0$, *а якщо* $\omega < +\infty$, *то у випадку, коли* $\alpha_0\mu_0(1-\sigma) < 0$ *існує однопараметрична сім'я таких розв'язків.*

Теорема 2.16. *Нехай* $\sigma \neq 1$, *повільно змінна складова функції* φ *задовольняє умову* S *і* $t_* \in]a, \omega[$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (1) *сингулярних* $P_{t_*}(Y_0, \pm\infty)$*-розв'язків необхідно і достатньо, щоб* $\sigma = -\frac{1}{2}$ *і виконувались умови*

$$\mu_0\mu_1 < 0, \quad \alpha_0\mu_0 I_4^*(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]t_0, t_*[,$$

де

$$I_4^*(t) = \int_{A_4^*}^{t} \varphi(\mu_0(\tau - t_*)^2)\, d\tau,$$

межа $A_4^* \in \{t_0; t_*\}$ *і обрана таким чином, щоб інтеграл прямував або до нуля, або до* $+\infty$ *при* $t \uparrow t_*$. *Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при* $t \uparrow t_*$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 p(t_*)(t - t_*)^2 I_4^*(t)[1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \alpha_0 p(t_*)(t - t_*) I_4^*(t)[1 + o(1)],$$

$$y''(t) = \alpha_0 p(t_*) I_4^*(t)[1 + o(1)],$$

причому існує однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку коли $\alpha_0\mu_0 < 0$.

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (2), що є в деякому сенсі асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння третього порядку (4). Рівняння (2) стоїть на межі між класом істотно нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку і класом лінійних диференціальних рівнянь, методи дослідження яких є суттєво різними. Тому воно представляє значний теоретичний інтерес.

Даний розділ містить три параграфи § 3.1 − § 3.3, в яких досліджуються окремо в кожному з п'яти можливих випадків (5) асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (2). При цьому тут поряд з введеними раніше функціями Φ_i, I_i $(i = 1, 2)$ використовуються наступні допоміжні позначення

$$\mu_i^* = \mu_0\mu_1 sign\, \Phi_i(y) \ \ (i = 1,2) \quad \text{при } y \in \Delta_{Y_0}(b),$$

$$I_5(t) = \int_{A_5}^{t} p(\tau)\pi_\omega(\tau)d\tau, \qquad I_6(t) = \int_{A_6}^{t} p^{\frac{1}{3}}(\tau)d\tau,$$

де кожна з меж інтегрування $A_i \in \{a; \omega\}$ $(i = 5, 6)$ і обирається аналогічно тому, як обиралися A_i $(i = 1,2)$ в функціях I_i $(i = 1, 2)$.

Перші три з одержаних у третьому розділі теорем формулюються у припущенні, що одна зі складених функцій $L(\Phi_i^{-1}(z))$ $(i \in \{1; 2\})$ є правильно змінною деякого порядку γ при $z \to Z_i$. Взагалі кажучи, характер поведінки цих функцій не є визначеним, оскільки зовнішня з них є повільно змінною функцією при $y \to Y_0$, а внутрішня функція є швидко змінною при $z \to Z_i$ $(i = 1, 2)$. Наприклад, для функції $L(y) = |\ln|y||^{\sigma}$ перша з цих складених функцій є правильно змінною

порядку $\frac{\sigma}{1-\sigma}$ при $\sigma \neq 1$ і швидко змінною при $\sigma = 1$, а друга є правильно змінною порядку $\frac{3\sigma}{3-\sigma}$ при $\sigma \neq 3$ і швидко змінною при $\sigma = 3$.

Теорема 3.1. *Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ і функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_1$ порядку γ. Тоді для існування у диференціального рівняння (2) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків необхідно, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_2(t)} = -2, \quad \alpha_0\lambda_0\lim_{t\uparrow\omega}I_1(t) = Z_1, \tag{20}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega^3(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_1(t)\right)\right) = \frac{\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)^3}, \tag{21}$$

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_1^* I_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[. \tag{22}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_1(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}\pi_\omega^2(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}I_1(t)\right)\right)[1+o(1)],$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

Доповненням до теореми 3.1 є наступний результат, який стосується випадку, коли функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ не є правильно змінною при $z \to Z_1$.

Теорема 3.2. *Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_2$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0;\frac{1}{2};1\}$. Тоді для існування у рівняння (2) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків необхідно, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)p^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\alpha_0(2\lambda_0-1)^{\frac{2}{3}}}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}}I_6(t)\right)\right) = \frac{\alpha_0[\lambda_0(2\lambda_0-1)]^{\frac{1}{3}}}{\lambda_0-1}, \tag{23}$$

$$\mu_0\mu_1\lim_{t\uparrow\omega}I_6(t) = Z_2 \tag{24}$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[. \tag{25}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi_2\big(y(t)\big) = \frac{\alpha_0(2\lambda_0-1)^{\frac{2}{3}}}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}}I_6(t)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Теорема 3.3. *Нехай функція* $L(\Phi_2^{-1}(z))$ *є правильно змінною при* $z \to Z_2$ *порядку* γ. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (2) $P_\omega(Y_0, 1)$*-розв'язків необхідно, а якщо функція* $p: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ *– неперервно диференційовна і така, що існує скінченна або рівна* $\pm\infty$ *границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(p^{\frac{1}{3}}(t)L_0^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))\right)\right)'}{p^{\frac{2}{3}}(t)L_0^{\frac{2}{3}}\left(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))\right)}, \tag{26}$$

де $L_0: \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ *– неперервно диференційована, повільно змінна при* $y \to Y_0$ *функція, що еквівалентна* L *при* $y \to Y_0$, *то і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)p^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right) = \infty, \qquad \alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} I_6(t) = Z_2 \tag{27}$$

і справджувалися нерівності

$$\alpha_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[. \tag{28}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$\Phi_2(y(t)) = \alpha_0 I_6(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)[1 + o(1)].$$

Інші три теореми даного розділу встановлюються у припущені, що повільно змінна при $y \to Y_0$ функція L з диференціального рівняння (2) задовольняє умову S.

Теорема 3.4. *Нехай функція* L *задовольняє умову* S. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (2) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$*-розв'язків необхідно і достатньо виконання умов*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \qquad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \tag{29}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t)L\left(\mu_0\pi_\omega^2(t)\right) = 0, \qquad \int_{a_1}^{\omega} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L\left(\mu_0\pi_\omega^2(\tau)\right)d\tau = +\infty, \tag{30}$$

де $a_1 \in [a, \omega[$ *таке, що* $\mu_0\pi_\omega^2(t) \in \Delta_{Y_0}$ *при* $t \in [a_1, \omega[$. *Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$ln|y(t)| = 2ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L\big(\mu_0\pi_\omega^2(\tau)\big)d\tau[1+o(1)],$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad (k=1,2).$$

В теоремі 3.5 при деяких додаткових обмеженнях на функцію p, вдається уточнити подані в теоремі 3.4 асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язків.

Теорема 3.5. *Нехай функція L задовольняє умову S і виконуються умови* (29), (30). *Нехай, крім того, функція $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ є неперервно диференційовною і існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p'(t)}{p(t)}$. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язку диференціального рівняння* (2) *мають місце асимптотичні зображення*

$$ln|y(t)| = 2ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L\big(\mu_0\pi_\omega^2(\tau)\big)d\tau[1+o(1)] \quad \text{при } t\uparrow\omega,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[2+\frac{\alpha_0}{2}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+o(1)]\Big] \quad \text{при } t\uparrow\omega,$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[1+\frac{\alpha_0}{2}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+o(1)]\Big] \quad \text{при } t\uparrow\omega.$$

У наступній теоремі наведено результат, що відноситься до особливого випадку $\lambda_0 = 0$.

Теорема 3.6. *Нехай функція L задовольняє умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння* (2) *$P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків, для яких існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$, необхідно і достатньо виконання умов*

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t)>0 \quad \text{при } t\in]a,\omega[, \quad \mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)| = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_2(t)} = -2,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|) = 0, \quad \int_{a_1}^{\omega} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)d\tau = +\infty,$$

де $a_1\in[a,\omega[$ таке, що $\mu_0|\pi_\omega(t)|\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in]a_1,\omega[$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| - \alpha_0\int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)d\tau[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)}, \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)].$$

Треба зазначити, що в поданих вище теоремах 3.1 − 3.6 у самій дисертації міститься ще додатково досліджені питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями, як в теоремах 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.10, 2.13 − 2.16 другого розділу.

З використанням теорем 3.1 – 3.6 встановлено (наслідки 3.4, 3.12 – 3.14), що тільки у випадку $\lambda_0 = 1$ і лише при деяких додаткових обмеженнях диференціальне рівняння (2) може мати сингулярні $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки. При цьому встановлено і асимптотику при $t \uparrow t_*$ для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно, і кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями.

В наслідках 3.1 − 3.3, 3.5 − 3.11 на підставі отриманих теорем встановлені умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків лінійного диференціального рівняння (4) (коли $L(y) \equiv 1$) і нелінійного диференціального рівняння виду

$$y''' = \alpha_0 p(t) |\ln |y||^\sigma, \qquad \text{де} \quad \sigma \neq 0.$$

Одержані для цих двох класів диференціальних рівнянь результати узгоджуються з відомими результатами робіт І.Т. Кігураде, В.М. Євтухова, Н.В. Шарай і В.М. Шинкаренко.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку виду

$$y''' = \alpha_0 p(t) \varphi(y) \qquad \text{і} \qquad y''' = \alpha_0 p(t) y L(y),$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ − неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi: \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ − двічі неперервно диференційована функція, що задовольняє умови

$$\varphi'(y) \neq 0\,, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma - 1\,,$$

$L: \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ − повільно змінна функція при $y \to Y_0$, де Δ_{Y_0} − однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$. Такого виду диференціальні рівняння другого порядку раніше вивчались в роботах V. Maric, M. Tomic, J.S.W. Wong, S.D. Taliaferro, В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової, М.О. Білозерової, В.М. Харькова та інших авторів. Одержані результати про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь першого виду другого порядку в подальшому поширювались в роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко і В.М. Євтухова, О.М. Клопота на диференціальні рівняння такого виду n-го порядку, але вони не були настільки ж завершеними, як для диференціальних рівнянь другого порядку і, крім того, вже використовували ідеї і методи робіт автора даної дисертаційної роботи. Що стосується другого з розглянутих рівнянь, то асимптотика його розв'язків раніше досліджувалась лише у частинному випадку, коли $L(y) = |ln\ |y||^\sigma$, де σ-дійсна стала, в роботах Н.В. Шарай і В.М. Шинкаренко. Тому актуальність теми дисертації не викликає сумнівів.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки і сингулярні $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-розв'язки даних диференціальних рівнянь. Множина таких

розв’язків за своїми апріорними асимптотичними властивостями розпадається на п’ять неперетинних підмножин, що відповідають наступним значення параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \qquad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 = \pm\infty.$$

Тому кожен з цих п’яти типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв’язків і сингулярних $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків досліджується окремо: у другому розділі дисертації для першого з даних диференціальних рівнянь і у третьому розділі для другого з них.

У результаті проведеного дослідження для нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку вперше одержано наступні результати:

1. для істотно нелінійного диференціального рівняння третього порядку і рівняння третього порядку, що є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння, побудовано два відмінних один від одного підходи для дослідження асимптотичної поведінки всіх типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків;
2. при кожному із п’яти вказаних значень параметру λ_0 встановлені необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно;
3. при кожному із п’яти вказаних значень параметру λ_0 одержано достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і з'ясовано питання про кількість таких розв'язків;
4. знайдено додаткову умову на нелінійність φ, при виконанні якої встановлені в неявному вигляді асимптотичні зображення для $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків істотно нелінійного диференціального рівняння можуть бути записаними в явному вигляді;
5. для обох класів даних рівнянь при кожному $t_* \in]a, \omega[$ одержано умови існування та асимптотичні при $t \uparrow t_*$ зображення сингулярних $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків і вирішено питання про кількість розв'язків з такими зображеннями.

Усі одержані в дисертації результати є новими, строго математично обґрунтованими, у частинних випадках узгоджуються з відомими результатами, і суттєво доповнюють існуючи дослідження асимптотичної поведінки розв’язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Вони повністю викладені у 5 наукових публікаціях і 14 тезах доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових математичних конференціях і можуть бути застосованими для подальшого розвитку даного напрямку досліджень.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Евтухов В.М., Стехун А.А. Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2004. Т. 47, № 4. С. 82–87.
2. Євтухов В.М., Стехун А.О. Асимптотичні зображення розв’язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку. *Вісник Львівського нац. ун-ту. Серія мех.-мат.* 2005. Вип. 64. С. 107–120.
3. Евтухов В.М., Стехун А.А. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Український математичний журнал.* 2007. Т. 59, № 10. С.1363–1375.

Evtukhov V.M., Stekhun A.A. Asymptotic representations of solutions of one class of nonlinear nonautonomous differential equations of the third order. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2007. 59(10). pp. 1528–1543. Translated from Ukrainian Mathematical Journal. 2007. V. 59, N 10. pp. 1363–1375.

4. Стехун А.А. Асимптотические представления исчезающих в окрестности особой точки решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і механ.* 2008. Т. 13, вип. 18. С. 97–111.
5. Стехун А.О. Асимптотична поведінка розв'язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. *Нелінійні коливання*. 2013. Т.16, № 2. С. 246–260.
   Stekhun A.A. Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Sciences*. April. 2014. Vol.198, №3. pp.336–350. Translated from Neliniini Kolyvannya. 2013. V.16, N 2. pp. 246-260.
6. Евтухов В.М., Стехун А.А. Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *«Шості Боголюбовські читання»: Міжнародна наукова конференція, м. Чернівці, 26 – 30 серпня 2003 р.: тези доповідей.* Київ: Інст-т математики НАН України, 2003. С. 69.
7. Стехун А.О. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку. *Міжнародна математична конференція імені В.Я. Скоробогатька, м. Дрогобич, 27 вересня –1 жовтня 2004 р.: тези доповідей.* Львів: Вид-во ЛНУ «Львівська політехніка», 2004. С. 206.
8. Стехун А.А. Асимптотические свойства неограниченных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *«Диференціальні рівняння та їх застосування»: Міжнародна конференція, присвячена 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ, 6–9 червня 2005 р.: тези доповідей.* Київ: Вид-во КНУ «Київський університет», 2005. С.106.
9. Евтухов В.М., Стехун А.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. «*Интегральные уравнения и их применения»: Международная конференция, г. Одесса, 29 июня – 4 июля 2005 г.: тезисы докладов.* Одесса, 2005. С. 53.
10. Стехун А.А. К вопросу об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. «*Метод функций Ляпунова и его приложения»: Восьмая Крымская Международная математическая школа, посвященная памяти профессора С.К. Персидского (1930-2005), Алушта, 10–17 сентября 2006 г.: тезисы докладов.* Симферополь: ДиАйПи, 2006. С. 162.
11. Стехун А.А. Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. *«Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування»: Міжнародна наукова конференція, м. Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.: тези доповідей.* Київ: Інст-т математики НАН України, 2006. С. 109.
12. Стехун А.О. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку. «*Диференціальні рівняння та їх застосування»: Міжнародна наукова конференція, м. Чернівці, 11–14 жовтня 2006 р.: тези доповідей.* Київ: Інст-т математики НАН України, 2006. С. 106.

13. Стехун А.А. Асимптотические представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. *Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, г. Одесса, 9–14 августа 2010г.: тезисы докладов.* Одесса: «Астропринт», 2010. С. 92.
14. Стехун А.А. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений третьего порядка. *Міжнародна математична конференція імені В.Я. Скоробогатька, м. Дрогобич, Україна, 19–23 вересня 2011 р.: тези доповідей.* Львів, 2011. С. 194.
15. Evtukhov V.M., Stekhun A.A. Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of Third-Order Ordinary Differential Equations. *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2016».* December 24-26, 2016. Abstracts. Tbilisi, 2016. P. 77-80. http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2016/workshop_2016.htm.
16. Стехун А.О. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку. «*Диференціальні рівняння та їх застосування»: Міжнародна наукова конференція, присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, м. Ужгород, 19–21 травня 2016 р.: тези доповідей.* Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2016. С. 122.
17. Стехун А.О. Асимптотика розв'язків диференціального рівняння третього порядку, асимптотично близького до лінійного. «*Диференціальні рівняння та їх застосування»: Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка (1942–1996), м. Кам'янець-Подільський, 19–21 травня 2017 р.: тези доповідей.* Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2017. С. 112–113.
18. Стехун А.О. Про асимптотичну поведінку розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку. «*Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях»: Міжнародна наукова конференція, присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.: тези доповідей.* Чернівці, 2018. С. 100.
19. Стехун А.О. Асимптотика розв'язків істотно нелінійних і асимптотично близьких до лінійних диференціальних рівнянь третього порядку. *«Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV»: Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (1919–1998), с. Світязь, 20–26 червня 2019 р.: тези доповідей.* Київ: Інститут математики НАН України, 2019. С. 85–86.

АНОТАЦІЯ

Стехун А.О. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Одеський національний університет імені І.І. Мечникова. Міністерство освіти і науки України, Одеса, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y) \quad \text{і} \quad y''' = \alpha_0 p(t) y L(y),$$

де $\alpha_0 \in \{-1;\ 1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_o} \to]0,+\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, що задовольняє умови

$$\varphi'(y) \ne 0\,, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma - 1\,,$$

$L\colon \Delta_{Y_o} \to]0,+\infty[$ – повільно змінна функція при $y \to Y_0$, де Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$.

При кожному з п’яти наступних можливих значень параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \qquad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 = \pm\infty,$$

при яких $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки мають різні апріорні асимптотичні властивості, в дисертації встановлені для вказаних класів диференціальних рівнянь третього порядку необхідні і достатні умови існування таких розв’язків, а також асимптотичні зображення цих розв’язків та їх похідних до другого порядку включно. Крім того, вирішено питання про кількість $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями. З використанням основних теорем роботи одержано також умови існування у даних диференціальних рівнянь сингулярних $P_{t_*}(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків і асимптотичні зображення таких розв’язків та їх похідних до другого порядку включно.

Ключові слова: диференціальні рівняння третього порядку, правильно змінні нелінійності, правильно і повільно змінні функції, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, умови існування, асимптотичні зображення.

АННОТАЦИЯ

Стехун А.А. Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. — Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Министерство науки и образования Украины, Одесса, 2020.

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотического поведения $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y) \quad \text{и} \quad y''' = \alpha_0 p(t) y L(y),$$

где $\alpha_0 \in \{-1;\ 1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_o} \to]0,+\infty[$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi'(y) \neq 0\,, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{или} & 0, \\ \text{или} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma - 1\,,$$

$L\colon \Delta_{Y_o} \to]0, +\infty[$ – медленно меняющаяся функция при $y \to Y_0$, где Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$.

При каждом из пяти следующих возможных значений параметра λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \qquad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 = \pm\infty,$$

при которых $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения имеют различные априорные асимптотические свойства, в диссертации установлены для указанных классов дифференциальных уравнений третьего порядка необходимые и достаточные условия существования таких решений, а также асимптотические представления этих решений и их производных до второго порядка включительно. Кроме того, выяснен вопрос о количестве $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений с установленными асимптотическими представлениями. С использованием основных теорем работы получены также условия существования у данных дифференциальных уравнений сингулярных $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-решений, а также асимптотические представления этих решений и их производных до второго порядка включительно, решен вопрос об их количестве.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения третьего порядка, правильно меняющиеся нелинейности, правильно и медленно меняющиеся функции, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения, условия существования, асимптотические представления.

ABSTRACT

Stekhun A.A. Asymptotic representations of solutions of nonlinear differential equations of third order. — Printed as manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the speciality 01.01.02 — Differential Equations. — Odessa I.I. Mechnikov National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Odessa, 2020.

The dissertation is devoted to the study asymptotic behavior of the $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions of differential equations of the third order

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y) \quad \text{and} \quad y''' = \alpha_0 p(t) y L(y),$$

where $\alpha_0 \in \{-1;\ 1\}$, $p\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_o} \to]0, +\infty[$ is a twice continuously differentiable function that meets the conditions

$$\varphi'(y) \neq 0\,, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} either & 0, \\ or & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma - 1\,,$$

$L\colon \Delta_{Y_o} \to]0, +\infty[$ is a slowly varying function when $y \to Y_0$, where Δ_{Y_0} – is some one-sided neighborhood Y_0, Y_0 is equal either to zero or $\pm\infty$.

Considering all of its asymptotic properties the set of all $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions is divided into five disjoint subsets that correspond to the following values of the λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \qquad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 = \pm\infty.$$

For each of these possible values of the parameter λ_0 the necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions are established, as well as the asymptotic formulas of such solutions for $t \uparrow \omega$ and their derivatives to the second order inclusive. The study of the behavior of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions of the first essentially nonlinear differential equation and the second asymptotically close to linear, differ significantly from each other and, therefore, are carried out separately in two different sections of the dissertation.

The question of the actual existence of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions with the found asymptotic representations was solved by reducing, using transformations, to the question of the existence of solutions vanishing at a singular point for systems of quasilinear differential equations. Then the known results were applied to such systems. It was also resolved the question of the amount of the $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions.

Since $\omega \leq +\infty$, the results obtained in this dissertation work on the conditions for the existence and asymptotics as $t \uparrow \omega$ of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions made it possible to establish the asymptotics of singular solutions.

In the dissertation work, the necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions are established for the indicated classes of third-order differential equations.

The following results were obtained in the dissertation with the help of the mentioned above methods for the differential equations of the third order for each of the mentioned value of λ_0:

1) the necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions;

2) the asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions, their first and second derivative and the number of such solutions;

3) the sufficient conditions for the existence of the singular $P_{t_*}(Y_0, \lambda_0)$-solutions and there asymptotic representations with first and second derivatives was obtained.

Keywords: third order differential equations, correctly changing nonlinearities, correct and slowly varying functions, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions, existence conditions, asymptotic representations of the solutions.

Підписано до друку 22.01.2021 р.
Формат 60 X 8 4/16 Папір офісний Гарнітура Times
Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 1,45.
Наклад 100 прим. Зам. №20-40

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА