

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПРИТОМАНОВА Ольга Михайлівна

УДК 519.8

ДИСЕРТАЦІЯ

НЕЧІТКІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН: ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ, МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

О.М. Притоманова

Науковий консультант **Кісельова Олена Михайлівна**
доктор фізико-математичних наук,
професор,
член-кореспондент НАН України

Дніпро – 2020

АНОТАЦІЯ

Притоманова О.М. Нечіткі задачі оптимального розбиття множин: теоретичні основи, методи та алгоритми розв'язання. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара МОН України, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара МОН України, Дніпро, 2020.

Дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин (ОРМ), що представляє новий розділ нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними, для нечітких задач оптимального розбиття, у яких для розкриття невизначеності застосовуються методи обчислювального інтелекту: апарат теорії нечітких множин та нечіткі нейронні мережі.

Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків.

У першому розділі проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень.

У другому розділі сформульовані математичні постановки нечітких задач ОРМ та викладені підходи щодо їх розв'язання на основі методів обчислювального інтелекту. Запропоновано класифікацію нечітких задач ОРМ у відповідності до того, у яких елементах задачі наявна нечіткість. В ній виділено два основні типи нечітких задач ОРМ: 1) з нечіткістю в елементах задачі, які підлягають оптимізації; 2) з нечіткістю в елементах задачі, які не підлягають оптимізації. Для формулювання математичних постановок нечітких задач ОРМ типу 1 наведені два еквівалентні означення нечіткого розбиття чіткої множини.

Сформульовано математичну постановку нечіткої неперервної задачі типу 1 оптимального розбиття множини Ω з E_n на її нечіткі підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з відшукуванням координат центрів цих підмножин τ_1, \dots, τ_N . Сформульовано нечітку задачу типу 2 з нечітко описаними параметрами в цільовому функціоналі та обмеженнях. Наведено підходи щодо формалізації нечіткості у задачах обчислювального інтелекту та описано метод побудови узагальненої математичної моделі ідентифікації нелінійних об'єктів із застосуванням нейронечітких технологій, які застосовуються для розробки методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ. Для оптимізації параметрів нечіткої моделі застосовано r -алгоритм Шора (метод мінімізації з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів). Перевага r -алгоритму Н.З. Шора, крім того, що він є ефективним для задач оптимізації великих розмірностей для гладких яружних функцій з сильно витягнутими лініями рівня, полягає в тому, що він може застосовуватися і для негладких цільових функцій, які виникають при використанні трикутних і трапецієподібних функцій належності та деяких операцій над нечіткими множинами. У цих випадках застосування класичних градієнтних методів, що вимагають гладкості функцій, може викликати проблеми в збіжності цих методів.

У третьому розділі досліджуються нечіткі задачі оптимального розбиття типу 2 з нечіткістю в елементах задачі, які не підлягають оптимізації. Розроблено єдиний підхід до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та обчислювального інтелекту. Спочатку для зняття нечіткості у початкових даних застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей, а потім застосовується математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ в умовах визначеності. Цим підтверджується універсальність теорії ОРМ, а саме, моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття можуть бути узагальнені на випадок, коли

початкові дані задані нечітко. Єдиний підхід продемонстровано при розробці методів та алгоритмів розв'язання таких нечітких задач ОРМ: з функцією у цільовому функціоналі, явний вид якої невідомий, з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі та обмеженнях задачі, а також нескінченновимірної задачі розміщення-розбиття з нечіткими параметрами.

У четвертому розділі досліджуються двоетапні неперервно-дискретні задачі оптимального розбиття-розподілу. Неперервно-дискретні задачі оптимального розподілу-розбиття узагальнюють, з одного боку, класичні скінченновимірні транспортні задачі на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшуковуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами, з іншого боку, дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі на випадок неперервно розподіленого ресурсу. Досліджуються дві двоетапні неперервно-дискретні задачі оптимального розбиття-розподілу: перша - із заданим положенням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей, друга - з відшукуванням оптимальних координат розташування центрів підмножин. Для обох задач, уводячи для кожної підмножини Ω_i , $i=1, \dots, N$ характеристичну функцію $\lambda_i(x)$, від відповідної нескінченновимірної задачі з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$ зроблено перехід до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0,1]$. Сформульовано твердження про можливість такого переходу. Обґрунтовано методи розв'язання обох задач на основі введення функціоналу Лагранжа та застосування теорії двоїстості для відшукування його сідлової точки. Доведено теореми про оптимальний розв'язок кожної з поставлених задач. Розроблено алгоритми розв'язання задач, кожний з яких заснований на сформульованій відповідній теоремі. Складовими частинами кожного з алгоритмів є, з урахуванням недиференційовної цільової функції, один

з варіантів r -алгоритму Шора, який застосовується для числового розв'язку двоїстої задачі, і метод потенціалів, що застосовується для відшукування значення другої компоненти оптимального розв'язку задачі. У третьому підрозділі розроблені метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі, який базується на єдиному підході, розробленому у розділі 3. Роботу розроблених алгоритмів продемонстровано на модельних задачах.

У п'ятому розділі розроблено та обґрунтовано методи і алгоритми побудови діаграм Вороного з нечіткими параметрами, які розроблені на основі синтезу методів теорії ОРМ та обчислювального інтелекту. У першому підрозділі описано алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням кінцевого числа N точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n -вимірною евклідовою простору $E_n (n \geq 2)$. Він заснований на формулюванні відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини з E_n на підмножини, з критерієм якості розбиття, який забезпечує відповідний вид діаграми Вороного, і застосуванні математичного і алгоритмічного апаратів теорії ОРМ, складовою частиною яких є r -алгоритм Шора. Доведено дві теореми про необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку сформульованої задачі ОРМ. Розроблено алгоритм розв'язання задачі, в основі якого лежать доведені теореми і один з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм). Ефективність розробленого алгоритму продемонстровано на модельних задачах побудови адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного як в умовах визначеності, так і з нечіткими параметрами.

Шостий розділ присвячений розробці та обґрунтуванню методів і алгоритмів розв'язання задачі оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності та в умовах нечітких

початкових даних. У першому підрозділі сформульовано задачу оптимального розбиття множини з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності та розроблено метод і алгоритм її розв'язання. Для обґрунтування розробленого методу доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку поставленої задачі. У другому підрозділі розроблено та обґрунтовано метод і алгоритм розв'язання нечіткої задачі оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин, а саме, з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі. Доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку даної нечіткої задачі. Сформульовано алгоритм розв'язання нечіткої задачі, в основі якого лежать доведена теорема, один з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Шора) та метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей. Ефективність методів і алгоритмів, розроблених у шостому розділі, продемонстровано на модельних задачах.

Сьомий розділ присвячений розробці методів і алгоритмів розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини. Розроблено та обґрунтовано методи і алгоритми розв'язання задач ОРМ на нечіткі підмножини як із заданими координатами центрів підмножин, так і з відшукуванням координат оптимального розміщення центрів цих підмножин. Для обґрунтування методу розв'язання нечіткої задачі з відшукуванням координат оптимального розміщення центрів підмножин уведено функціонал Лагранжа і показано, що для цієї задачі сідлова точка функціоналу Лагранжа існує. Доведено теореми про необхідні та достатні умови оптимальності існування розв'язку нечіткої задачі ОРМ. Розроблено алгоритм розв'язання нечіткої задачі, який базується на доведених теоремах та одному з варіантів r -алгоритму. Ефективність методів і алгоритмів, розроблених у сьомому розділі, продемонстровано на модельних задачах. Для інтерпретації отриманих результатів введено показник ступеня недовіри -

мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, при якому дана точка множини, що підлягає розбиттю на нечіткі підмножини, може бути з певністю віднесена до даної нечіткої підмножини. Досліджено практичну збіжність розробленого алгоритму.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, теорія оптимального розбиття множин, нечітка задача, обчислювальний інтелект, нейронечіткі технології, недиференційовна оптимізація, r -алгоритм Шора.

Список публікацій здобувача

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Притоманова О.М. Применение методологии системного анализа к управлению банковскими проблемными кредитами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2015. С. 166-181.
2. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Оценка инвестиционной привлекательности стартапов на основе нейронечетких технологий. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 5. С. 123-143. [Scopus, IF=0.8]
3. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Об'єктно-орієнтований підхід до програмної реалізації алгоритму розв'язання деякого класу багатопродуктових задач оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2016. С. 128-143.
4. Притоманова О.М., Журавель С.В. Застосування r -алгоритму до оптимізації параметрів нечіткої моделі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 188-198.
5. Kiseleva E.M., Pritomanova O.M., Zhuravel S.V. Mathematical aspects of neuro-fuzzy technology application in project management. *European Cooperation – Scientific Approaches and Applied Technologies*. Warsaw (Poland). 2017. №12. P. 61-70.

6. Kazarian A., Blyuss O., Metodieva G., Gentry-Maharaj A., Ryan A., Kiseleva E., Prytomanova O. Testing breast cancer serum biomarkers for early detection and prognosis in pre-diagnosis samples. *British Journal of Cancer*, 2017. №116. C.501-508. [Scopus, IF=10]
7. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Алгоритм решения непрерывной задачи оптимального разбиения с нейролингвистической идентификацией функций, входящих в целевой функционал. *Проблемы управления и информатики*. 2018. №2. С. 15-32. [Scopus, IF=0.8]
8. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2018. Вип. 18. С. 85-98.
9. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An Algorithm to Construct Generalized Voronoi Diagrams with Fuzzy Parameters Based on the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies. *Modern Machine Learning Technologies and Data Science Workshop*. Proc. 1st International Workshop MoMLeT&DS 2019. Shatsk (Ukraine). 2019, CEUR-WS.org, online. P. 148-162. [Scopus]
10. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 106-116.
11. Притоманова О.М. Розв'язання задачі оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. *Вісник Львівського національного університету*. Серія прикладна математика та інформатика. 2019. Вип. 27. С. 97-107.
12. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с

- заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. №1. С. 3-15. [Scopus, IF=1.4]
13. Blyuss O., Zaikin A., Cherepanova V., Munblit D., Kiseleva E., Prytomanova O., Duffy S., Crnogorac-Jurcevic T. Development of PancRISK, a urine biomarker-based risk score for stratified screening of pancreatic cancer patients. *British Journal of Cancer*, 2020, Vol. 122(6). P. 692–696. [Scopus, IF=10]
14. Kiseleva E., Prytomanova O., Zhuravel S. An algorithm for solving location-allocation problem with fuzzy parameters. *Scientific discussion*. – Praha (Czech Republic). 2020. Vol. 1, No 40. P. 11-18.
15. Kiseleva E.M., Hart L.L., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning. *Matematychni Studii*. Vol. 53. №1. 2020. P. 109-112. [Scopus, IF=0.5]
16. Kiseleva E., Prytomanova O. An algorithm for solving fuzzy optimal partitioning of set problem with location of centers of the subsets. *Znanstvena misel journal*. Ljubljana (Slovenia). 2020. Vol. 1. No 40. P. 19-26.
17. Кисельова О.М., Притоманова О.М. Нечітка задача оптимального розбиття множин із обмеженнями на розміщення центрів підмножин. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2020. №1. С. 78-89.
18. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Padalko V.H. Application of the theory of optimal set partitioning before building multiplicatively weighted Voronoi diagram with fuzzy parameters. *Eurasian Science Journal*. 2020. No 2(71), Vol. 6. P. 30-35.
19. Киселева Е.М., Гарт Л.Л., Притоманова О.М. Алгоритм построения диаграмм Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов на основе теории оптимального разбиения множеств. *Проблемы управления и информатики*. 2020. №2. С. 5-15. [Scopus, IF=0.8]

20. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a Two-stage Continuous-discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with the Subsets Centers Placement. *Open Computer Science*. De Gruyter. 2020. Vol 10. P. 124-136. [Scopus, IF=1.4]

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

21. Притоманова О.М. Застосування інтелектуальних технологій у моделюванні економічних і фінансових процесів. I Міжнародна науково-методична конференція «*Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці*». Чернівці: ЧНУ. 2009. С.118-121.
22. Притоманова О.М., Білай О.С. Багаторівневі нечіткі системи аналізу ризиків проблемного кредиту. Матеріали IV міжнародної науково-практичної конференції «*Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем*». Харків. 2013. С. 265-267.
23. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Примерение нейро-нечетких технологий для решения непрерывных задач оптимального разбиения при ограничениях с нечеткими параметрами. Тезисы докладов 5-й Международной конференции «*Космические технологии: настоящее и будущее*». Днепропетровск, 2015. С. 59.
24. Киселева О.М., Притоманова О.М., Вороніна С.В. Нейронечіткі технології для розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з нечіткими параметрами. Збірка наукових праць за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «*Наукові підсумки 2014 р. Фізико-математичні науки. Системний аналіз і теорія оптимальних рішень*». К. 2015. С. 7-8.
25. Киселева О.М., Притоманова О.М., Нейронечіткі технології як перспективний підхід до представлення знань у системах штучного інтелекту. Матеріали

- пятой международной научно-практической конференции «*Наука и бизнес. Экономика знаний*». Днепропетровск. 2015. С. 131-135.
26. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Применение методов недифференцируемой оптимизации для параметрической идентификации нечетких моделей. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2015. С. 92-93.
27. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Blyuss O.V. Neuro-fuzzy technologies in candidate biomarkers testing in breast cancer. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2015. С. 91.
28. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. О решении задачи «location-allocation» методами оптимального разбиения множеств. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали 18-ї міжнародної науково-практичної конференції SAIT 2016. К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ». 2016. С. 94-95.
29. Киселева О.М., Притоманова О.М. К решению непрерывных задач оптимального разбиения множеств с нечеткими параметрами. Материалы 5-й Международной конференции «*Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*» Том II, Кишинэу. 2016. С. 188-193.
30. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Использование нейронечетких технологий при управлении проектами по методу РМВОК РМІ. Тези доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 85-86.
31. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Сравнение двух подходов к решению нелинейных задач оптимального размещения-разбиения. Тези

- доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 87.
32. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Умови існування розв'язку багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з додатковими обмеженнями. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 89-90.
33. Притоманова О.М., Селіщев В.В. Застосування модифікованого принципу узагальнення Заде до задач аналітико-лінгвістичної апроксимації. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2017. С. 156-157.
34. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множин з додатковими центрами доставки. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2017. С. 159-160.
35. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про оптимізацію параметрів нейронечіткої моделі експортних відносин між Україною та Китаєм. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали 20-ї науково-технічної конференції SAIT 2018. К.:ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ». 2018. С. 68.
36. Киселева О.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Оптимізація параметрів нечіткої моделі Мамдані із використанням r -алгоритму Шора. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 102-103.

37. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L., Zhuravel S. A definition of the generalized Voronoi diagrams with the optimal placement of generator points with the employment of the optimal set partitioning method. *Sixth International conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*. Kyiv. 2018. 4 p.
38. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Ус С.А., Матяш В.В. Про розв'язок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілення. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 99-101.
39. Притоманова О.М., Селищев В.Л., Кісельов М.Я. Порівняння ефективності традиційних алгоритмів побудови діаграм Вороного з методом оптимального розбиття множин. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 179-181.
40. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O. On constructing generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. «*Problems of Decision Making under Uncertainties*»: Abstracts of XXXIII International Conference. Hurgada (Egypt). 2019. P. 50-51.
41. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Гринченко В.О., Сергєєв О.С. Про двоетапну неперервно-дискретну задачу розбиття-розподілення з розміщенням центрів у множинах простої структури. Міжнародний науковий симпозіум «*Інтелектуальні рішення*». Матеріали ІХ міжнародної школи-семінару «*Теорія прийняття рішень*». Ужгород. 2019. – С. 89-90.
42. Blyuss O., Zaikin A., Kiseleva E., Prytomanova O., Crnogorac-Jurcevic T. On the development of a urine biomarker-based risk score for the early detection of pancreatic cancer. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних*

- систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 26.
43. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про залежність розв'язку задачі оптимального розбиття множин від коефіцієнта негладкої штрафної функції. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 126-127.
44. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про розв'язання багатокритеріальної задачі оптимального розбиття множин із відшукуванням координат центрів підмножин. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 124-125.
45. Притоманова О.М. Про одну неперервну задачу оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» - АРАМС-2019. Львів. 2019. С 147-150.
46. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про алгоритм побудови адитивної і мультиплікативної діаграм Вороного в умовах невизначеності. *Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – ISDMCI'2020*: матеріали міжнар. наук. конф. Херсон. 2020. С. 71.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації:

47. Притоманова О.М., Білай О.С. Нейронечітка модель оцінки рівня проблемності кредиту. *Нейро-нечіткі технології моделювання в економіці*. 2013. №2. С. 135-160.

48. Притоманова О.М., Булавка О.С. Засоби візуалізації у програмній реалізації алгоритму оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2016. С. 120-127.
49. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В., Журавель С.В. Объектно-ориентированный подход к программной реализации алгоритма решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 87-95.
50. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2018. Вип. 18. С. 99-109.
51. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Побудова мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 117-126.

ABSTRACT

Prytomanova O.M. Fuzzy problems of optimal set partitioning: theoretical bases, methods and algorithms for solving. - Manuscript.

Thesis submitted for a doctor's degree in physical-mathematical science by specialty 01.05.01 - Theoretical bases of information and cybernetics. - Oles Honchar Dnipro National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2020.

This thesis is devoted to the further development of the theory of optimal programming with Boolean variables, for fuzzy problems of optimal set partitioning (OSP), in which computational intelligence methods are used in purpose to reveal uncertainty: fuzzy set theory and fuzzy neural networks.

The thesis consists of an introduction, seven chapters, conclusions, a list of used sources and additions.

In chapter 1, the analysis of literature sources on the topic of the thesis research is carried out.

In chapter 2, it is formulated mathematical formulations of fuzzy problems of OSP and outlines approaches to their solution based on the methods of computational intelligence. The classification of fuzzy OSP problems according to which elements of the problem there is fuzziness is offered. It identifies two main types of fuzzy OSP problems: 1) with fuzzy elements in the problem to be optimized; 2) with vagueness in the elements of the problem, which are not subject to optimization. To formulate the mathematical formulations of fuzzy problems of OSP type 1, two equivalent definitions of fuzzy partition of a clear set are given. A mathematical formulation of a fuzzy continuous problem of type 1 of optimal partitioning of a set Ω from E_n into its fuzzy subsets $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ with finding the coordinates of the centers of these subsets τ_1, \dots, τ_N is formulated. A fuzzy problem of type 2 is formulated with fuzzy described parameters in the target functional and constraints. Approaches to the formalization of fuzziness in computational intelligence problems are presented and a method of constructing a generalized mathematical model for identifying nonlinear objects using neurofuzzy technologies used to develop methods and algorithms for solving fuzzy ORM problems is described. To optimize the parameters of the fuzzy model, the Shor's r -algorithm is used (the method of minimization with stretching of space in the direction of the difference of two consecutive generalized antigradients). The advantage of the r -algorithm, in addition to being effective for large-scale optimization problems for smooth tier functions with strongly elongated level lines, is that it can also be used for non-smooth objective functions that occur when using triangular and trapezoidal membership functions and some operations. over fuzzy sets. In these cases, the use of classical gradient methods, which require the smoothness of functions, can cause problems in the convergence of these methods.

In chapter 3, it is investigated fuzzy problems of optimal partitioning of type 2 with fuzziness in elements of the problem that are not subject to optimization. A unified approach to solving problems of optimal partitioning in the conditions of fuzzy initial data has been developed, which is based on the synthesis of methods of the theory of optimal partitioning of sets and computational intelligence. First, the method of neurolinguistic identification of dependencies is used to remove uncertainty in the initial data, and then the mathematical and algorithmic apparatus for solving the problems of OSP under conditions of certainty are used. This confirms the universality of the theory of OSP, namely, models and methods for solving continuous problems of optimal partitioning can be generalized in the case when the initial data are uncertainty. The only approach is demonstrated in the development of methods and algorithms for solving the following fuzzy OSP problems: with a function in the target functional, the explicit form of which is unknown, with fuzzy parameters in the target functional and constraints of the problem, and an infinite-dimensional fuzzy location-allocation problem.

In chapter 4, it is investigated two-stage continuous-discrete problems of optimal partitioning-allocation. Continuously discrete problems of optimal partitioning-allocation generalize, on the one hand, classical finite-dimensional transport problems in case the volumes of production (storage, processing) at given points are unknown in advance and are found as a solution of the corresponding continuous problem of optimal allocation of consumers. distributed resource) in the field of service of these points, on the other hand, discrete two-stage production and transport tasks in case of continuously distributed resource. Two two-stage continuous-discrete problems of optimal partitioning-distribution are investigated: the first - with a given position of subset centers under constraints in the form of equalities, the second - with finding the optimal coordinates of the location of subset centers. For both problems, introducing for each subset Ω_i , $i = 1, \dots, N$, a characteristic function $\lambda_i(x)$, from the corresponding infinite-dimensional problem with Boolean values $\lambda_i(\cdot)$ of variables, the transition is made to

the corresponding problem with values $\lambda_i(\cdot)$ from the segment $[0,1]$. The statement about the possibility of such a transition is formulated. Methods for solving both problems based on the introduction of the Lagrange functional and the application of the theory of duality to find its saddle point are substantiated. The theorems on the optimal solution of each of the problems are proved. Algorithms for solving problems are developed, each of which is based on the corresponding theorem. The components of each of the algorithms are, taking into account the non-differentiable objective function, one of the variants Shor's r -algorithm, which is used for numerical solution of the dual problem, and the potential method used to find the value of the second component of the optimal solution. The third section develops a method and algorithm for solving a two-stage continuous-discrete optimal partition-allocation problem with fuzzy parameters in the objective functional, which is based on a single approach developed in chapter 3. The work of the developed algorithms is demonstrated by the model tasks.

In chapter 5, it is developed and substantiated methods and algorithms for constructing Voronoi diagrams with fuzzy parameters, which developed on the basis of a synthesis of methods of OSP theory and computational intelligence. The first section describes an algorithm for constructing a generalized Voronoi diagram with the optimal placement of a finite number of N generator points in a bounded set Ω of n -dimensional Euclidean space $E_n(n \geq 2)$. It is based on the formulation of the corresponding continuous optimal set partitioning problem of a set of subsets, which provides the appropriate type of Voronoi diagram, and the application of mathematical and algorithmic apparatus of the theory of OSP, part of which is the Shor's r -algorithm. Two theorems on the necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal solution of the formulated OSP problem are proved. An algorithm for solving the problem is developed, which is based on proven theorems and one of the variants of the method of generalized gradient descent with stretching of space in the direction of the difference of two consecutive generalized antigradients (r -algorithm). The efficiency

of the developed algorithm is demonstrated on the model problems of constructing additively and multiplicatively weighted Voronoi diagrams both in terms of certainty and with fuzzy parameters.

In chapter 6, it is devoted to the development and substantiation of methods and algorithms for solving the problem of optimal partitioning of sets with constraints on the location of the centers of subsets in terms of certainty and in terms of fuzzy initial data. The first section formulates the problem of optimal partitioning of a set with constraints on the location of the centers of subsets under conditions of definiteness and develops a method and algorithm for its solution. To substantiate the developed method, a theorem is proved that determines the type of optimal solution of the problem. In the second section, a method and algorithm for solving the fuzzy problem of optimal partitioning of sets with constraints on the location of subset centers, namely, with fuzzy parameters in the target functional, are developed and substantiated. A theorem is proved that determines the type of optimal solution of this fuzzy problem. An algorithm for solving a fuzzy problem based on a proven theorem, one of the variants of the generalized gradient descent method with space stretching in the direction of the difference of two consecutive generalized antigradients (Shor's r -algorithm) and the method of neurolinguistic identity are formulated. The efficiency of the methods and algorithms developed in the sixth section is demonstrated on model problems.

In chapter 7, it is devoted to the development of methods and algorithms for solving the problem of optimal partitioning of a set into fuzzy subsets. Methods and algorithms for solving ORM problems on fuzzy subsets are developed and substantiated both with the given coordinates of the centers of subsets and with finding the coordinates of the optimal location of the centers of these subsets. To substantiate the method of solving a fuzzy problem with finding the coordinates of the optimal location of the centers of subsets, the Lagrange functional is introduced and it is shown that for this problem the saddle point of the Lagrange functional exists. The theorems on the necessary and sufficient conditions for the optimality of the existence of a solution of a

fuzzy OSP problem are proved. An algorithm for solving a fuzzy problem is developed, which is based on the proved theorems and one of the variants of the r -algorithm. The effectiveness of the methods and algorithms developed in the seventh section is demonstrated on model problems. To interpret the obtained results, an indicator of the degree of distrust is introduced - the minimum value of the membership function of some fuzzy set, at which a given point of the set to be divided into fuzzy subsets can be reliably attributed to this fuzzy subset. The practical convergence of the developed algorithm is investigated.

Key words: infinite-dimensional mathematical programming, theory of optimal set partitioning, fuzzy problem, computational intelligence, neuro-fuzzy technologies, non-differential optimization, Shor's r -algorithm.

ЗМІСТ

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ВСТУП..... | 25 |
| Розділ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ.... | 35 |
| 1.1 Структура теорії оптимального розбиття множин із n -вимірною евклідового простору E_n . Теоретичні та практичні застосування..... | 35 |
| 1.2 Неперервні задачі оптимального розбиття множин з евклідового простору E_n в умовах невизначеності..... | 47 |
| 1.3 Парадигми обчислюваного інтелекту..... | 54 |
| 1.4 Висновки до розділу 1..... | 59 |
| Розділ 2. МАТЕМАТИЧНІ ПОСТАНОВКИ НЕЧІТКИХ ЗАДАЧ ОРМ ТА ОСНОВНІ ПІДХОДИ ЩОДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ..... | 61 |
| 2.1 Класифікація та математичні постановки нечітких задач ОРМ..... | 61 |
| 2.2 Підходи щодо формалізації нечіткості у задачах обчислювального інтелекту..... | 71 |
| 2.3 Метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей.. | 85 |
| 2.4 Висновки до розділу 2..... | 98 |
| Розділ 3. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ В УМОВАХ НЕЧІТКИХ ДАНИХ..... | 101 |
| 3.1 Розробка єдиного підходу до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних..... | 101 |
| 3.1.1 Метод розв'язання задачі оптимального розбиття з нейролінгвістичною ідентифікацією функцій у цільовому функціоналі..... | 102 |
| 3.1.2 Метод розв'язання задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі..... | 110 |

| | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1.3 | Метод розв’язання нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами..... | 118 |
| 3.2 | Алгоритм розв’язання задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в обмеженнях..... | 122 |
| 3.3 | Висновки до розділу 3..... | 135 |
| Розділ 4. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ-РОЗПОДІЛУ..... | | 138 |
| 4.1 | Метод і алгоритм розв’язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу із заданим положенням центрів підмножин..... | 138 |
| 4.2 | Метод і алгоритм розв’язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з оптимальним розміщенням центрів підмножин..... | 154 |
| 4.3 | Алгоритм розв’язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрам..... | 179 |
| 4.5 | Висновки до розділу 4..... | 187 |
| Розділ 5. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ ДІАГРАМ ВОРОНОГО З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ..... | | 190 |
| 5.1. | Алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів на основі методів теорії ОРМ..... | 191 |
| 5.2. | Алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з нечіткими параметрами..... | 200 |
| 5.3. | Побудова адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з нечіткими параметрами..... | 211 |
| 5.4. | Розв’язання модельних задач побудови діаграм Вороного..... | 212 |
| 5.5. | Висновки до розділу 5..... | 222 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Розділ 6. МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН..... | 225 |
| 6.1. Метод і алгоритм розв'язання задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності..... | 226 |
| 6.2. Метод і алгоритм розв'язання нечіткої задачі оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин..... | 232 |
| 6.3 Розв'язання модельних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин..... | 242 |
| 6.4 Висновки до розділу 6..... | 257 |
| Розділ 7. МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА НЕЧІТКІ ПІДМНОЖИНИ..... | 259 |
| 7.1 Метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини із заданими координатами центрів підмножин..... | 260 |
| 7.2 Метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини з відшукуванням координат оптимального розміщення центрів цих підмножин..... | 270 |
| 7.3 Тестові приклади розв'язання задач розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини..... | 280 |
| 7.4 Висновки до розділу 7..... | 288 |
| ВИСНОВКИ..... | 290 |
| ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 292 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Додаток А. ОПИС ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН У ЗАГАЛЬНІЙ ПОСТАНОВЦІ..... | 315 |
| Додаток Б. ОПИС ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН..... | 331 |
| Додаток В. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ..... | 333 |

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку теорії оптимального розбиття у напрямку розробки методів і алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ в ускладнених постановках, у яких для розкриття невизначеності застосовуються методи обчислювального інтелекту: апарат теорії нечітких множин та нечіткі нейронні мережі.

Актуальність теми. Велика кількість практично важливих задач із різних областей людської діяльності може бути зведена до задач розбиття множини певної структури на її підмножини, з метою мінімізації деякого критерія якості виконаного розбиття. Усе різноманіття задач, які зводяться в математичній постановці до задач оптимального розбиття заданої множини на її підмножини, що не перетинаються, умовно поділяють на два класи: дискретні та неперервні задачі оптимального розбиття.

До неперервних задач розбиття відносять задачі, у яких множина, що підлягає розбиттю, є континуальною. Типовим представником таких задач є нескінченновимірні транспортні задачі та більш загальні - нескінченновимірні задачі розміщення підприємств з одночасним розбиттям даного регіону, неперервно заповненого споживачами, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат. Перші теоретичні результати та методи розв'язання нескінченновимірної транспортної задачі були опубліковані Л.В.Канторовичем у 1942 році у зв'язку з вирішенням класичної проблеми Г.Монжа (задача про рови та насипи), сформульованою ним ще у 1784 році. У подальшому модифікації та узагальнення задачі про переміщення мас досліджувалися Л.В.Канторовичем та Г.Ш.Рубінштейном за допомогою розвинуеного ними функціонально-аналітичного методу.

Різні задачі, які зводяться до як дискретних, так і неперервних, задач оптимального розбиття множин, вивчалися у роботах І.В.Сергієнка,

П.І.Стецюка, П.С.Сеньо, Ю.Г.Стояна, А.Г.Сухарева, Ф.Л.Тота В.А.Трубiна, В.Р.Хачатурова, С.В.Яковлева, Е.Balas, Н.Corley, R.Francis, M.Friedman, R.Garfinkel, H.Jandl, G.Nemhauser, M.Padberg, S.Roberts, K.Wieder та iн. Значна увага в даний час придiляється, особливо в зарубiжнiй науковiй лiтературi, неперервним задачам розмiщення-розбиття, пiдхiд до їх розв'язання за допомогою дiаграм Вороного розроблений А.Murat, V.Verter, G.Laporte.

Створення теоретичних основ розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) з n -вимiрного евклiдового простору E_n , якi є некласичними задачами нескiнченновимiрного математичного програмування з булевими змiнними, було започатковане у 70-х роках минулого сторiччя чл.-кор. НАН України О.М.Кiсельовою. На теперiшнiй час науковою школою пiд її керiвництвом (О.Б.Блюсс, М.С.Дунайчук, С.В.Журавель, Я.С.Кадочникова, Л.С.Коряшкiна, О.Ю.Лебiдь, Л.І.Лозовська, О.М.Притоманова, Т.Ф.Степанчук, С.А.Ус, Т.О.Шевченко та iн.) розроблено ряд напрямiв в теорiї ОРМ, якi обумовленi рiзними типами математичних постановок задач розбиття. Це - лiнiйнi i нелiнiйнi, однопродуктовi й багатопродуктовi, детермiнованi й стохастичнi, в умовах повної та неповної iнформацiї про вихiднi данi, статичнi та динамiчнi задачi ОРМ без обмежень i з обмеженнями, як iз заданим положенням центрiв пiдмножин, так i з вiдшукуванням оптимального варiанту їх розташування.

Наукова значимiсть та актуальнiсть теорiї ОРМ визначаються її широкими теоретичними та практичними застосуваннями. Створена теорiя ґрунтується на єдиному пiдходi, що полягає в зведеннi початкових нескiнченновимiрних задач оптимiзацiї певним чином (наприклад, через функцiонал Лагранжа) до негладких, як правило, скiнченновимiрних задач оптимiзацiї, для числового розв'язку яких застосовуються сучаснi ефективнi методи недиференцiйовної оптимiзацiї - рiзнi варiанти r -алгоритму, розробленi в Інститутi кiбернетики iм. В.М.Глушкова НАН України пiд керiвництвом Н.З.Шора.

Таким чином, розвиток математичної теорії оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n , яка представляє новий розділ нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними, є фундаментальною теоретичною проблемою кібернетики та водночас має велике практичне значення.

Ще однією фундаментальною проблемою кібернетики є розробка математичних основ інтелектуальних систем опрацювання інформації. Одним з наукових напрямів, у якому для розв'язання інтелектуальних задач застосовують теорію нечітких множин та нейронних мереж, є обчислювальний інтелект. Технології, методи та алгоритми обчислювального інтелекту розробляли у своїх працях М.З.Згуровский, Ю.П.Зайченко, Ю.Г.Крак, В.І.Литвиненко, J.Bezdek, D.Fogel, R.Marks, P.Norvig, S.Russell та ін. Широке застосування в багатьох задачах обчислювального інтелекту знайшли системи нечіткої логіки та нечіткі нейромережі, які розроблялися у роботах В.Kosko, F.Wang, L.Zadeh, H.Zimmerman та багатьох ін. Обчислювальний інтелект дозволяє об'єднати у єдину нейронечітку технологію управління невизначеністю та оптимізацію, що значно розширює можливості інтелектуальних систем опрацювання інформації.

Відзначимо, що переважна більшість задач теорії ОРМ досліджувалась в умовах визначеності. Однак реальні ситуації, для яких створюються моделі оптимального розбиття множин, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних моделях розбиття множин знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, суттєвих для наслідків від прийнятих рішень.

Тому актуальною є розробка і застосування такого математичного апарату, який би апріорі включав в себе можливість появи невизначеності, і тим або іншим методом дозволяв врахувати цю невизначеність. Клас задач ОРМ, який пов'язаний з необхідністю врахування чинників невизначеності, що мають не

ймовірносно-статистичну природу, відносять до нечітких задач ОРМ. Постановки нечітких задач ОРМ та деякі підходи до їх розв'язання були започатковані у роботах О.М.Кісельової та продовжені її учнями О.Ю.Лебідь, О.О.Жильцовою, С.В.Журавелем, П.В.Сьомчиною.

Актуальним залишається дослідження задач ОРМ, в яких або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, недовизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі, або ж нечітко сформульовані самі критерії та (або) системи обмежень, або на модель оптимізації впливають зовнішні неконтрольовані збурення різного роду та ін.

Дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку теорії оптимального розбиття у напрямку розробки методів і алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ в ускладнених постановках, у яких для розкриття невизначеності застосовуються методи обчислювального інтелекту: апарат теорії нечітких множин та нечіткі нейронні мережі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження проводилися у відповідності з планами наукових досліджень науково-дослідної лабораторії оптимізації складних систем (науковий керівник – чл.-кор. НАНУ, проф. О.М.Кісельова) кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара у межах держбюджетних тем: «Математичні моделі і методи оптимізації складних систем на основі нелінійної теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0112U000193, 2012-2014 р.р.), «Математичні моделі та алгоритми розв'язання неперервних задач покриття на основі теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0115U002392, 2015-2017 р.р.), «Розробка математичних моделей та алгоритмів розв'язання прикладних задач класифікації, кластеризації на основі теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0119U100600, 2019-2021

рр.), а також в рамках наукових тем «Математичні моделі, методи та алгоритми аналізу складних систем» (№ держреєстрації 0113U003558, 2013-2015 р.р.), «Теоретичні основи математичних моделей та методів дослідження складних систем» (№ держреєстрації 0116U002214, 2016-2018 р.р.), «Математичні моделі, методи та алгоритми розв'язання задач аналізу складних систем» (№ держреєстрації 0119U101302, 2019-2021 р.р.) при кафедрі обчислювальної математики та математичної кібернетики у відповідності з тематичними планами науково-дослідних робіт Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Мета і завдання дослідження. *Мета роботи* – розробка теоретичного апарату методів і алгоритмів нечітких задач оптимального розбиття множин в ускладнених постановках, побудова на основі обґрунтованих методів нових ефективних алгоритмів розв'язання деяких класів нечітких задач оптимального розбиття та числова реалізація розроблених алгоритмів.

Основні завдання дослідження:

- подальший розвиток теорії оптимального розбиття множин у напрямку розробки та обґрунтування методів розв'язання класу задач ОРМ, який пов'язаний з необхідністю врахування чинників невизначеності, що мають не ймовірносно-статистичну природу;

- розробка підходів щодо формалізації невизначеності у задачах ОРМ, в яких окремі елементи задачі є нечіткими, неточними, недовизначеними;

- розробка алгоритмів для числової реалізації запропонованих та обґрунтованих методів;

- створення комплексів комп'ютерних програм для реалізації розроблених алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ;

- експериментальне дослідження ефективності розроблених методів і алгоритмів на модельних задачах.

Об'єктом дослідження є теорія методів і алгоритмів розв'язання задач оптимального розбиття множин в нечітких умовах та її застосування.

Предметом дослідження є методи та алгоритми розв'язання нечітких задач оптимального розбиття множин та їх застосування.

Методи дослідження – методи теорії неперервних задач оптимального розбиття множин в умовах визначеності, методи обчислювального інтелекту: теорія нечітких множин та нечіткі нейронні мережі, теорія неklasичних оптимізаційних задач, теорія двоїстості, методи недиференційовної оптимізації, зокрема, r -алгоритм Н.З. Шора.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- *вперше* запропоновано узагальнену класифікацію нечітких задач ОРМ у відповідності до того, у яких елементах задачі наявна нечіткість;

- *вперше* запропоновано єдиний підхід до розв'язання неперервних задач ОРМ з нечіткими початковими даними на основі синтезу методів теорії ОРМ та нейронечітких технологій;

- розроблено *новий* метод побудови узагальненої математичної моделі ідентифікації нелінійних залежностей із застосуванням методів обчислювального інтелекту: теорії нечітких множин та нечітких нейронних мереж;

- *узагальнено* методи розв'язання задач оптимального розбиття множин з нечіткими вхідними даними у цільовому функціоналі та обмеженнях;

- розроблено та теоретично обґрунтовано *нові методи* розв'язання задач оптимального розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини з розміщенням центрів підмножин та сформульовано алгоритми розв'язання цих задач;

- *удосконалено* методи та алгоритми розв'язання задач оптимального розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини із заданим положенням центрів цих підмножин;

- розроблено та теоретично обґрунтовано *нові* методи та алгоритми розв'язання задач оптимального розбиття множин (як в умовах визначеності, так і невизначеності) в ускладнених постановках, а саме:

- з додатковими обмеженнями на розташування центрів підмножин,
- двоетапні неперервно-дискретної задачі розміщення-розбиття;

- *удосконалено* алгоритми побудови узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині з n -вимірному евклідового простору як в умовах визначеності, так і з нечіткими початковими даними;

- розроблено комплекси комп'ютерних програм для реалізації запропонованих алгоритмів розв'язання досліджених задач оптимального розбиття множин.

Практичне значення одержаних результатів дисертаційної роботи полягає в створенні нових ефективних теоретично обґрунтованих методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач оптимального розбиття множин та їх програмній реалізації. Розроблені комплекси комп'ютерних програм можуть бути застосовані для розв'язування багатьох прикладних оптимізаційних задач, які у математичні постановці зводяться до неперервних моделей оптимального розбиття множини. Це - задачі розпізнавання образів з метою мінімізації функції витрат від хибного розпізнавання, медичної діагностики, територіального планування сфер обслуговування; нескінченновимірні транспортні задачі та задачі розміщення підприємств; задачі проектування мереж різного призначення та багато ін.

Результати дисертаційної роботи використовувались у навчальному процесі Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара під час викладання автором навчальних дисциплін «Математичні моделі задач оптимального розбиття множин», «Нейронечіткі технології», «Системи управління знаннями», при здійсненні керівництва курсовими та дипломними

роботами студентів факультету прикладної математики, які навчалися за спеціальностями прикладна математика та системний аналіз.

Особистий внесок здобувача. Всі основні наукові результати, викладені в дисертаційній роботі, отримані автором особисто. Визначення загального плану досліджень належить науковому консультанту Олені Михайлівні Кісельовій. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: [1] – побудова нейронечіткої моделі; [3] – метод побудови узагальненої математичної моделі ідентифікації нелінійних залежностей із застосуванням методів обчислювального інтелекту: теорії нечітких множин та нечітких нейронних мереж; [4]-[6] – формулювання алгоритмів для програмної реалізації методів розв’язання нелінійних, багатопродуктових задач ОРМ та візуалізації їх роботи; [7] – математична постановка задачі оптимізації параметрів нечіткої моделі; [8], [9], [18] – побудова математичних моделей та обґрунтування застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації залежностей у фінансово-економічній сфері та медицині; [10]-[12], [19] – теоретичне обґрунтування єдиного підходу до розв’язання задач ОРМ з нечіткими початковими даними на основі синтезу методів теорії ОРМ та нейронечітких технологій; [20], [24] – алгоритми побудови узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного на основі методів теорії ОРМ в умовах визначеності, [13], [15], [23] – в умовах невизначеності; [14], [17] – розробка та теоретичне обґрунтування методів та алгоритмів розв’язання двоетапних неперервно-дискретних задач розміщення-розбиття в умовах визначеності, [25] – з нечіткими параметрами; [21] – розробка та теоретичне обґрунтування методів та алгоритмів розв’язання задач оптимального розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини; [22] – розробка та теоретичне обґрунтування методів та алгоритмів розв’язання задач ОРМ з додатковими обмеженнями на розташування центрів підмножин.

Апробація результатів дисертації. Основні ідеї, принципи, положення і результати дисертаційного дослідження доповідались і обговорювались на

наукових конференціях та семінарах різного рівня, серед яких: I міжнародний науково-практичний форум «Наука і бізнес» (2015); IX міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 2019); міжнародні наукові конференції: I міжнародна науково-методична конференція «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці» (Чернівці, 2009), IV міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (Харків, 2013), V міжнародна конференція «Космические технологии: настоящее и будущее» (Дніпро, 2015), V міжнародна науково-практична конференція «Наука и бизнес. Экономика знаний» (Дніпро, 2015), Международна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпро, 2012-2019), міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз і інформаційні технології - SAIT» (Київ, 2016, 2017, 2018), V международная конференция «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Кишинэу, 2016), Sixth International conference «Analytic Number Theory and Spatial Tessellations» (Київ, 2018), XXXIII International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties», (Hurgada, Egypt, 2019), міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики - APAMCS» - (Львів, 2019), міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту - ISDMCI» (Херсон, 2020); а також доповідалися на науковому семінарі «Сучасні питання оптимізації та дискретної математики» при Науковій раді НАН України з проблеми «Кібернетика» (науковий керівник – чл.-кор. НАНУ, проф. О.М.Кісельова) та конференціях за підсумками науково-дослідних робіт Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи повною мірою викладено в 51 науковій праці, з них 25 статей [1-25] у фахових виданнях України та інших держав, з яких 18 статей [1-7, 10-17, 20, 22, 24] у вітчизняних

фахових виданнях, серед них 6 статей [3, 10, 13, 17, 20, 24] у виданнях України, включених до наукометричної бази Scopus, 1 стаття [1] у фаховому виданні України з іншої спеціальності, та 7 статей [8, 9, 18, 19, 21, 23, 25] у наукових періодичних виданнях інших держав з напрямку, з якого підготовлено дисертацію, серед них 3 статті [9, 18, 25] у виданнях, включених до наукометричної бази Scopus, зокрема 2 статті без співавторів, а також 26 тез доповідей [26-51] у збірниках матеріалів міжнародних наукових конференцій.

Розділ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 Структура теорії оптимального розбиття множин із n -вимірною евклідового простору E_n . Теоретичні та практичні застосування

Великий клас практично важливих задач оптимізації зводиться до задач оптимального розбиття заданої множини на деякі її підмножини. Наведемо приклади деяких з них.

Задача про планування ділянки з [16]: вважаються заданими рельєф місцевості (рівняння земної поверхні) до планування і після нього, а також витрати по переміщенню одного кубічного метра землі з одного пункту в інший. Потрібно вказати такий план переміщення земних мас, при якому витрати по переміщенню виявилися б мінімальними. *Задача зрошення* з [22]: відомі потреба в воді для кожної точки зрошуваної території, а також пункти можливого будівництва водонапірних станцій, відомі питомі витрати на доставку води. Потрібно так розбити всю зрошувальну територію на зони зрошення кожної з водонапірних станцій, щоб сумарні витрати на зрошення всієї території, а також на будівництво і експлуатацію системи зрошення були мінімальними. *Задача про розбиття множини телефонних абонентів* на підмножини, що обслуговуються кожною з АТС (місце розташування яких може бути заздалегідь невідомо), з метою мінімізації загальної вартості телефонного дроту з [119, 124]. *Задача розбиття деякого адміністративного району на шкільні регіони* з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування школярів до шкіл з [65]. *Задача територіального планування сфери обслуговування* з [1, 65]: тут в ролі шкіл з попереднього прикладу можуть виступати різні установи. *Задача встановлення меж виборчих округів* з [120]. *Задача планування автомобільних стоянок* з [124].

Нескінченновимірна задача розміщення з [19, 114]: на деякій множині, рівномірно покритій споживачами, потрібно розмістити пункти виробництва деякої продукції з одночасним визначенням їх потужності і зон дії так, щоб мінімізувати сумарні витрати на виробництво всієї продукції і доставку її до пунктів споживання за умов, що кожен пункт виробництва виробляє продукцію для споживачів, які належать його зоні обслуговування, і зони обслуговування всіх пунктів виробництва не перетинаються. *Нескінченновимірна транспортна задача* з [16], яка є окремим випадком попередньої задачі. *Нескінченновимірна задача про використання обладнання* з [85]. *Задача вибору оптимальних фізичних умов опромінення* злоякісних пухлин з метою утворення в організмі такого сумарного дозного поля, яке було б якомога ближче до заданого з [19]. *Задача про розподіл посівних площ* з метою отримання максимально можливого врожаю з [9]. *Задача розпізнавання образів* з метою мінімізації середньої функції втрат від неправильного розпізнавання з [4]. *Задача медичної діагностики* різних захворювань з метою мінімізації помилки при встановленні діагнозу з [19].

Усе різноманіття задач, які зводяться в математичній постановці до задач оптимального розбиття заданої множини на її підмножини, що не перетинаються, умовно поділяють на два класи: дискретні та неперервні задачі оптимального розбиття.

Теоретичним результатам і методам розв'язання дискретних задач розбиття та спорідненим з ними задачам упаковки та покриття присвячена велика кількість робіт вітчизняних та зарубіжних авторів, серед яких роботи І.В.Сергієнка [89], П.І.Стецюка [89, 91], П.С.Сеньо [88], Ю.Г.Стояна, С.В.Яковлева [182], [186]-[188], А.Г.Сухарева, Ф.Л.Тота, В.А.Трубіна, В.Р.Хачатурова [98], E.Balas, H.Corley [119], R.Francis [124], M.Friedman, R.Garfinkel, H.Jandl, G.Nemhauser, M.Padberg, S.Roberts, K.Wieder та ін.

До неперервних задач розбиття відносять задачі, у яких множина, що підлягає розбиттю, є континуальною. Типовим представником таких задач є

нескінченновимірні транспортні задачі та більш загальні - нескінченновимірні задачі розміщення підприємств з одночасним розбиттям даного регіону, неперервно заповненого споживачами, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат. Перші теоретичні результати та методи розв'язання нескінченновимірної транспортної задачі були опубліковані Л.В.Канторовичем у 1942 році у зв'язку з вирішенням класичної проблеми Г.Монжа (задача про рови та насипи), сформульованою ним ще у 1784 році. У подальшому модифікації та узагальнення задачі про переміщення мас досліджувалися Л.В.Канторовичем та Г.Ш.Рубінштейном за допомогою розвинутого ними функціонально-аналітичного методу [19]. Різні задачі, які зводяться до неперервних задач оптимального розбиття множин, такі, як задача відшукування областей тяжіння локальних мінімумів деякої багатоекстремальної функції, неперервні задачі про покриття, задача Неймана-Пірсона, задача відшукування вузлів оптимальних кубатурних формул для обчислення інтегралів вивчалися у роботах Н.В.Сорлей, С.Д.Робертс, Р.Л. Франсис, М.Фрідман, А.Г.Сухарева, С.В.Туєва.

Значна увага в даний час приділяється, особливо в зарубіжній науковій літературі, неперервним задачам розміщення-розбиття, підхід до розв'язання цих задач за допомогою діаграм Вороного розроблений А.Мурат, В.Вертер, Г.Лароше [171]. Тут необхідно відзначити, що у порівнянні з роботою [171] і роботами, зазначеними в посиланнях цієї роботи, алгоритми, розроблені в теорії ОРМ, мають ряд переваг:

- застосовні для розв'язання нелінійних, багатопродуктових задач location-allocation при обмеженнях на потужності підприємств у вигляді рівностей і нерівностей з розміщенням підприємств;

- в результаті роботи алгоритмів отримують оптимальні розбиття множини споживачів на зони обслуговування їх кожним з підприємств по кожному продукту; оптимальні координати розміщених підприємств і оптимальні потужності підприємств;

- не залежать від розмірності простору (питання зводиться лише до обчислення багатовимірних інтегралів);
- не залежать від геометрії множин, що підлягають розбиттю;
- завдяки високій швидкодії r -алгоритму Шора застосовні для задач великих розмірностей ($N = 100, 200, 300$ і т.д.), див. [9];
- в ітераційноу процесі одночасно поліпшуються розміщення центрів підмножин, розбиття та обсяги виробництва продукції на підприємствах.

Оптимізаційні задачі виробничо-транспортного планування відносяться до найбільш поширеного типу задач, що виникають при аналізі питань довгострокового і поточного планування та наведені у роботі [66]. Робота присвячена опису моделей, методів і алгоритмів розв'язання звичайних і багатоіндексних розподільних задач в лінійній, нелінійній та динамічній постановках, задач розміщення виробництва і технічних засобів, синтезу мереж.

Детальний опис та історія застосованих методів розв'язання задач оптимального розбиття множин наведено у [89]. В статті увага надається узагальненому градієнтному спуску, розтягу простору задля покращення процесу мінімізації яружних функцій та застосування теорії двоїстості.

Створення теоретичних основ розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин (ОПМ) з n -вимірною евклідовою простору E_n було започатковане у 70-х роках минулого сторіччя американськими вченими Н.Сорлі і С.Робертс та, незалежно, українськими математиками І.Бейко і О.М.Кісельовою. Н.Сорлі і С.Робертс в своїх дослідженнях вдалося дійти тільки до отримання необхідних умов оптимальності розбиття. У той же час О.М.Кісельовій на основі аналогічних, отриманих нею, необхідних умов вдалося піти далі і розробити числові алгоритми відшукування оптимальних рішень. Це стало можливим завдяки використанню ефективних методів недиференційованої оптимізації - різних варіантів r -алгоритму Н.З.Шора для числового розв'язку допоміжних

скінченновимірних оптимізаційних задач, що виникають при розробці методів розв'язання нескінченновимірних задач ОРМ.

Математична теорія оптимального розбиття множин (ОРМ) з n -вимірною евклідовою простору E_n є новим розділом нескінченновимірної математичної програмування з булевими змінними. Основні результати цієї теорії отримано протягом останніх 50-ти років науковою школою члена-кореспондента НАН України Кісельової О.М. та представлені в більш ніж 500 наукових працях, серед яких п'ять монографій [25, 26, 28, 39, 52].

Структуру теорії ОРМ, яка сформована до теперішнього часу, можна представити у вигляді блок-схеми (рис. 1.1).

Різні напрями теорії неперервних задач ОРМ (рис. 1.1.) обумовлені як різними типами математичних постановок задач розбиття, так і різними сферами її застосувань [52].

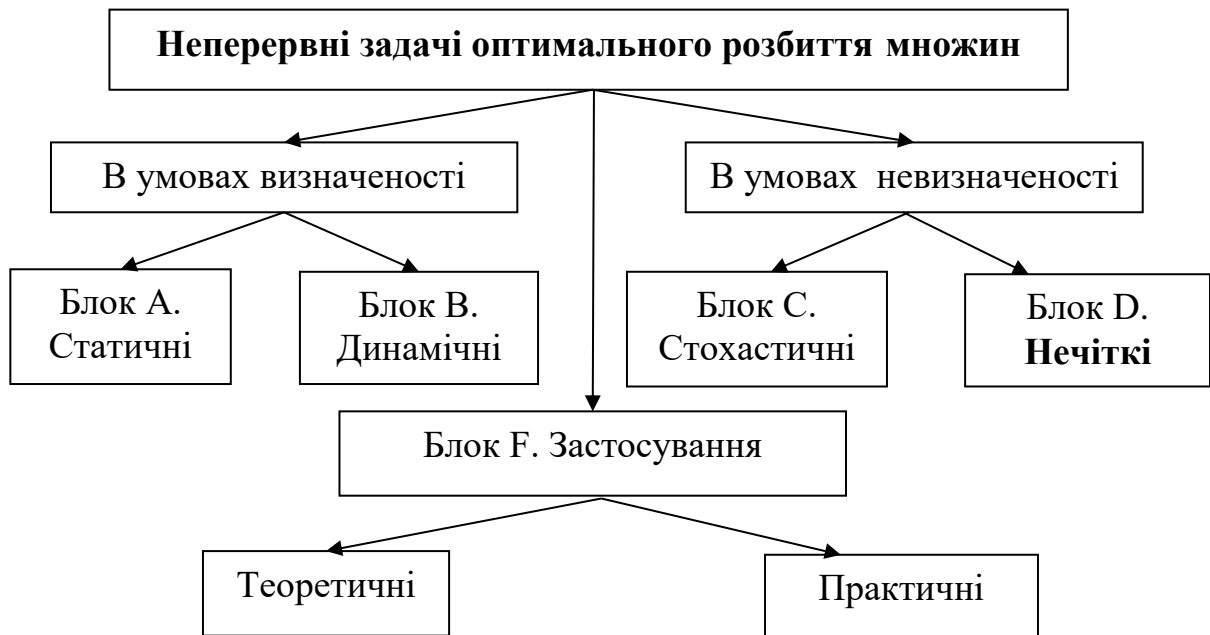


Рис. 1.1 – Структура теорії оптимального розбиття множин

Для опису основних принципів (ознак) класифікації задач ОРМ наведемо

далі найбільш загальну постановку неперервної задачі ОРМ, яка була сформульована у роботі [25].

Нехай Ω – безперервна, обмежена, вимірна за Лебегом множина з n -вимірною евклідовою простору E_n , (Ω, Σ, μ) – вимірний простір, Σ – алгебра множини Ω . У якості міри μ розглядатимемо міру Лебега.

Означення 1.1. [39] Розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин назвимо систему її підмножин $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$, щодо яких виконуються умови:

- 1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, N}$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$;
- 3) $\mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}$.

Позначимо через Σ_Ω^N простір всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин:

$$\Sigma_\Omega^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

При цьому розбиття, що відрізняються тільки множиною нульової міри, будемо вважати рівними елементами простору Σ_Ω^N .

Очевидно, що $\Sigma_\Omega^N \subset \Sigma^N$. Для елементів простору $\Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma}_N$ – декартового добутку N алгебр множини Ω , а відповідно й для елементів Σ_Ω^N , введемо метрику

$$\rho(\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N)\}, \{(\bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_N)\}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \mu^2(\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i)},$$

де під означенням $\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i$ розуміється симетрична різниця множин.

Метричний простір, побудований на базі $\Sigma_\Omega^N \subset \Sigma^N$, обмежений, щільний в собі, хаусдорфовий, замкнутий [162, 163].

Постановка загальної задачі ОРМ. Нехай функції $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow R^1$, $j = 1, \dots, M$ – псевдонеперервні функції розбиття;

$$F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M F^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j);$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M G_i^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j), i = 1, \dots, m.$$

Потрібно знайти набір підмножин $(\Omega_1^{1*}, \dots, \Omega_N^{1*}; \dots; \Omega_1^{M*}, \dots, \Omega_N^{M*}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M$, при якому функція розбиття F досягає свого мінімального значення і виконуються умови:

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \leq 0, i = 1, \dots, p,$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = 0, i = p + 1, \dots, m.$$

Уведемо наступні позначення:

$$(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = (\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \in (\Sigma_\Omega^N)^M;$$

$$U = \left\{ (\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M : G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \leq 0, i = \overline{1, p}; \right.$$

$$\left. G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = 0, i = \overline{p+1, m} \right\}.$$

Тоді, коротко задачу оптимального розбиття множин можна записати так:

$$F(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in U} \quad (1.1)$$

Застосовуючи означення з наведеної загальної постановки задачі ОРМ (1.1), наведемо класифікацію неперервних задач ОРМ блоків А і Б (рис. 1.1.) за різними ознаками (рис. 1.2).



Рис. 1.2 – Класифікація неперервних задач ОРМ за різними ознаками

За значенням параметра M розрізняють: однопродуктові задачі ОРМ: $M=1$; багатопродуктові задачі ОРМ: $M \geq 2$.

На рис. 1.3 представлено розбиття множини Ω на три підмножини.

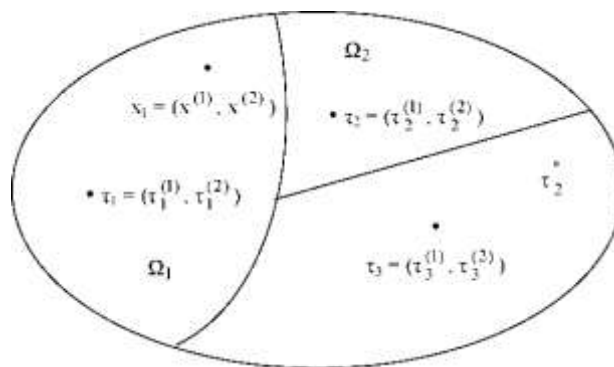


Рис. 1.3 – Приклад розбиття множини Ω на три підмножини

На рис.1.4 зображено можливе розбиття множини $\Omega \subset E^2$ на три підмножини $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ за кожним із двох «продуктів» ($M=2$).

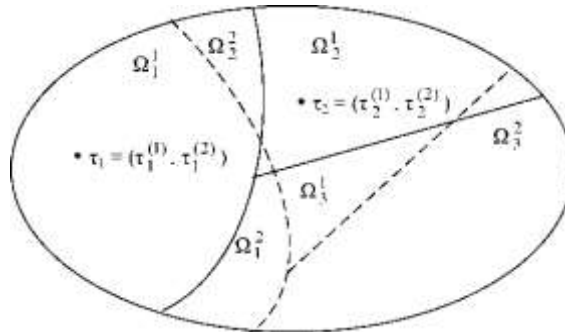


Рис. 1.4 – Приклад можливого розбиття двопродуктової задачі на три підмножини: суцільні лінії – межа за 1-м продуктом; пунктирні лінії – межа за 2-м продуктом; τ_i - спільний центр для підмножин Ω_i^1, Ω_i^2 , $i = 1, 2, 3$.

За наявності в задачі *вхідних характеристик, що змінюються у часі*, виділяють:

- статичні задачі ОРМ: усі параметри задачі не залежать від часу;
- динамічні задачі ОРМ: хоча б одна з вхідних характеристик залежить від часу, і в структуру задачі входить диференціальне рівняння, що описує динаміку цієї характеристики.

За наявності обмежень на розбиття розрізняють задачі ОРМ:

- без обмежень: $U \equiv (\Sigma_{\Omega}^N)^M$;
- з обмеженнями у формі рівностей та нерівностей: $U \subset (\Sigma_{\Omega}^N)^M$.

Як правило, в задачах оптимального розбиття множин із підмножинами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, що є складовими розбиття множини Ω , пов'язані параметри $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – так звані «центри» цих підмножин. Якщо ці параметри задалегідь

відомі, то задачі ОРМ називаються задачами оптимального розбиття з заданими координатами центрів підмножин. Якщо ж зазначені параметри підлягають визначенню поряд із розбиттям, такі задачі ОРМ називаються задачами оптимального розбиття множин із розміщенням центрів підмножин (або з відшукування координат центрів підмножин).

За характером параметрів, що входять до функцій F^j, G_1^j, \dots, G_m^j , $j = \overline{1, m}$, розрізняють детерміновані і стохастичні задачі ОРМ.

Наведемо деякі з цих напрямів і посилання на основні для цієї теорії роботи:

- детерміновані лінійні і нелінійні, однопродуктові і багатопродуктові задачі ОРМ при обмеженнях, як із заданим положенням центрів підмножин, так і з відшукуванням оптимального варіанту їх розташування [18, 37, 139, 141, 142, 158, 159, 162, 163, 165];

- задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, для зняття невизначеності в яких пропонується застосовувати або математичний апарат стохастичного нескінченновимірною математичного програмування (якщо частина інформації має ймовірнісний характер), або апарати нечітких множин і нечіткої логіки (якщо параметри, що входять до опису моделей, є нечіткими, неточними, недостовірними тощо) [20, 29, 148-150, 160];

- динамічні задачі оптимального розбиття з критерієм оптимальності, що залежить від фазових траєкторій і управління деякою заданою керованою системою [17, 143, 146, 147, 174];

- неперервні задачі про кульове покриття, що зводяться до задач ОРМ [27, 151].

Наукова значимість та актуальність теорії ОРМ визначаються її широкими теоретичними та практичними застосуваннями.

Серед теоретичних оптимізаційних задач, які зводяться до задач ОРМ та для розв'язання яких ефективно застосована теорія ОРМ, наведемо такі:

- 1) задачі розпізнавання образів (чітких і нечітких) з метою мінімізації середньої функції втрат від неправильного розпізнавання;
- 2) задачі теорії класифікації та кластеризації, що вивчає питання розбиття заданої множини (скінченновимірної або нескінченновимірної) елементів на підмножини, що не перетинаються;
- 3) задачі, що виникають в теорії статистичних рішень при розбитті простору ознак на непересічні класи (узагальнена задача Неймана-Пірсона) [20];
- 4) задачі глобальної оптимізації [36, 161];
- 5) задачі побудови оптимальних квадратур [35];
- 6) неперервні задачі оптимального кульового (одноразового і багаторазового) покриття обмежених множин евклідового простору, [27, 151];
- 7) задачі геометричного проектування;
- 8) задачі цілочисельного стохастичного програмування;
- 9) задачі стартового управління параболічної системою [17, 25];
- 10) задачі ідентифікації багатозонних моделей динаміки, що відносяться до класу обернених задач, сформульованих для систем із зосередженими параметрами [26];
- 11) задачі побудови діаграми Вороного та її узагальнень, [144, 145].

Для розв'язання наведених в блоках А і В (рис. 1.1) класів задач оптимального розбиття множин запропонований єдиний підхід, в основі якого лежить наступна ідея. Вихідні задачі ОРМ, які математично сформульовані як нескінченновимірні задачі оптимізації, зводяться певним чином (наприклад, через функціонал Лагранжа) до допоміжних скінченновимірних негладких задач максимізації або негладких задач максиміна, для чисельного розв'язку яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації, а саме, різні модифікації r -алгоритму Н.З.Шора, [100].

Особливістю такого підходу для лінійних задач ОРМ є той факт, що розв'язання вихідних нескінченновимірних задач оптимізації вдається отримати

аналітично в явному вигляді, причому в аналітичний вираз можуть входити параметри, які відшукуються як оптимальний розв'язок вищеназваних допоміжних скінченновимірних задач оптимізації з негладкими цільовими функціями. Розв'язок нелінійних задач ОРМ вдається отримати у вигляді операторних рівнянь з параметрами, які відшукуються як оптимальний розв'язок допоміжних скінченновимірних негладких задач оптимізації, для розв'язання яких застосовуються різні модифікації r -алгоритму Шора.

Створена теорія ОРМ може бути застосована для розв'язання наступних прикладних задач: розпізнавання образів з метою мінімізації середньої функції від неправильного розпізнавання; медичної діагностики різних захворювань з метою мінімізації помилки при встановленні діагнозу; територіального планування сфери обслуговування; геологічного прогнозування; охорони навколишнього середовища; розміщення станцій швидкої допомоги, базових станцій стільникового зв'язку та багато ін.

Відзначимо, що переважна більшість задач теорії ОРМ досліджувалась в умовах визначеності. Однак реальні ситуації, для яких створюються моделі оптимального розбиття множин, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності: в початкових даних, в умовах і цілях. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних моделях розбиття множин знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, істотних для наслідків від прийнятих рішень. Природним представляється узагальнення моделей розбиття в умовах визначеності на випадок моделей в умовах невизначеності.

Тому актуальною є розробка і застосування такого математичного апарата, який би апріорі включав в себе можливість появи невизначеності, і тим або іншим методом дозволяв врахувати цю невизначеність.

Таким чином, розвиток математичної теорії оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідового простору E_n , яка представляє новий розділ

нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними, є фундаментальною теоретичною проблемою кібернетики та водночас має велике практичне значення.

У наступному пункті роботи охарактеризуємо існуючі підходи до розв'язання задач ОРМ в умовах невизначеності.

1.2 Неперервні задачі оптимального розбиття множин з евклідового простору E_n в умовах невизначеності

Сформульовані в пункті 1.1 моделі оптимального розбиття множин (блоки А і В) строго математично формалізовані. Для характеристики задач ОРМ в умовах невизначеності сформулюємо, на основі постановки загальної задачі ОРМ з пункту 1.1, задачу ОРМ в умовах визначеності в узагальненій постановці, для якої основні класи задач, наведені у блоках А і В (рис. 1.1), є частинними випадками.

Задача ОРМ у загальній постановці. Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина n -вимірною евклідового простору E_n .

Сукупність N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1, \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2, \dots, \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$ множини Ω будемо називати можливим розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин за кожним з M продуктів, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \quad j = 1, \dots, M$$

$$\text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

причому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ – загальний центр для підмножин $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, що належить Ω .

Позначимо сукупність всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин за M продуктами через Σ_{Ω}^{NM} , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^{NM} = \left(\left\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \right\} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \right. \\ \left. i \neq k, i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right).$$

Під неперервною нелінійною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (серед яких можуть бути порожні) при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей з відшукуванням координат центрів підмножин будемо розуміти наступну задачу:

Задача 1.1. Знайти

$$\min_{\left(\left\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \right\}, \left\{ \tau_1, \dots, \tau_N \right\} \right)} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \right) + \int_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) dx \right]$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\left\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \right\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

$$\text{де } x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega.$$

Функції $\varphi_i^j(x)$ – дійсні, обмежені, опуклі (або увігнуті), двічі неперервно диференційовні функції для всіх $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

b_1, \dots, b_N – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язності задачі:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Класичним прикладом таких задач є задача розміщення підприємств з одночасним розбиттям території на області, що обслуговуються одним підприємством. В даній задачі, як правило, критерієм якості розміщення і розбиття виступають сумарні витрати на виробництво і доставку продукції до споживача. У випадку, коли кожне підприємство виробляє декілька видів продукції, отримуємо багатопродуктову задачу оптимального розбиття множин.

Як уже було відзначено, у роботі розглядаються неперервні задачі оптимального розбиття множин, у яких множина, що підлягає розбиттю є континуальною. Важливим фактором тут є те, що до цього класу задач можна звести практичні задачі, в яких початково множина, що розглядається, не є континуальною за своєю природою. Щоб продемонструвати цей факт, розглянемо наступні приклади задач: задача оптимального розташування веж сотового зв'язку, виборчих округів, шкіл, лікарень тощо. В цих задачах споживачів, які утворюють множину, що підлягає розбиттю, настільки багато, що розв'язувати ці задачі як дискретні стає недоцільно через величезну розмірність отриманої моделі. В цих випадках можна вважати, що «споживач розподілений неперервно», і розглядати неперервну задачу розбиття.

У наведених класах практичних задач часто крім критерію якості виникають певного роду обмеження, продиктовані економічною доцільністю, виробничими масштабами, потужністю тощо. Серед таких обмежень можна навести наступні: обмеження на максимальну кількість продукції, виробленої на окремому підприємстві, обмеження на максимальну кількість абонентів, що може обслуговуватися окремою телевежею, обмеження на сумарні витрати на транспортування продукції та інші.

Це так звані детерміновані задачі нескінченновимірного математичного програмування. Однак реальні ситуації, для яких створюються ці моделі оптимального розбиття множин, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних

моделях розбиття множин знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, істотних для наслідків від прийнятих рішень.

Невизначеність в прийнятті рішень обумовлена недостатньою надійністю і кількістю інформації, на основі якої здійснюється вибір рішення. Існують різні види невизначеності. Дотримуючись, в основному, [10, 39, 93], і не претендуючи на повноту, наведемо види невизначеності, які зустрічаються найбільш часто:

1) принципова невизначеність, наприклад у відомих ситуаціях квантової механіки;

2) невизначеність, генерована загальною кількістю об'єктів або елементів, включених в ситуацію, наприклад, для кількості елементів порядку більшого, ніж 10^9 ;

3) невизначеність, яка породжена занадто високою або недоступною платою за визначеність;

4) невизначеність, викликана нестачею вихідної і поточної інформації про процеси, що відбуваються (суперечливість, невизначеність, неточність, нечіткість, неоднозначність та ін.) або її недостовірності в силу технічних, соціальних та інших причин;

5) невизначеність, пов'язана з обмеженнями в ситуації прийняття рішень (обмеження за часом і елементами простору параметрів, що характеризують фактори прийняття рішень);

6) невизначеність, викликана поведінкою середовища або супротивника, що впливає на процес прийняття рішення;

7) невизначеність, що виникає в силу браку досвіду особи, що приймає рішення, і знань факторів, що впливають на прийняття рішення.

Таким чином, в процесах прийняття рішень є ряд ситуацій, у яких наявний той або інший ступінь невизначеності і які вимагають для свого опису такого

математичного апарату, який би апріорі включав в себе можливість появи невизначеності, і тим або іншим чином дозволяв врахувати цю невизначеність.

Історично першим [39] таким апаратом був апарат теорії ймовірностей, у відповідності до якого невизначеність ситуації описується деякою нормованою мірою, що характеризує можливість появи наперед заданих випадкових результатів (елементів або підмножин деякої множини).

До природнього продовження імовірнісних методів опису невизначених ситуацій можна віднести теорію ігор, в якій невизначеність породжувалася конфліктом та антагоністичними інтересами гравців, пов'язаних між собою певними правилами ведення гри, і теорію статистичних рішень, в якій в якості одного з гравців обиралося пасивне середовище або «природа», поведінка якої характеризувалася заданими законами розподілу ймовірностей. В принципі ці теорії можна вважати крайніми випадками різних ступенів градації невизначеності.

Оптимізаційні задачі розбиття множин в умовах невизначеності вихідної інформації розглядаються в рамках теорії нескінченновимірного математичного програмування при невизначеності або неповній інформації про вихідні дані. У свою чергу, моделі і методи розв'язання задач нескінченновимірного математичного програмування в умовах неповної інформації про параметри умов задачі є предметом дисципліни, що зараз розвивається - стохастичного нескінченновимірного математичного програмування. Причому [116], якщо відомі ті чи інші ймовірностно-статистичні параметри умов задачі, то говорять про прийняття рішень в умовах ризику. У випадках, коли немає підстав для яких би то не було суджень про статистичні особливості явищ, здатних змінити передбачувані значення параметрів умов задачі, кажуть про прийняття рішень в умовах невизначеності.

Очевидно, що моделі задач оптимального розбиття множин в умовах неповної інформації про вихідні дані більш цікаві, ніж детерміновані, з точки

зору практичного застосування в сенсі адекватності реальним процесам. До задач оптимального розбиття в умовах неповної інформації призводять, наприклад, задачі розміщення підприємств, що забезпечують задоволення безперервно розподіленого попиту, в разі коли попит на продукцію і вартість транспортування продукції залежать від випадкових факторів. Для врахування впливу невизначеності в цих задачах застосовується метод, який використовує лише деякі суб'єктивні імовірнісні характеристики параметрів задачі. Такі задачі відносять до класу задач стохастичного нескінченновимірного математичного програмування.

Історично першим таким апаратом тут також був апарат теорії ймовірностей, у відповідності до якого стохастичні методи застосовуються для урахування невизначеності у задачах ОРМ, параметри яких залежать від випадкових факторів. Стохастичні задачі оптимального розбиття множин досліджувалися у роботах О.М.Кісельової, К.А.Кузнецова, Л.І.Лозовської, С.А.Ус [28, 39, 148].

На основі сформульованої вище задачі ОРМ у загальній постановці (задача 1.1) наведемо одноетапну стохастичну багатопродуктову задачу ОРМ при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей з відшукуванням координат центрів підмножин у наступному вигляді [39].

Задача 1.2. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} M \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} [c^j(x, \tau_i, \xi_i^j) + a_i^j] \rho^j(x, \xi_0^j) dx$$

за умов

$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$M \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, \xi_0^j) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N, \mathcal{J}$$

де $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; a_i^j, b_1, \dots, b_N – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі:

$$S = \int \sum_{\Omega, j=1}^M \rho^j(x, \xi_0^j) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i=1, \dots, N;$$

$\xi_i^j = \xi_i^j(\theta): \Theta \rightarrow R$ ($i=0, \dots, N, j=1, \dots, M$) – випадкові величини на ймовірнісному просторі (Θ, \mathcal{J}, P) із заданими математичними очікуваннями $\bar{\xi}_0^1, \dots, \bar{\xi}_N^1, \bar{\xi}_0^2, \dots, \bar{\xi}_N^2, \dots, \bar{\xi}_0^M, \dots, \bar{\xi}_N^M$ і дисперсіями $\hat{\xi}_0^1, \dots, \hat{\xi}_N^1, \hat{\xi}_0^2, \dots, \hat{\xi}_N^2, \dots, \hat{\xi}_0^M, \dots, \hat{\xi}_N^M$.

Однак, у багатьох випадках інформація про розподіл невідомих випадкових факторів і параметрів розв’язуваної стохастичної задачі ОРМ виявляється відсутньою.

Клас задач оптимального розбиття множин, який пов’язаний з необхідністю врахування чинників невизначеності, що мають не ймовірнісно-статистичну природу, відносять до нечітких задач оптимального розбиття множин.

Це задачі ОРМ, в яких або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, недовизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі (наприклад, функцій попиту та вартості транспортування одиниці продукції в нескінченновимірних транспортних задачах), або ж нечітко сформульовані самі критерії та (або) системи обмежень, або на модель оптимізації впливають зовнішні неконтрольовані збурення різного роду та ін.

Такі моделі будемо називати нечіткими задачами ОРМ. Для розкриття невизначеності в таких задачах (тобто для формалізації невизначеної інформації) буде застосовуватися апарат теорії нечітких множин, який базується на понятті нечіткої множини, введеного Л. А. Заде [193], а також апарат нечіткої логіки.

Одним з наукових напрямів, у якому застосовують теорію нечітких множин та інші інтелектуальні технології, є обчислювальний інтелект (або м'які обчислення).

Обчислювальний інтелект дозволяє об'єднати у єдину нейронечітку технологію управління невизначеністю та оптимізацію, що значно розширює можливості інтелектуальних систем опрацювання інформації.

У наступному пункту охарактеризуємо парадигми обчислювального інтелекту.

1.3 Парадигми обчислюваного інтелекту

З часу появи перших робіт в області штучного інтелекту пройшло більше ніж 50 років. За минулі роки ця галузь науки пройшла складний шлях розвитку. У ній сформувався ряд напрямків, таких, як системи, засновані на знаннях, логічне виведення, пошук рішень, системи розпізнавання образів, системи машинного перекладу, навчання і самонавчання планування дій, агенти і мультиагентні системи, самоорганізація, нейронні мережі, системи з нечіткою логікою та нечіткі нейронні мережі, моделювання емоцій і психіки, інтелектуальні ігри, роботи і робототехнічні системи. В монографії С.Рассела і П.Норвига [83], а також Ф. Люгера [64] надається фундаментальний виклад основних напрямків штучного інтелекту. Цій проблемі було присвячено багато робіт, серед яких необхідно виділити монографію Д.Хокинса і С.Блейкли [99],

В ході розвитку робіт в області штучного інтелекту на початку 90-х рр. XX ст. шляхом інтеграції ряду інтелектуальних технологій і методів сформувався новий напрям, що отримав назву обчислювальний інтелект (computational intelligence).

Існує декілька визначень терміну обчислювальний інтелект. Вперше термін «обчислювальний інтелект» був введений Дж.Бездеком [111], який визначив його наступним чином: «система є інтелектуальною обчислювальною, якщо вона: оперує тільки з цифровими даними; має компоненти розпізнавання образів; не використовує знання в сенсі штучного інтелекту і до того ж коли вона проявляє: а) обчислювальну адаптивність; б) обчислювальну відмовостійкість; в) рівень помилок, що апроксимують характеристики людини».

Надалі, це визначення уточнювалося і розширювалося. Так, Д.Фогель та Р.Маркс у визначенні обчислювального інтелекту роблять акцент на його складові технології: нейронні мережі, генетичні алгоритми, нечіткі системи, еволюційне програмування і штучне життя, які є будівельними блоками обчислювального інтелекту [123, 170].

Більш широке визначення обчислювального інтелекту надають М.Згуровський та Ю.Зайченко: «Під обчислювальним інтелектом будемо розуміти сукупність технологій, моделей, методів і програмних засобів, призначених для вирішення неформальних, творчих завдань в різних сферах людської діяльності з використанням апарату і логіки, які певною мірою ототожнюють розумову діяльність людини (нечіткість міркувань, якісний і інтуїтивний підходи, креативність, логічне виведення, самонавчання та ін.) зокрема прийнятті рішень, класифікації, розпізнаванні образів та ін.» [13, 196].

Структура напрямків і методів обчислювального інтелекту за цим визначенням приведена на рис.1.5.



Рис. 1.5 Структура обчислювального інтелекту (джерело [12])

У структурі обчислювального інтелекту можна виділити наступні компоненти (рис. 1.5): технології; моделі, методи і алгоритми; прикладні задачі.

Технології обчислювального інтелекту включають: нейронні мережі; системи нечіткої логіки і нечіткі нейромережі; еволюційне моделювання.

До методів і алгоритмів обчислювального інтелекту можна віднести: методи навчання; методи самонавчання; методи самоорганізації; генетичні алгоритми; ройові алгоритми; мурашині алгоритми. Системна характеристика парадигм обчислювального інтелекту представлена у роботі [180].

Технології та методи обчислювального інтелекту використовуються при розв'язанні відповідних задач штучного інтелекту [102, 106, 180]. Логічно виділити наступні основні класи задач обчислювального інтелекту, характерні для розумової діяльності людини: прогнозування і передбачення; класифікація і розпізнавання образів; кластеризація, інтуїтивне розбиття множини об'єктів на класи однорідних об'єктів; інтелектуальний аналіз даних; логічне виведення; прийняття рішень.

У багатьох працях [117, 118, 128] науковці відзначають, що найсуттєвішим досягненням обчислювального інтелекту є створення способу опису систем, що поєднує число й слово, сигнал й поняття, сприйняття й абстракцію, неперервне й дискретне. Саме такий спосіб опису потрібен для складних систем і об'єктів, які не піддаються точному і повному опису. Обчислювальний інтелект відносять до безперечних перспектив розвитку штучного інтелекту в ХХІ столітті [128].

Термін обчислювального інтелекту близький за своїм значенням до терміну «soft computing» (тобто «м'які» обчислення), який широко використовується в зарубіжній літературі. Засновник теорії нечітких множин і автор інтегруючого (зонтичного) терміну «soft computing» Л.Заде так сформулював принцип невизначеності для міркувань людини: «У міру зростання складності системи наша здатність формулювати точні, змістовні твердження про її поведінку зменшуються аж до деякого порогу, за яким точність і зміст стають взаємовиключними» [195]. За визначенням Л.Заде «м'які» обчислення – це складна комп'ютерна методологія, заснована на нечіткій логіці, генетичних обчисленнях, нейрокомп'ютерингу і ймовірнісних обчисленнях, причому складові частини не конкурують, але створюють ефект синергізму [192].

Досвід останніх років показав, що застосування в інформатиці однорідних методів, тобто методів, що відповідають одній науковій парадигмі, для вирішення складних завдань і проблем далеко не завжди приводить до успіху. У гібридній архітектурі, яка об'єднує кілька парадигм, ефективність одного підходу

може компенсувати слабкість іншого [180]. Комбінуючи різні підходи, можна обійти недоліки, властиві кожному з них окремо.

Тому однією з провідних тенденцій в сучасній інформатиці став розвиток інтегрованих, гібридних і синергетичних систем [179]. Подібні системи складаються з різних елементів (компонентів), об'єднаних в інтересах досягнення поставлених цілей. Інтеграція і гібридизація різних методів і технологій дозволяє вирішувати складні завдання, які неможливо вирішити на основі будь-яких окремих методів або технологій. Інтегрованість як фундаментальне властивість складної системи, будучи тісно пов'язаним з її цілісністю, передбачає не просто об'єднання, а й взаємну адаптацію і спільну еволюцію її компонентів, що забезпечує появу нових якостей, не властивих її компонентам [67].

Гібридну систему визначають як систему, що складається з двох або більше інтегрованих різнорідних підсистем, об'єднаних спільною метою або спільними діями (хоча ці підсистеми можуть мати різну природу і різні мови опису) [169, 173]. В інформатиці гібридними називають такі системи, в яких використовуються дві або більше різних комп'ютерних технологій. М'які гібридні системи, створювані на основі парадигм обчислювального інтелекту, зазвичай включають нечіткі моделі, нейронні мережі, еволюційні і генетичні алгоритми [67, 195, 198].

Дослідники обчислювального інтелекту відзначають, що розпочався якісно новий, фундаментальний процес інтеграції різних напрямків інформатики та штучного інтелекту, який визначає новий етап розвитку гібридних інтелектуальних систем [185]. Зокрема, мова йде про інтеграцію символічного і нейробиологічного напрямків у штучному інтелекті, об'єднанні неперервних і дискретних моделей, комбінованих моделях образного і вербального мислення та ін. Сьогодні це верхній рівень інтеграції. В якості основи таких гібридних інтелектуальних систем можуть виступати: експертні системи, нечіткі системи, нейронні мережі, генетичні алгоритми. Прикладами можуть служити нейро-

нечіткі моделі і «м'які обчислення» Л. Заде [132, 192, 197]. Дуже багато праць, в основному західних дослідників, спрямовані на розробку гібридних систем. В даний час існують в більшості своїй нейро-нечіткі системи [67, 132, 192].

Огляд праць з обчислювального інтелекту надає можливість зробити висновок, що апарат гібридних інтелектуальних систем і технологій являє собою потужний засіб вирішення складних і важко формалізованих завдань. Хорошими прикладами реалізації синергетичного підходу в інформатиці можуть служити різноманітні нейронечіткі моделі, що розроблені у різних напрямках науки і технологій [105, 116, 126, 127, 131, 189, 190].

Таким чином, інтеграція двох технологій: нейронних мереж і систем з нечіткою логікою дозволила створити нову гібридну технологію обчислювального інтелекту - нечіткі нейронні мережі, що дозволяють використовувати переваги обох технологій. Тому у дисертаційній роботі для формалізації нечіткості при розробці нових методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ пропонується застосувати методи обчислювального інтелекту, а саме теорію нечітких множин та нейронні мережі.

1.4 Висновки до розділу 1

Виконано огляд і аналіз досліджень з питань розв'язання задач ОРМ та визначено напрямки подальшого розвитку теорії ОРМ, які пов'язані з розробкою методів і алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ.

Наведено структуру теорії оптимального розбиття множин з n -вимірного евклідового простору E_n , яка сформувалася до теперішнього часу, а також приклади застосування методів і алгоритмів теорії оптимального розбиття множин до розв'язання деяких теоретичних і практичних задач оптимізації, що зводяться до неперервних моделей оптимального розбиття множин.

Розглянуті неперервні задачі оптимального розбиття множин з евклідового простору E_n в умовах невизначеності. Сформульовані в підрозділі 1.1 моделі оптимального розбиття множин строго математично формалізовані. Це так звані детерміновані задачі нескінченновимірною математичного програмування. Однак реальні ситуації, для яких створюються ці моделі оптимального розбиття множин, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних моделях розбиття множин знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, істотних для наслідків від прийнятих рішень.

Клас задач ОРМ, який пов'язаний з необхідністю врахування чинників невизначеності, що мають не ймовірносно-статистичну природу, відносять до нечітких задач ОРМ. Актуальним залишається дослідження задач ОРМ, в яких або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, недовизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі, або ж нечітко сформульовані самі критерії та (або) системи обмежень, або на модель оптимізації впливають зовнішні неконтрольовані збурення різного роду та ін.

На основі формулювання загальної постановки задач ОРМ наведено їх класифікацію та визначені напрямки подальшого розвитку теорії ОРМ, які пов'язані з подальшим розвитком теорії оптимального розбиття у напрямку розробки методів і алгоритмів розв'язання нового класу задач - нечітких задач ОРМ.

Обґрунтовано застосування парадигм обчислювального інтелекту, а саме теорії нечітких множин та нейронних мереж, для формалізації нечіткості при розробці нових методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ.

Розділ 2. МАТЕМАТИЧНІ ПОСТАНОВКИ НЕЧІТКИХ ЗАДАЧ ОРМ ТА ОСНОВНІ ПІДХОДИ ЩОДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ

2.1 Класифікація та математичні постановки нечітких задач ОРМ

Інтенсивний розвиток досліджень в області теорії нечітких множин за останні роки призвів до появи нового класу задач – задач нечіткої оптимізації, нечіткого математичного програмування [60, 105, 169]. Задачі класичної «чіткої» оптимізації відносять до класу задач нечіткої оптимізації (або нечітких задач оптимізації), якщо хоча б один її елемент є невизначеним та ця невизначеність не може бути описана за допомогою теоретико-ймовірнісних характеристик. Таким невизначеним елементом може бути будь-який елемент задачі оптимізації, наприклад, цільова функція або обмежуюча функція, або такий параметр, який входить у вираз будь-якої з цих функцій. Причому, серед таких невизначених елементів, зазвичай, не розглядають елементи, які підлягають оптимізації [14, 127].

Аналогічно задачам нечіткої оптимізації до нечітких задач оптимального розбиття множин будемо відносити задачі оптимального розбиття з нечітко описаними параметрами цільового функціоналу та (або) з нечітко описаними параметрами функцій, що визначають обмеження. Такі задачі більш адекватні реальності, ніж детерміновані задачі оптимального розбиття.

Ще одним класом нечітких задач оптимального розбиття є задачі, у яких нечіткими є елементи, які підлягають оптимізації: це підмножини, на які розбивається задана множина. Постановки таких нечітких задач ОРМ виникають тоді, коли вимоги заходження однозначного (чіткого) розбиття елементів множини Ω з E_n може виявитися досить грубим і жорстким для розв'язання

задачі з недостатньо або слабоструктурованою вхідною інформацією, тобто задач, у яких невизначеність має нечітко-можливісну структуру. Послаблення цієї вимоги забезпечується за рахунок уведення до розгляду нечітких підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, множини Ω та відповідних їм функцій належності, які приймають значення з відрізка $[0,1]$.

Таким чином, будемо досліджувати у роботі два типи нечітких задач ОРМ в залежності від того, де серед елементів задачі наявна нечіткість, див. рис. 2.1.

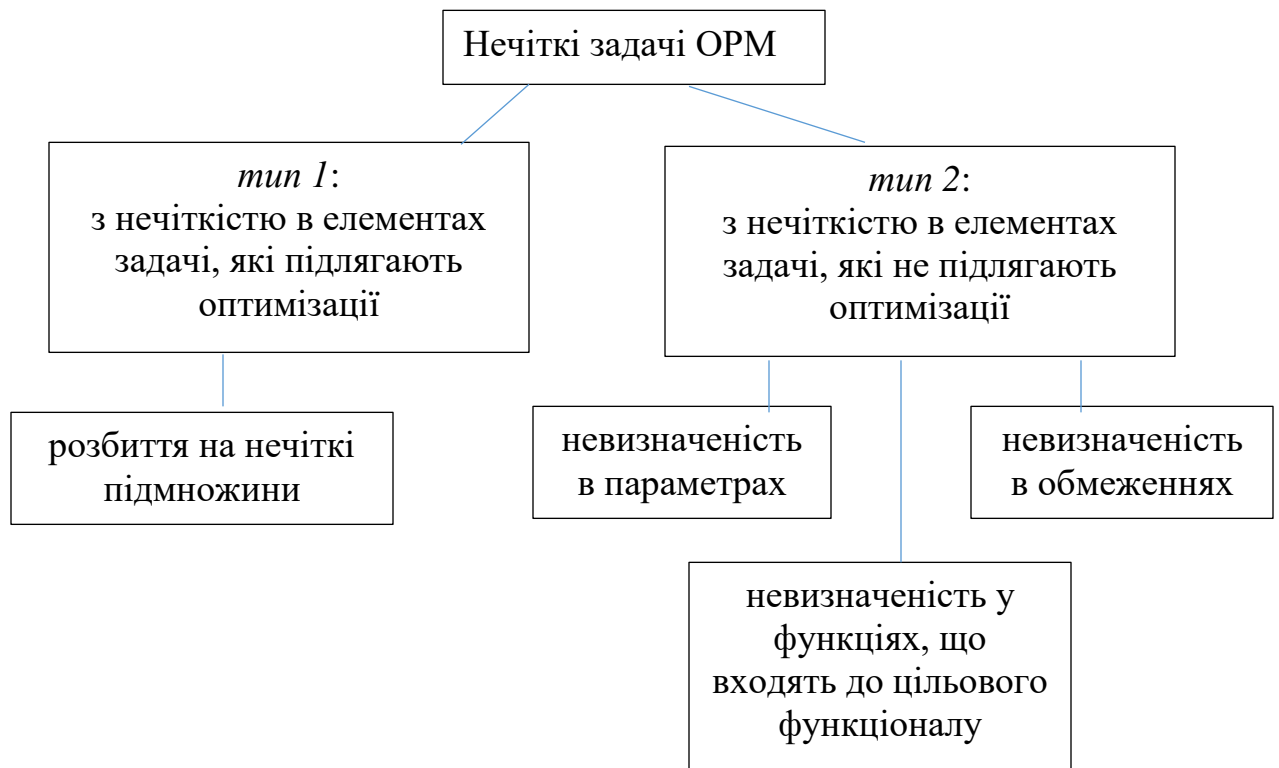


Рис. 2.1 Класифікація нечітких задач ОРМ

Для формальної математичної постановки нечітких задач оптимального розбиття будемо послуговуватися основними поняттями теорії нечітких множин з джерел [69, 198] та додатковими означеннями 2.1 та 2.2, які вперше були сформульовані у роботі [39] на основі означення 1.1 чіткого розбиття чіткої множини.

Означення 2.1. [39] Нечітким розбиттям чіткої множини Ω з E_n , де Ω - обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина, назвемо систему нечітких підмножин $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = 1, \dots, N\}$, для яких виконуються умови:

1) $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\forall i = 1, \dots, N$, де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$, $\mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega$, тобто це чітка множина Ω , що розглядається як окремий випадок нечіткої множини;

$$2) \sum_{k=1}^n \mu_{\Omega_i}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k, \quad \forall i \neq k, i, k = 1, \dots, N, \quad \text{де } h_C = \sup_{x \in \Omega} \mu_C(x) - \text{висота}$$

нечіткої множини C ; $\mu_C(x)$ функція належності: $\mu_C : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

В даному означенні умови 1) – 3) є нечітким аналогом відповідних умов для означення 1 чіткого розбиття множини. Відзначимо, що умова 2) в термінах нескінченновимірної транспортної задачі може розумітися як вимога того, щоб всі потреби кожного споживача були повністю і без надлишків задоволені за рахунок одного або декількох виробників в нечіткому варіанті задачі, на відміну від одного виробника – в чіткому варіанті.

Зауваження. В означенні 2.1 символом « Ω » позначена чітка множина, символом « Ω » позначена нечітка множина з функцією належності $\mu_\Omega(x)$. Символами « Ω_i » позначені чіткі підмножини, символами « Ω_i » - нечіткі підмножини з функціями належності $\mu_{\Omega_i}(x)$. Надалі для спрощення запису позначатимемо $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$.

Проаналізуємо означення 2.1.

Лема 2.1. В означенні 2.1 умова 3 є наслідком умов 1 і 2.

Доведення. Нехай для деякої системи нечітких множин $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = \overline{1, n}\}$ виконується

$$\sum_{k=1}^n \mu_{\Omega_i}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (*). \quad (2.1)$$

Покажемо, що для цієї системи виконано
 $h_C < 1$, $C = \Omega_i \cap \Omega_k, \forall i \neq k, i, k = \overline{1, n}$.

Виходячи з означення висоти нечіткої множини, а також властивостей функції приналежності, маємо: $h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) \leq 1$. Припустимо супротивне:

нехай $\exists i, k : i \neq k : h_C = 1, C = \Omega_i \cap \Omega_k$. Припустимо далі, що

$h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) = \max_{x \in \Omega} (\mu_C(x))$. Позначимо \bar{x} точку, в якій досягається останній

максимум $1 = h_C = \mu_C(\bar{x})$.

Оскільки $C = \Omega_i \cap \Omega_k$, то

$$1 = \mu_C(\bar{x}) = \min\{\mu_i(\bar{x}), \mu_k(\bar{x})\} \quad (2.2).$$

Виходячи з того, що $\mu_i(\bar{x}) \leq 1, \mu_k(\bar{x}) \leq 1$ і (2.2), маємо: $\mu_i(\bar{x}) = 1, \mu_k(\bar{x}) = 1$.

Запишемо суму (2.1) для $\bar{x} \in X$:

$$\mu_1(\bar{x}) + \dots + \mu_i(\bar{x}) + \dots + \mu_k(\bar{x}) + \dots + \mu_n(\bar{x}) \geq 2, \text{ що суперечить (2.1).}$$

Лема доведена.

Відповідно до леми 2.1 означення 2.1 еквівалентно наступному.

Означення 2.2. Нечітким розбиттям чіткої множини Ω з E_n , де Ω - обмежена, вимірنا за Лебегом множина, назвемо систему нечітких підмножин

$\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, n}\}$, де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x)), \mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega$, для яких

виконується умова: $\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \forall x \in \Omega$.

Нечітким покриттям чіткої множини Ω з E_n назвемо сукупність нечітких

підмножин множини Ω , якщо $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$.

Позначимо через \mathfrak{R}_Ω^N клас всіх можливих нечітких розбиттів чіткої множини Ω на N нечітких підмножин:

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \sum_{k=1}^N \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega\}.$$

Зауважимо, що клас чітких можливих розбиттів Σ_Ω^N з 1-го розділу є підкласом класу \mathfrak{R}_Ω^N . У свою чергу, оскільки елемент множини \mathfrak{R}_Ω^N представляє собою сукупність підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, кожне з яких належить Ω , то нечітка множина \mathfrak{R}_Ω^N є нечіткою підмножиною множини $X = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N$.

Перейдемо до опису формальних постановок нечітких задач ОРМ.

Введемо на множині можливих нечітких розбиттів \mathfrak{R}_Ω^N цільовий функціонал ($F = \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1$) у виді

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \tau) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx, \quad (2.3)$$

де, як і в чіткій задачі 1.1, функції $c(x, \tau_i)$ - задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x для будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ - задана обмежена, вимірна на Ω , невід'ємна функція; a_1, \dots, a_N - задані невід'ємні числа.

На відміну від чіткої задачі 1.1, тут, по-перше, $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, - нечіткі підмножини множини Ω із заданими координатами типових представників (центрів) τ_i , причому кожний центр τ_i належить Ω ; по-друге, міра множини межових точок $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, не обов'язково дорівнює нулю.

Тоді нечітким аналогом одного із типів задачі 1.1 буде наступна нечітка задача оптимального розбиття.

Задача 2.1. Знайти таке розбиття чіткої множини Ω на N нечітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні), які задовольняють умовам

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1, i \neq j, i, j = 1, \dots, N,$$

та в деякому сенсі «мінімізують» цільовий функціонал (2.3).

Тут під «мінімізацією» можна розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому розумінні найкраще нечітке значення цільового функціонала. Якщо особа, яка приймає рішення (ОПР), не сприймає нечіткого опису розв'язку задачі, то під «мінімізацією» цільового функціоналу слід розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або множини альтернатив. Раціональність при цьому розуміється в тому сенсі, що при виборі конкретної альтернативи ОПР має виходити з необхідності компромісу між бажанням отримати по можливості менше значення цільового функціоналу і бажанням вибрати по можливості більш доступну альтернативу (тобто, бажанням отримати якомога більше значення функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив).

Якщо провести аналогію з класифікацією задач нечіткого математичного програмування [68], то сформульовану задачу 2.1 можна віднести до оптимізації заданого звичайного функціоналу $F: \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ на заданій нечіткій множині допустимих розв'язків (альтернатив)

$$\mathfrak{R}_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \mu_{\mathfrak{R}_{\Omega}^N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \Omega_i \in \Omega, i=1, \dots, N\},$$

що визначається функцією належності $\mu_{\mathfrak{R}_{\Omega}^N} : \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ та має для задачі 2.1 вид (2.3).

У свою чергу, елемент множини \mathfrak{R}_{Ω}^N допустимих альтернатив – нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ - це сукупність нечітких підмножин $\Omega_i, i=1, \dots, N$, складених з точок, що належать множині Ω . Як відомо, кожна нечітка множина Ω_i (як сукупність точок x з Ω) визначається своєю функцією належності $\mu_i(x)$, тобто $\mu_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$, при цьому значення $\mu_i(x) = 1$ для $x \in \Omega$ означає, що елемент

$x \in \Omega$ цілком певно належить нечіткій множині Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 1$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i , а значення $\mu_i(x) = 0$ означає, що елемент x цілком певно не належить до нечіткої множини Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 0$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i . Якщо $0 < \mu_i(x) < 1$, то це означає, що елемент x належить до нечіткої множини Ω_i із ступенем належності $\mu_i(x)$, причому точки x , для яких $0 < \mu_i(x) < 1$, складатимуть межу нечіткої підмножини Ω_i .

Це означає, що для того, щоб мати змогу ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ множини Ω , треба знайти вектор-функцію належностей виду:

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad x \in \Omega. \quad (2.4)$$

Таким чином, нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ повністю визначається своєю вектор-функцією належності виду (2.4).

Також відомо, що характеристична функція $\lambda_{\Omega_i}(\cdot)$ чіткої множини є частинним випадком функції належності $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$. Тоді поняття нечіткої множини Ω_i можна розглядати як узагальнення поняття «звичайної множини» Ω_i , а в свою чергу, чітка множина Ω_i - частинний випадок (звуження) відповідного поняття «нечітка множина» Ω_i .

Перепишемо задачу 2.1 в термінах функцій належності $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$ таким чином:

Задача 2.2. (нечіткого розбиття множини Ω без обмежень з фіксованими центрами підмножин).

Знайти вектор-функцію $\mu^*(\cdot) = (\mu_{\Omega_1}(\cdot), \dots, \mu_{\Omega_N}(\cdot)) \in \Gamma$ таку, що

$$I(\mu^*(\cdot)) = \min_{\mu(\cdot) \in \Gamma} I(\mu(\cdot)),$$

де

$$I(\mu(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\mu_i(x))^m (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma = \{ \mu^*(\cdot) = (\mu_{\Omega_1}(\cdot), \dots, \mu_{\Omega_N}(\cdot)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, i = 1, \dots, N, x \in \Omega\},$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ - заданий вектор з Ω^N ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$; a_1, \dots, a_N - задані невід'ємні числа; m - параметр, що називається експоненціальною вагою [62].

Тут у якості позначення «*min*» розуміється, що $\mu^*(\cdot)$ у деякому сенсі «мінімізує» цільовий функціонал $I(\mu(\cdot))$. У подальшому пояснимо це позначення більш детально.

Вимога в умові (2.5) виконання рівності у сумі обумовлена тим, що нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ має «покривати» звичайне чітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$, яке є, у той же час, елементом множини допустимих розв'язки, для яких значення функцій належності кожного елемента дорівнюють 1.

Зауважимо, якщо необхідно виключити появу порожніх підмножин у шуканому нечіткому розбитті, то до обмежень задачі 2.2 слід додати умову

$$\int_{\Omega} \mu_{\Omega_i}(x) dx > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Зауважимо також, що в задачі 2.2 умовою

$$\sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

Ураховується той факт, $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1$ і тому задача 2.2 – це задача нечіткого розбиття, якщо ж не вимагати виконання умови $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1$, то ми прийдемо до задачі нечіткого покриття.

Аналогічно викладеному вище можуть бути розширені постановки задачі 1.1 (нечіткі задачі). Сформулюємо деякі з них.

Задача 2.3. (нечіткого розбиття множини Ω без обмежень з відшукуванням оптимальних координат центрів підмножин). Знайти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx$$

де

$$\Gamma = \{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega \},$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Задача 2.4. (нечіткого розбиття множини Ω при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей з відшукуванням оптимальних координат центрів підмножин). Знайти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx$$

де

$$\Gamma_1 = \{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) \in \Gamma, \quad x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \mu_{\Omega_i}(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N \};$$

$$\Gamma = \{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega \},$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Якщо в задачі 2.4 будемо вважати τ заданим вектором з Ω^N , то прийдемо до задачі 2.3, яка є розширенням на нечіткий випадок відповідної чіткої задачі.

Ще один клас нечітких задач ОРМ, що відповідає типу II за класифікацією з [68], виникає, якщо у відповідній чіткій задачі ОРМ «пом'якшити» функціональні обмеження, тобто допустити можливість їх порушення у тому чи іншому ступені. Підходи щодо розв'язання нечітких задач ОРМ у такій постановці були досліджені у роботі [150].

Крім того, замість мінімізації цільового функціонала можна прагнути до досягнення деякого заданого значення функціонала, причому, різним відхиленням значень $F(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ від цієї величини надавати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим менший ступінь його допустимості).

Наведемо один з можливих варіантів постановки нечітких задач ОРМ II типу (рис. 2.1). Такий варіант нечіткої постановки задач ОРМ може виникнути в разі, якщо в чіткої (жорсткої) моделі ОРЗ неможливо (або складно) врахувати в явному вигляді вплив деяких реальних факторів (нестатистичної невизначеності). Це можуть бути, наприклад, такі фактори, як коливання цін на бензин, стихійні явища природи, що впливають на вартість транспортування одиниці продукції, які входять в постановку нескінченновимірної завдання розміщення, або нестабільність політичної обстановки, що впливає на коливання попиту споживачів та ін.

Сформулюємо одну з таких задач ОРМ з нечітко описаними параметрами цільового функціоналу та (або) з нечітко описаними параметрами функцій, що визначають обмеження, яка більш адекватна реальності, ніж детермінована задача ОРМ.

Задача 2.5. (з нечітко описаними параметрами в цільовому функціоналі та обмеженнях). Знайти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma^N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \tilde{a}_i) \rho(x, \tilde{e}) dx$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x, \tilde{e}) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

де

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\};$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N - задані додатні числа.

Тут функції $c(x, \tau_i)$ - задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x для будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; $\rho(x, \tilde{e})$ - задана обмежена, вимірна на Ω для будь-якого фіксованого \tilde{e} з R^1 ; $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N, \tilde{e}$ - параметри, точне значення яких заздалегідь невідоме та може бути описано нечітко в формі нечітких множин за допомогою функцій належності або задано лінгвістично.

2.2 Підходи щодо формалізації нечіткості у задачах обчислювального інтелекту

У попередньому розділі сформульовані математичні постановки нечітких задач ОРМ, та, як було відзначено, елементами структури цих задач є такі, які невизначені, але не можуть бути описані теоретико-ймовірною. У роботі пропонується для формалізації нечіткості в елементах нечітких задач ОРМ застосувати методи обчислювального інтелекту, який є сучасним напрямом штучного інтелекту.

При розв'язанні задач обчислювального інтелекту особливо важливим є те, наскільки адекватною виявляється модель знанням про конкретну задачу, що є визначальним чинником ефективності інтелектуальної системи і, отже, меж її застосовуваності. Тому, необхідно відзначити, що при розробці інтелектуальних

систем знання про конкретну предметну область, для якої створюється система, не завжди бувають повними й абсолютно достовірними.

Нечіткість взагалі являє собою загальну властивість реального світу на відміну від суворої чіткості абстрактних побудов класичної математики. Властивість об'єктивної нечіткості реального світу необхідно доповнити ще й наявністю суб'єктивності оцінок різних явищ, які даються різними людьми. Навіть кількісні дані, отримані шляхом досить точних експериментів, мають статистичні оцінки ймовірності, значимості та ін. Також, поряд із кількісними характеристиками в базах знань інтелектуальних систем можуть бути присутні і якісні показники.

Зміст терміну «нечіткість знань» багатозначний та включає такі основні компоненти: неповнота, неточність, недостовірність, неоднозначність та ін. При обробці знань із застосуванням механізмів формальної логіки виникає протиріччя між нечіткими знаннями і чіткими методами логічного виведення. Розв'язати це протиріччя можна шляхом подолання нечіткості знань (коли це можливо) або використанням спеціальних методів подання й обробки нечітких знань.

Проблема створення апарату формалізованого опису нечіткої та якісної інформації для прийняття рішень в умовах невизначеності була вирішена Л. Заде, який ввів поняття нечіткої множини, лінгвістичної змінної та розробив апарат операцій над [193, 194]. Початком практичного застосування теорії нечітких множин та нечіткої логіки вважають 1975 рік, коли Е. Мамдані побудував перший нечіткий контролер [11]. Відтоді системи нечіткої логіки знаходять широке застосування в багатьох задачах обчислювального інтелекту. Їх широке поширення базується на теоремі FAT (Fuzzy Approximation Theorem) про універсальну апроксимації систем нечіткої логіки, відповідно до якої будь-яка математична система може бути апроксимована системою з нечіткою логікою [167, 185].

Вважається, що системи з нечіткою логікою застосовувати недоцільно, якщо необхідний результат може бути отриманий будь-яким іншим шляхом, або якщо для об'єкту або процесу вже знайдена адекватна і легко досліджувана математична модель. Системи з нечіткою логікою доцільно застосовувати для складних процесів, коли немає простої математичної моделі, а також якщо експертні знання про об'єкт або про процес можна сформулювати тільки в лінгвістичній формі.

Серед способів формалізації факторів невизначеності виділяють формалізацію неточності та формалізацію нечіткості [14].

Основним засобом формалізації неточності є інтервальний аналіз та наближені множини. Інтервальний аналіз - це дисципліна, яка спрямована на роботу з невизначеностями, представленими у вигляді числових інтервалів. Різноманітні варіації інтервальних методів використовувалися вченими для оцінки невідомих значень з часів Архімеда, який обчислював верхню і нижню межі числа π . В даний час інтервальне моделювання застосовується для розв'язування задач з різного виду невизначеностями поряд з ймовірнісним і нечітким моделюванням [88, 104]. Основна особливість інтервального підходу полягає в тому, що деяке невідоме число описується з використанням мінімальної кількості інформації - верхньої і нижньої межі інтервалу, в який це число потрапляє [88, 104].

Основні підходи щодо формалізації нечіткості можна систематизувати за допомогою таких критеріїв [10]:

а) загальний підхід до подання нечіткості (нечіткі множини, що описують функціями належності сімейства звичайних множин, ймовірнісні множини, двохосновні нечіткі множини та ін.);

б) область визначення функції належності (стандартні нечіткі множини, нечіткі множини α -рівня, нечіткі числа та ін.);

в) область значень функції належності (за цим критерієм виділяються $[0, 1]$ -нечіткі множини, $[-1, +1]$ - нечіткі множини, L -нечіткі множини, інтервальнозначні нечіткі множини, нечіткі множини з нечіткозначною функцією належності та ін.) ;

г) тип відповідності між областю визначення і областю значень функції належності (взаємнооднозначне, невзаємнооднозначне та ін.).

Нечітка логіка Л. Заде є прямим узагальненням класичної двозначної логіки. Таким чином, вона спирається на досить сильні припущення про природу належності. Головними з них є: а) припущення щодо повноти; б) припущення щодо розрізнення належності. Згідно припущенню щодо повноти будь-який елемент або належить, або не належить множині: третє виключено. Припущення щодо розрізнення означає, що будь-які два елементи множини розрізняються за шкалою належності. Теорія нечітких множин також представляє собою узагальнення та переосмислення найважливіших напрямків класичної математики: багатозначної логіки, теорії ймовірності, дискретної математики та ін.

Підхід до формалізації нечіткості та поняття нечіткої множини полягає в узагальненні поняття належності. В класичній теорії множин наявні декілька способів завдання множини, одним з них є завдання множини за допомогою характеристичної функції, особливістю якої є бінарний характер її значень. З точки зору характеристичної функції, нечіткі множини являють собою природне узагальнення звичайних множин, коли відмовляються від бінарного характеру цієї функції та передбачають, що вона може приймати будь-які значення з відрізка $[0,1]$. В теорії нечітких множин характеристичну функцію називають функцією належності, а її значення – ступенем належності елемента нечіткій множині.

Існує декілька різних типів функцій належності, однако найбільш часто використовуваними вважаються трикутна, трапецієподібна, гауссова та дзвонові

функції належності. Основною перевагою гауссової та дзвонової функцій належності є їх неперервна диференційованість на всій області визначення, недоліком - порушення умови розбиття одиниці [69]. Зазвичай нечіткі моделі показують найкращі результати, коли умова розбиття одиниці для вхідних нечітких множин виконується. У таких випадках застосовують асиметричні гаусові функції належності або узагальнені дзвоноподібні функції належності [69].

Нечіткі множини використовуються для формалізації різних видів невизначеностей в моделях реальних об'єктів і процесів [2, 69]. Нечіткі моделі виникли при спробі формалізувати процес міркування людини. Виявилось, що нечіткі моделі зручні тим, що при відсутності математичного опису досліджуваного об'єкта дозволяють формалізувати невідомі залежності у вигляді доступних для розуміння правил [3]. Основними елементами нечіткої моделі є її база правил, що має вигляд «IF-THEN» та лінгвістичні змінні у цих правилах. Найбільш відомі і широко поширені нечіткі моделі двох типів - Мамдані та Такагі-Сугено. Точність нечітких моделей Такагі-Сугено вище, ніж у моделей Мамдані. Однак модель Мамдані - зрозуміліша, і її параметри легко інтерпретуються. Тут відзначимо, що у роботі застосовуються модель Мамдані та узагальнені дзвонові функції належності.

Структурна і параметрична ідентифікація нечіткої моделі має на меті визначення її структури і всіх параметрів, до яких відносять кількість правил, кількість входів і виходів, типи і значення параметрів функцій належності, типи норм і конорм, метод дефазифікації для моделі Мамдані, вид функції у висновках правил для моделі Такагі-Сугено [2].

Структурна ідентифікація буде ефективною, якщо експертно-експериментальна інформація про об'єкт, що моделюється, є на повною та несуперечливою. Якщо це не так, для забезпечення адекватності нечіткої моделі необхідна параметрична ідентифікація, тобто настройка (оптимізація) її

параметрів. М.З. Згуровський відзначає, що проблема оптимізації стає однією з провідних у світі штучного інтелекту [196].

Можливістю параметричної ідентифікації з використанням експертно-експериментальна інформація про об'єкт, що моделюється, володіють нейронні мережі [97]. Тому, як було зазначено в пункті 1.3, застосовують гібридизацію нечітких моделей і нейронних мереж з метою поєднання їх переваг [109, 115].

Існують різні види синтезу нечітких моделей з нейронними мережами [3, 69]. Найбільш відомий вид - нейронечіткі системи. Нейронечітка система - це нечітка модель, яка може бути настроєна як нейронна мережа. Розрізняють дві структури нейронечітких систем: нечіткий перцептрон і ANFIS. Крім цього, в ряді робіт в окремий клас виділяють нейроструктурні моделі [12]. Клас нейроструктурних моделей містить математичні моделі, що складаються з пов'язаних між собою базових нейроподібних елементів та мають характерну суперпозиційну лінійно-нелінійну за параметрами структуру. До них можуть бути віднесені нейронні мережі прямого поширення, нейронні мережі з радіальними базисними функціями, імовірнісні нейронні мережі, нечіткі системи Такагі-Сугено, нейро-нечіткі моделі структури ANFIS та ін.

Таким чином, центральним етапом побудови нейроструктурних моделей є навчання - настройка (оптимізація) параметрів на основі експериментальної інформації про об'єкт моделювання. Відзначимо, що настройка параметрів нечіткої моделі усуває принципову слабкість теорії нечітких систем - суб'єктивність функцій належності.

Останнім часом для розв'язання задачі параметричної оптимізації широкого застосування набули генетичні алгоритми. Сьогодні терміном «генетичні алгоритми» називають не одну модель, а досить широкий клас алгоритмів, часом мало схожих один на одного [179]. Дослідники експериментують з різними типами представлення хромосом, операторами схрещування (кросовера) і мутації, різними підходами до відтворення і відбору.

Відзначимо, що головним недоліком генетичних алгоритмів, як і інших методів еволюційних обчислень, є те, що вони не гарантують знаходження глобального розв'язку за поліноміальний час. Не гарантують і того, що глобальний розв'язок буде знайдено, але для пошуку прийняттого (компромісного) розв'язку задачі генетичні алгоритми ефективні [67]. Якщо задача розв'язується спеціальними методами, то вони завжди ефективніше генетичних алгоритмів. Головною перевагою генетичних алгоритмів є те, що вони застосовуються в складних задачах, для розв'язання яких спеціальних методів може не існувати.

Ефективність застосування генетичних алгоритмів залежить від характеристик задачі оптимізації. Якщо простір пошуку в задачі гладкий і унімодальний, то будь-який градієнтний алгоритм буде ефективніше генетичного алгоритму. Якщо існує додаткова інформація про простір пошуку, то методи пошуку, що використовують евристики, часто перевершують генетичні алгоритми [67].

У дисертаційній роботі для розв'язання задач оптимізації, і не тільки оптимізації параметрів нечіткої моделі, застосовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації – різні варіанти r -алгоритму, розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора [90, 101, 181].

Далі наведемо коротку характеристику методів недиференційовної оптимізації, у тому числі і різні модифікації r -алгоритму, які застосовані у дисертаційній роботі.

Нехай задана опукла функція $f(x)$ з областю визначення $X \subseteq E_n$ і x – внутрішня точка X . Вектор $g(\bar{x})$, який задовольняє співвідношенню

$$(g(\bar{x}), x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall x \in X,$$

називається субградієнтом (узагальненим градієнтом) функції $f(x)$ у точці \bar{x} .

Нехай цільова функція $f(x)$ є такою, що можливе практичне обчислення субградієнта $g(x)$ у кожній точці $x \in E^n$. Тоді градієнтний алгоритм безпосередньо узагальнюється на недиференційовний випадок. Для цього достатньо за напрямком спуску взяти на кожному k -ому кроці вектор, протилежний субградієнту в точці $x^{(k)}$ (замість вектору антиградієнта у випадку диференційовної функції).

Розглянемо задачу знаходження мінімуму опуклої функції, яка не є скрізь диференційовною:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n$$

Нехай $x^{(0)}$ – початкова точка. Відповідно до методу узагальненого градієнтного спуску пошук точки мінімуму здійснюється згідно з таким рекурентним співвідношенням

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \frac{g(x^{(k)})}{\|g(x^{(k)})\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Алгоритм методу

Початковий етап. Вибрати $\varepsilon > 0$, як константу зупинки. Задати початкову точку $x^{(0)}$. Покласти $k = 0$ та перейти до основного етапу.

Основний етап

Крок 1. Знайти субградієнт $g(x^{(k)}) \in \partial f(x^{(k)})$. Якщо $g(x^{(k)}) = 0$, то зупинитися: точка $x^{(k)}$ є оптимальним розв'язком задачі. Інакше, перейти до кроку 2.

Крок 2. Знайти α_k . Прийняти

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \frac{g(x^{(k)})}{\|g(x^{(k)})\|}$$

і перейти до кроку 3.

Крок 3. Якщо $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$, то зупинитися, у протилежному випадку замінити k на $k + 1$ та перейти до кроку 1.

Якщо величину кроку α_k на k -тій ітерації вибирати з умови

$$\alpha_k \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty,$$

то процедура узагальненого градієнтного спуску дозволяє знайти мінімум цільової функції $f(x)$. Відзначимо, що розбіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ є природною

вимогою, бо у випадку $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ завжди можна було б вибрати таке далеке від x_*

початкове наближення $x^{(0)}$, при якому неможливо було б наблизитись до x_* при скільки завгодно великих k .

Наприклад, за α_k можна узяти $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$.

Основним фактором, який уповільнює збіжність градієнтних методів, є близькість до нуля косинуса кута між напрямком градієнта та напрямком на точку мінімуму. Якщо б ми змогли значно зменшити складову антиградієнта, яка ортогональна напрямку на точку мінімуму, залишаючи майже без зміни складову, яка паралельна цьому напрямку, то отриманий при цьому вектор давав би напрямок спуску кращий, ніж напрямок антиградієнта, і можна було б очікувати прискорення збіжності при відповідному регулюванні кроку. Ця ідея лежить в основі методів узагальненого градієнтного спуску з розтягом простору у напрямку градієнта (субградієнта). Опишемо загальний алгоритм методів.

Початковий етап. Задати початкове наближення $x^{(0)} \in E^n$ та початкову неособливу матрицю $B_0 = I$, покласти $k = 0$ та перейти до основного етапу.

Основний етап

Крок 1. Обчислити субградієнт $g(x^{(k)})$. Якщо $g(x^{(k)}) = 0$, то обчислення закінчуються: точка $x^{(k)}$ є точкою мінімуму.

Крок 2. Обчислити

$$\tilde{g}_k = B_k^T g(x^{(k)}).$$

Вектор \tilde{g}_k є субградієнтом функції $\varphi_k(y) = f(B_k y)$, яка виходить з функції $f(x)$ при застосуванні лінійного перетворення простору $y = A_k x$, де $A_k = B_k^{-1}$.

Визначити

$$\xi_k = \frac{\tilde{g}_k}{\|\tilde{g}_k\|}, \quad \alpha_k, \quad \lambda_k$$

де α_k – крок переміщення, λ_k – коефіцієнт розтягу простору на k -му кроці.

Визначити

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k B_k \xi_k = x^{(k)} - \alpha_k \frac{B_k B_k^T g(x^{(k)})}{\|B_k^T g(x^{(k)})\|},$$

$$B_{k+1} = B_k \cdot R_\mu(\xi_k), \quad \mu = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Крок 3. Якщо критерій зупинки обчислень виконано, то кінець. Інакше, $k = k + 1$ та перейти до кроку 1.

Існує стільки ж алгоритмів цього типу, скільки і способів вибору коефіцієнтів α_k , λ_k на кожній ітерації.

У методі розтягу простору в напрямку субградієнта у поточній точці

$$\lambda_k = \lambda > 1,$$

$$\alpha_k = \rho \frac{f(x^{(k)}) - m}{\|B_k^T g(x^{(k)})\|},$$

де ρ – коефіцієнт релаксації, який задовольняє умові $0 < \rho < 2$, m – наближення до оптимального значення цільової функції f_* .

Субградієнтні методи, в яких використовується розтяг простору у напрямку різниці двох послідовних градієнтів, отримали назву r -алгоритмів. Вибір крокового множника у r -алгоритмах пов'язаний з пошуком мінімуму функції за обраним напрямком. При певному регулюванні кроку та коефіцієнтів розтягу простору вони є монотонними за функцією, що мінімізується.

Розглянемо опис r -алгоритмів у B -формі для мінімізації опуклої функції $f(x)$, яка визначена на E_n . Будемо припускати, що функція $f(x)$ має обмежену область мінімумів X^* , так що $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Останнє забезпечує коректність регулювання кроку. r -алгоритмом називається процедура побудови послідовностей $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ за наступним правилом:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

де

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k),$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha^k} < 1.$$

Тут x_0 – початкове наближення, $B_0 = I_n$ – одинична $n \times n$ матриця, h_k – кроковий множник, α_k – коефіцієнт розтягу простору, $g_f(x_k)$, $g_f(x_{k+1})$ – довільні субградієнти функції $f(x)$ у точках x_k та x_{k+1} . Якщо $g_f(x_{k^*}) = 0$, то x_{k^*} – точка мінімуму функції $f(x)$, і процес зупиняється.

Незважаючи на те, що r -алгоритми використовуються вже більше 40 років, проблема обґрунтування їх збіжності для усього класу опуклих функцій залишається відкритою і в даний час [100].

Чудовою властивістю r -алгоритму є те, що його конкретні реалізації демонструють гарні результати при мінімізації яружних функцій. Одним з ефективних варіантів є варіант $r(\alpha)$ -алгоритму з постійним коефіцієнтом розтягу простору α та адаптивним способом регулювання кроку. У ньому h_k налаштовується у процесі виконання одновимірного спуску у напрямку нормованого антисубградієнта у перетвореному просторі змінних за допомогою параметрів h_0^0, q_1, q_2, n_h . Тут h_0^0 – величина початкового кроку (використовується на першій ітерації, на кожній наступній уточнюється); q_1 – коефіцієнт зменшення кроку ($q_1 \leq 1$), якщо умова завершення спуску за напрямком ($h_k^0 > h_k^*$) виконується лише за один крок одновимірного спуску; натуральне число n_h задає число кроків одновимірного спуску ($n_h > 1$), через кожні n_h кроків величина h_k^0 збільшується у q_2 разів, $q_2 \geq 1$ – коефіцієнт збільшення кроку.

Як показали численні обчислювальні експерименти та практичні розрахунки, у більшості випадків при $\alpha \in [2,3], m = 3$ та вказаному вище способі регулювання h кількість кроків за напрямком у середньому рідко перевищує 2, при цьому за n кроків r -алгоритму точність за функціоналом, як правило, покращується у 3-5 разів.

У випадку мінімізації гладкої функції для прискорення збіжності можна застосовувати більш витончені способи пошуку мінімуму за напрямком, наприклад, квадратичну апроксимацію за трьома точками, процес “золотого перерізу” та інші.

Існують модифіковані обчислювальні схеми узагальнених градієнтних методів з розтягом простору, що дозволяють суттєво скоротити кількість арифметичних операцій, пов’язаних з перетворенням простору [177]. Суть цих

схем, полягає в тому, що перетворення матриці B_k замінюється перетворенням симетричної матриці $H_k = B_k B_k^T$. Наведемо далі варіант r -алгоритма в H -формі.

0. Ініціалізація: обираємо x^0 – довільне початкове наближення точки мінімуму; обчислюємо субградієнт $g_f(x^0)$ функції $f(x)$ в точці x^0 ; задаємо $H_0 = I_n$ (одинична матриця) та параметри $\alpha > 1, \beta = \frac{1}{\alpha} < 1$.

$k = 0$.

1. Нехай на k -й ітерації x^k – поточна точка; $g_f(x^k)$ – довільний субградієнт функції $f(x)$ в точці x^k ; $\alpha_k = \alpha, \beta_k = \beta, \forall k$.

2. Визначаємо наступне наближення x^{k+1} за формулою

$$x^{k+1} = x^k - h_k \frac{H_k g_f(x^k)}{\sqrt{(H_k g_f(x^k), g_f(x^k))}},$$

де $h_k \geq 0$ – кроковий множник, що обирається з умови мінімуму функції у напрямку $p_k = -H_k g_f(x^k)$.

3. Обчислюємо $g_f(x^{k+1})$ – градієнт (або субградієнт) функції f у точці x^{k+1} . Нехай $r_k = g_f(x^{k+1}) - g_f(x^k)$.

4. Обчислюємо матрицю

$$H_{k+1} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{(H_k r_k, r_k)} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{r_k^T H_k r_k}.$$

5. Якщо хоча б один з критеріїв закінчення ітераційного процесу $\|g_f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ або $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$ виконаний, то процес обчислювань закінчується. Інакше $k := k + 1$ і перейти на крок 2.

Визначений таким чином алгоритм може бути застосований і до функцій, що не є всюди диференційовними, але в цьому випадку його поведінка може бути суттєво відмінною. Дійсно, напрям $-B_k B_k^T g_f(x^k)$ не обов'язково буде напрямком спуску. Якщо це станеться, то ми отримаємо $x^{k+1} = x^k$, і алгоритм вже не буде прогресувати. Існують модифікації, що спрямовані на виправлення цієї ситуації. За однією з них етап 2 алгоритму, замінюється наступною послідовністю кроків.

А. На k -й ітерації поточною точкою є x^k . Визначаємо x^{k+1} за формулою

$$x^{k+1} = x^k - h_k B_k B_k^T g_f(x^k),$$

де h_k обирається з умови мінімуму функції $f(x)$ в напрямку

$$p_k = -h_k B_k B_k^T g_f(x^k).$$

Якщо $h_k = 0$, то покладаємо:

$$x^{k+1} \leftarrow x^k,$$

$$x^k \leftarrow x^{k-1},$$

$$g_f(x^{k+1}) \leftarrow g_f(x^k),$$

$$g_f(x^k) \leftarrow g_f(x^{k-1}),$$

Переходимо на крок Б.

Якщо величина кроку $h_k \neq 0$, то визначаємо довільний субградієнт $g_f(x^{k+1})$ функції $f(x)$ в точці x^{k+1} і переходимо на крок Б.

Б. Покладаємо

$$\xi_k = \frac{r_k}{\|r_k\|} \text{ для } r_k = B_k^T [g_f(x^{k+1}) - g_f(x^k)]$$

і обчислюємо матрицю оператора розтягу простору

$$B_{k+1} = B_k R_\beta(\xi_k).$$

Таким чином, навіть якщо алгоритм залишається нерухомим в одній і тій же точці протягом декількох послідовних ітерацій, матриці B_k продовжують змінюватися (через розтяг простору в напрямку різниці двох послідовних різних субградієнтів), що дозволяє визначити на кожному кроці ітерації новий напрям можливого переміщення. Алгоритм деблокується, щойно знаходиться деякий напрямок спуску.

Перевага цього алгоритму перед методами субградієнта, описаними вище, полягає в тому, що послідовність значень $f(x^k)$, що породжується цим алгоритмом, є монотонно спадною.

Таким чином, у цьому підрозділі обґрунтовано застосування для формалізації нечіткості при розв'язанні нечітких задачах ОРМ такий інструментарій: узагальнені дзвонові функції належності, алгоритм нечіткого виведення Мамдані та методи недиференційовної оптимізації для настройки параметрів нечіткої моделі. У наступному пункті опишемо метод нейролінгвістичної ідентифікації, який застосовано у досліджуваних у роботі нечітких задачах ОРМ для відновлення у відповідній конкретній математичній моделі деяких її параметрів, які є неточними, невідомим або недовизначеними, та деяких її залежностей, для яких невідомий достовірний математичний опис.

2.3 Метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей

Побудова математичної моделі ідентифікації на основі нейронечітких технологій складається з двох етапів: побудови нечіткої моделі ідентифікації за наявними експертно-експериментальними даними і настройкою її параметрів з метою мінімізації відхилення між результатами моделювання та експериментальними даними.

У загальному випадку під нечіткої моделлю розуміється інформаційно-логічна модель об'єкта або системи, побудована на основі теорії нечітких множин і нечіткої логіки, і може включати в себе такі базові поняття цієї теорії, як функції належності, лінгвістичні змінні, операції над нечіткими множинами, нечіткі відношення, методи нечіткої імплікації, нечіткої композиції та ін.

Зауважимо, що основні поняття теорії нечітких множин та нечіткої логіки, необхідні для викладення матеріалу, наведені у роботах [29, 30], які були розроблені дисертантом у співавторстві з О.М. Кісельовою та С.В. Журавлем.

Перейдемо до опису методу нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей та розглянемо функціональну залежність виходу y від входів z_1, \dots, z_q об'єкта, що підлягає ідентифікації, у вигляді:

$$y = y(z_1, \dots, z_q), \quad (2.6)$$

тут z_1, \dots, z_q - фактори, що впливають на y , та можуть бути задані кількісно або якісно.

Для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів z_1, \dots, z_q , область зміни виходу y для (2.6), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (2.6) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об'єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності виду (2.6) розглядається як побудова моделі об'єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язки <входи> - <вихід> та вирішується, як правило, в два етапи [84]:

- структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО-ТО», що генеруються з експериментальних даних;

- параметрична ідентифікація (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

Перший етап методу нейролінгвістичній ідентифікації (структурна ідентифікація) - побудова нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом складається з наступних блоків: фазифікація, нечітке логічне виведення, дефазифікація.

У блоці фазифікації для знаходження залежності (2.6) у явному виді будемо розглядати вхідні змінні z_i , $i=1, \dots, q$, та вихідну змінну y як лінгвістичні змінні, для оцінки яких будемо використовувати терми з таких терм-множин [30]:

$D = \{D_l\}$ - терм-множина змінної y , де D_l - l -й лінгвістичний терм змінної y , $l=1, 2, \dots, L$, L - кількість різних класів виходу y ; для кожного класу D_l задамо його центр $d_l \in D_l$;

$V_i = \{V_{ir}\}$ - терм-множина змінної z_i , де V_{ir} - r -й лінгвістичний терм змінної z_i , $i=1, 2, \dots, q$; $r=1, 2, \dots, t$, t - кількість термів в терм-множині V_i лінгвістичної змінної z_i .

Значення лінгвістичних термів D_l и V_{ir} отримуємо на основі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється. Кожен терм, як нечітка множина, задамо його дзвоною функцією належності у вигляді (2.9), наведеному нижче.

Побудована нечітка база знань на основі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється, складається з продукційних правил $p_j^l(z_1, z_2, \dots, z_q)$ та використовується при виконанні блоку нечіткого логічного виведення (l - номер класу виходу y , $l=1, 2, \dots, L$, j - номер правила у l -у класі, $j=1, 2, \dots, s_l$, s_l - кількість правил у l -ом класі).

В результаті виконання блоку нечіткого логічного виведення отримаємо функцію належності $\mu_{D_l}(y)$ вихідної змінної y класу D_k для усіх $i=1,2,\dots,q$, $j=1,2,\dots,s_l$, $k=1,2,\dots,L$, у виді

$$\mu_{D_k}(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_l} p_j^l(z_1, z_2, \dots, z_q), & \text{if } \sum_{j=1}^{s_l} p_j^l(z_1, z_2, \dots, z_q) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$p_j^l(z_1, z_2, \dots, z_q) = v_j^l \prod_{i=1}^q \mu_{ij}^l(z_i), \quad (2.8)$$

$$\mu_{ij}^l(z_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z_i - b_{ij}^l}{c_{ij}^l} \right)^2}, \quad i=1,\dots,q, \quad j=1,\dots,s_l, \quad l=1,2,\dots,L, \quad (2.9)$$

де у формулах (2.7)-(2.9) v_j^l - вага j -го правила у l -у класі виходу; $\mu_{ij}^l(z_i)$ - дзвонова функція належності змінної z_i терму B_{ij} у l -у класі виходу y ; b_{ij}^l - координата максимуму, c_{ij}^l - коефіцієнт концентрації цієї функції належності; $j=1,2,\dots,s_l$, $l=1,2,\dots,L$.

Для отримання точного (чіткого) значення вихідної змінної застосуємо у блоці дефазифікації дискретний аналог методу центру тяжіння [69]:

$$y = \frac{\sum_{l=1}^L d_l \mu_{D_l}(y)}{\sum_{l=1}^L \mu_{D_l}(y)}. \quad (2.10)$$

Таким чином, ми побудували нечітку модель об'єкта (2.6) у вигляді співвідношень (2.7) - (2.10), яка, як уже зазначалося вище, грубо описує шукану залежність (2.6).

Опишемо другий етап методу нейролінгвістичній ідентифікації (параметрична ідентифікація, настройка параметрів нечіткої моделі).

Для постановки задачі оптимізації параметрів нечіткої моделі запишемо побудовану нечітку модель у вигляді

$$y = F(z, B, C, V), \quad (2.11)$$

тут $z = (z_1, \dots, z_q)$ – вхідний вектор, $V = \{v_j^l\}$, $j = 1, 2, \dots, s_l$, $l = 1, \dots, L$, набір вагових коефіцієнтів правил, $B = \{b_{ij}^l\}$, $C = \{c_{ij}^l\}$ – набори параметрів настройки функцій належності (2.9), $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, s_l$, $l = 1, \dots, L$; F – функція зв'язку входи-вихід, яка включає наведені вище перетворення.

Для розв'язання задачі оптимізації (2.11) будемо застосовувати метод мінімізації з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Н.З.Шора), описаний у попередньому пункті.

Сформулюємо задачу настройки нечіткої моделі в термінах математичного програмування: знайти вектор (B, C, V) , який забезпечує

$$\|F(z, B, C, V) - y_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, V}. \quad (2.12)$$

Позначимо вектор $\psi = (B, C, V)$, $\psi \in Q = \{Q_1 \times \dots \times Q_i \times \dots \times Q_q\}$, де $Q_i = [b_{\min_i}; b_{\max_i}] \times [0; +\infty] \times [0; 1]$, $i = 1, \dots, q$, та перепишемо задачу оптимізації (2.12) у виді

$$f(\psi) \rightarrow \min_{\psi \in Q}, \quad (2.13)$$

де $f(\psi) = \|y - y_{\text{exp}}\|$, y – результати, які розраховані за моделлю (2.10), y_{exp} – експериментальні дані. Тут норма $\|\cdot\|$ визначається як евклідова метрика

$$\|y - y_{\text{exp}}\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y_{\text{exp}}^{(m)})^2}, \quad (2.14)$$

де $y^{(m)}_{\text{exp}}$ – значення вихідної змінної y з m -ої пари експериментальної вибірки $\{z^{(m)}_{\text{exp}}, y^{(m)}_{\text{exp}}\}$, $m=1, \dots, M$, M – обсяг вибірки; $y^{(m)}$ – результати, розраховані за моделлю (2.7)-(2.10) для значень вхідних змінних $z = (z_1, \dots, z_q)$ з m -ої пари експериментальної вибірки.

Для розв'язання задачі оптимізації (2.13) будемо застосовувати r -алгоритм Н.З.Шора в H -формі [26], з ітераційною формулою у виді

$$\psi^{(k+1)} = P_Q \left[\psi^{(k)} - h_k \frac{H_k g_f(\psi^{(k)})}{\sqrt{(H_k g_f(\psi^{(k)}), g_f(\psi^{(k)}))}} \right], \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

де P_Q – оператор проектування на Q , $h_k \geq 0$ – кроковий множник; $g_f(\psi^{(k)})$ – субградієнт цільової функції $f(\psi)$ з (2.13) у точці $\psi = \psi^{(k)}$, який розраховується для $\forall l, i, j, m: l=1, \dots, L, i=1, \dots, q, j=1, \dots, s_l, m=1, \dots, M$, за такими формулами:

$$g_f(\psi^{(k)}) = (g_f^B(\psi^{(k)}), g_f^C(\psi^{(k)}), g_f^V(\psi^{(k)})), \quad (2.16)$$

$$g_f^{v_j^l}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot (y^{(k)} - y^{(k)}_{\text{exp}}) g_y^{v_j^l}(y^{(l)}),$$

$$g_f^{b_{ij}^l}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot \sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y^{(m)}_{\text{exp}}) g_y^{b_{ij}^l}(y^{(m)}),$$

$$g_f^{c_{ij}^l}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot \sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y^{(m)}_{\text{exp}}) g_y^{c_{ij}^l}(y^{(m)}),$$

$$g_y^{v_j^l}(y^{(l^*)}) = \frac{d_l^* g_{\mu_{D_k}}^{v_j^l}(y^{(l^*)}) \sum_{l=1}^L \mu_{D_k}(y^{(l^*)}) - g_{\mu_{D_l}}^{v_j^l}(y^{(l^*)}) \sum_{l=1}^L d_l \mu_{D_l}(y^{(l^*)})}{\left(\sum_{l=1}^L \mu_{D_l}(y^{(l^*)}) \right)^2},$$

$$\begin{aligned}
g_y^{b_{ij}^l} (y^{(m)}) &= \frac{\sum_{l=1}^L g_{\mu_{D_k}}^{b_{ij}^l} (y^{(m)}) d_l \sum_{l=1}^L \mu_{D_l} (y^{(m)}) - \sum_{l=1}^L g_{\mu_{D_l}}^{b_{ij}^l} (y^{(m)}) \sum_{l=1}^L d_l \mu_{D_l} (y^{(m)})}{\left(\sum_{l=1}^L \mu_{D_l} (y^{(m)}) \right)^2}, \\
g_y^{c_{ij}^l} (y^{(m)}) &= \frac{\sum_{l=1}^L g_{\mu_{D_l}}^{c_{ij}^l} (y^{(m)}) d_l \sum_{l=1}^L \mu_{D_l} (y^{(m)}) - \sum_{l=1}^L g_{\mu_{D_l}}^{c_{ij}^l} (y^{(m)}) \sum_{l=1}^L d_l \mu_{D_l} (y^{(m)})}{\left(\sum_{l=1}^L \mu_{D_l} (y^{(m)}) \right)^2}, \\
g_{\mu_{D_l}}^{v_j^l} (y^{(l)}) &= \prod_{i=1}^q \mu_{ij}^l (z_i^{(l)}), \\
g_{\mu_{D_l}}^{b_{i^*j^*}^l} (y^{(m)}) &= \sum_{j=1..s_l} v_j^l \prod_{\substack{i=1 \\ j^* \neq j}}^q \mu_{ij^*}^l (z_i^{(m)}) g_{\mu_{i^*j^*}^l}^{b_{i^*j^*}^l} (z_i^{(m)}), \\
g_{\mu_{D_l}}^{c_{i^*j^*}^l} (y^{(m)}) &= \sum_{j=1..s_l} v_j^l \prod_{\substack{i=1 \\ j^* \neq j}}^q \mu_{ij^*}^l (z_i^{(m)}) g_{\mu_{i^*j^*}^l}^{c_{i^*j^*}^l} (z_i^{(m)}), \\
g_{\mu_{i^*j^*}^l}^{b_{i^*j^*}^l} (z_i^{(m)}) &= \frac{2 \cdot \left(c_{i^*j^*}^l \right)^2 (z_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^l)}{\left(\left(c_{i^*j^*}^l \right)^2 + \left(z_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^l \right)^2 \right)^2}, \\
g_{\mu_{i^*j^*}^l}^{c_{i^*j^*}^l} (z_i^{(m)}) &= \frac{2 \cdot c_{i^*j^*}^l (z_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^l)^2}{\left(\left(c_{i^*j^*}^l \right)^2 + \left(z_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^l \right)^2 \right)^2}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що r -алгоритм є методом розв'язання задач безумовної оптимізації. В залежності від вигляду функцій належності термів для нечітких змінних моделі при використанні r -алгоритму необхідно ввести до цільового функціоналу негладкі штрафи та врахувати їх при розрахунку його градієнту.

У даній задачі обмеження для параметра B , що наведені вище, додаються до цільового функціоналу у вигляді негладкої штрафної функції

$-S \cdot \sum_{i=1}^q \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{s_l} \left(\max\left(0, b_{\min_i} - b_{ij}^l\right) + \max\left(0, b_{ij}^l - b_{\max_i}\right) \right)$, обмеження для параметра

C - у вигляді негладкої штрафної функції $-S \cdot \sum_{i=1}^q \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{s_l} \max\left(0, -c_{ij}^l\right)$,

а для параметра V - у вигляді негладкої штрафної функції

$-S \cdot \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{s_l} \left(\max\left(0, -v_j^l\right) + \max\left(0, v_j^l - 1\right) \right)$, де S - велике додатне число (значно

більше максимального з множників Лагранжа для цільового функціоналу).

У результаті розв'язання задачі оптимізації (2.13) отримуємо вектор $\psi^* = (B^*, C^*, W^*)$, який надає мінімальне значення цільовій функції $f(\psi)$. Тобто, отримаємо такі значення $V^* = \{v_j^{*l}\}$ - для набору вагових коефіцієнтів правил (2.8) і наборів параметрів $B^* = \{b_{ij}^{*l}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{*l}\}$ функції належності (2.9), для яких відхилення вигляду (2.14) експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об'єкта (2.6), набуває мінімального значення.

Наведемо результуючу нейронечітку ідентифікацію залежності (2.6) у вигляді наступних співвідношень:

$$y = \frac{\sum_{l=1}^L d_l \mu_{D_l}^*(y)}{\sum_{l=1}^L \mu_{D_l}^*(y)}, \quad (2.18)$$

де

$$\mu_{D_l}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_l} p_j^{*l}(z_1, z_2, \dots, z_q), & \text{if } \sum_{j=1}^{s_l} p_j^{*l}(z_1, z_2, \dots, z_q) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$p^{*l}_j(z_1, z_2, \dots, z_q) = v^{*l}_j \prod_{i=1}^q \mu^{*l}_{ij}(z_i), \quad (2.20)$$

$$\mu^{*l}_{ij}(z_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z_i - b^{*l}_{ij}}{c^{*l}_{ij}} \right)^2}, \quad i=1, \dots, q, \quad j=1, \dots, s_l, \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (2.21)$$

У співвідношеннях (2.18)-(2.21) значення $\mu^{*l}_{ij}(z_i)$, $p^{*l}_j(z_1, z_2, \dots, z_q)$, $\mu^*_{D_k}(y)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $V^* = \{v^{*l}_j\}$, $B^* = \{b^{k*}_{ij}\}$, $C^* = \{c^{k*}_{ij}\}$, отриманих після настройки. Продемонструємо розроблений метод на модельній задачі.

Модельна задача. Нехай залежність, яка підлягає ідентифікації, представлена у вигляді

$$y = f(z_1, \dots, z_{10}).$$

У блоці фазифікація на основі існуючої експертно-експериментальної інформації про об'єкт ідентифікації задаємо для кожної змінної z_1 терм-множину з трьох термів *низький (Н)*, *середній (С)* та *високий (В)*. Для вихідної змінної y терм-множину з чотирьох термів, тобто чотирьох класів виходу: *низький (Н)*, *середній (С)*, *високий (В)* та *дуже високий (ДВ)*. Далі, на основі аналізу існуючої вибірки статистичних даних про об'єкт розміром у 21 реалізацію, сформуємо нечітку базу знань у вигляді лінгвістичних висловлювань типу: ЯКЩО $\langle x1 \text{ низький} \rangle$ І $\langle x2 \text{ середній} \rangle$ І $\langle x3 \text{ високий} \rangle$ І $\langle x4 \text{ високий} \rangle$ І $\langle x5 \text{ високий} \rangle$ І $\langle x6 \text{ високий} \rangle$ І $\langle x7 \text{ середній} \rangle$ І $\langle x8 \text{ середній} \rangle$ І $\langle x9 \text{ середній} \rangle$ І $\langle x10 \text{ середній} \rangle$ ТО $\langle y \text{ дуже високий} \rangle$. Сформована нечітка база знань представлена у табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Нечітка база знань

| № правила | $x1$ | $x2$ | $x3$ | $x4$ | $x5$ | $x6$ | $x7$ | $x8$ | $x9$ | $x10$ | y |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-----|
| 1 | Н | С | В | В | В | В | С | С | С | С | В |
| 2 | Н | Н | С | Н | С | В | Н | С | Н | С | В |
| 3 | С | Н | В | В | В | В | С | С | Н | В | С |
| 4 | Н | Н | В | Н | С | В | В | Н | Н | В | В |
| 5 | С | В | Н | В | С | В | В | Н | С | С | В |
| 6 | Н | Н | В | Н | Н | В | Н | Н | Н | Н | Н |
| 7 | В | В | Н | В | В | С | Н | Н | Н | Н | Н |
| 8 | Н | Н | В | Н | В | В | В | Н | Н | Н | Н |
| 9 | Н | Н | Н | Н | В | В | Н | В | С | В | С |
| 10 | Н | Н | В | В | Н | В | В | В | В | С | ДВ |
| 11 | Н | Н | В | Н | Н | В | В | Н | В | Н | Н |
| 12 | Н | Н | Н | Н | С | В | В | Н | Н | С | Н |
| 13 | Н | Н | Н | Н | С | С | В | Н | Н | Н | Н |
| 14 | Н | В | С | В | С | В | В | В | В | С | ДВ |
| 15 | С | В | Н | В | В | В | В | С | Н | Н | Н |
| 16 | Н | Н | С | Н | В | С | В | Н | Н | Н | Н |
| 17 | Н | Н | В | Н | С | В | Н | Н | Н | С | Н |
| 18 | Н | Н | Н | В | С | В | В | В | В | Н | ДВ |
| 19 | С | Н | Н | В | В | В | В | В | В | Н | С |
| 20 | Н | Н | В | В | С | В | В | Н | С | В | С |
| 21 | Н | Н | В | В | С | В | В | С | Н | В | С |

Представимо базу знань з табл. 2.1. у компактному вигляді, більш зручному для побудови нечіткої моделі, а саме: згрупуємо правила по класам виходу змінної y (табл. 2.2).

Функції належності $\mu_{D_l}(y)$, $l=1, \dots, 4$, (2.19) вихідної змінної y класу виходу D_l залежать від функцій належності вхідних змінних x_i (2.21) та їх вид визначається згортокою за правилами (2.20) на основі побудованої бази знань (табл. 2.2). Для прикладу наведемо розрахунок функції належності вихідної змінної y для класу D_4 :

$$\mu_{D_4}(y) = \min \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ v_{10} \cdot \mu_H(x_1) \cdot \mu_H(x_2) \cdot \mu_B(x_3) \cdot \mu_B(x_4) \cdot \mu_H(x_5) \cdot \mu_B(x_6) \cdot \mu_B(x_7) \cdot \mu_B(x_8) \cdot \\ \cdot \mu_B(x_9) \cdot \mu_C(x_{10}) + \\ v_{14} \cdot \mu_H(x_1) \cdot \mu_B(x_2) \cdot \mu_C(x_3) \cdot \mu_B(x_4) \cdot \mu_C(x_5) \cdot \mu_B(x_6) \cdot \mu_B(x_7) \cdot \mu_B(x_8) \cdot \\ \cdot \mu_B(x_9) \cdot \mu_C(x_{10}) + \\ v_{18} \cdot \mu_H(x_1) \cdot \mu_H(x_2) \cdot \mu_H(x_3) \cdot \mu_B(x_4) \cdot \mu_C(x_5) \cdot \mu_B(x_6) \cdot \mu_B(x_7) \cdot \mu_B(x_8) \cdot \\ \cdot \mu_B(x_9) \cdot \mu_H(x_{10}) \end{array} \right.$$

Таблиця 2.2. Компактний вигляд бази знань

| Клас вихідної змінної y | Номер правила | Номер комбінації значень в правилі, j | Входные переменные | | | | | | | | | |
|---------------------------|---------------|-----------------------------------------|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| | | | $x1$ | $x2$ | $x3$ | $x4$ | $x5$ | $x6$ | $x7$ | $x8$ | $x8$ | $x10$ |
| D_1 | 6 | 1 | H | H | B | H | H | B | H | H | H | H |
| | 7 | 2 | B | B | H | B | B | C | H | H | H | H |
| | 8 | 3 | H | H | B | H | B | B | B | H | H | H |
| | 11 | 4 | H | H | B | H | H | B | B | H | B | H |
| | 12 | 5 | H | H | H | H | C | B | B | H | H | C |
| | 13 | 6 | H | H | H | H | C | C | B | H | H | H |
| | 15 | 7 | C | B | H | B | B | B | B | C | H | H |
| | 16 | 8 | H | H | C | H | B | C | B | H | H | H |
| D_2 | 17 | 9 | H | H | B | H | C | B | H | H | H | C |
| | 3 | 1 | C | H | B | B | B | B | C | C | H | B |
| | 9 | 2 | H | H | H | H | B | B | H | B | C | B |
| | 19 | 3 | C | H | H | B | B | B | B | B | B | H |
| | 20 | 4 | H | H | B | B | C | B | B | H | C | B |
| D_3 | 21 | 5 | H | H | B | B | C | B | B | C | H | B |
| | 1 | 1 | H | C | B | B | B | B | C | C | C | C |
| | 2 | 2 | H | H | C | H | C | B | H | C | H | C |
| | 4 | 3 | H | H | B | H | C | B | B | H | H | B |
| D_4 | 5 | 4 | C | B | H | B | C | B | B | H | C | C |
| | 10 | 1 | H | H | B | B | H | B | B | B | B | C |
| | 14 | 2 | H | B | C | B | C | B | B | B | B | C |
| | 18 | 3 | H | H | H | B | C | B | B | B | B | H |

Визначення точного значення результуючої змінної на основі цих функцій належності виконується на основі операції дефазифікації за формулою (2.18), що реалізує представлення об'єкту (2.4) у явному вигляді:

Для комп'ютерної реалізації розробленого методу нейролінгвістичної ідентифікації було розроблено програмне забезпечення у середовищі Visual C++. Далі наведемо результати моделювання, що отримані за допомогою цього програмного забезпечення.

Якість побудованої моделі оцінюємо за значеннями абсолютного і відносного середньоквадратичного відхилення розрахованих за моделлю значень від експериментальних за формулою (2.14) (див. рис. 2.2).

| Значения среднеквадратичного отклонения | | |
|-----------------------------------------|-------------|---------------|
| | Абсолютное | Относительное |
| До настройки | 0.196272 | 0.0654241 |
| После настройки | 0.000276507 | 9.21691e-005 |

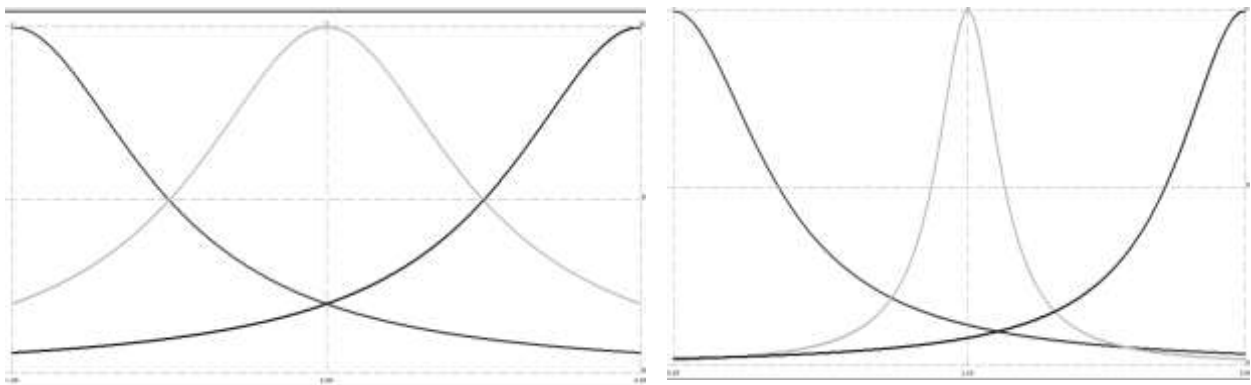
Рис. 2.2. Оцінка точності моделювання

У табл. 2.3 наведено значення параметрів v_m , $m=1, \dots, 21$ для кожного правила з бази знань до і після настройки та графіки функції належності вхідної змінної x_1 також до та після настройки (див. рис. 2.3).

Таблиця 2.3. Значення параметрів w до і після навчання

| № правила | w до настройки | w після настройки | № правила | w до настройки | w після настройки |
|-----------|---------------------|------------------------|--------------|---------------------|------------------------|
| 1 | 1 | 0.997707 | 12 | 1 | 0.00129623 |
| 2 | 1 | 1.0000 | 13 | 1 | 0.991411 |
| 3 | 1 | 0.806101 | 14 | 1 | 0.982676 |
| 4 | 1 | 0.994244 | 15 | 1 | 1.0000 |
| 5 | 1 | 0.912973 | 16 | 1 | 0.151294 |
| 6 | 1 | 0.99418 | 17 | 1 | 0.770405 |
| 7 | 1 | 0.939074 | 18 | 1 | 0.997798 |
| 8 | 1 | 0.975686 | 19 | 1 | 0.979853 |
| 9 | 1 | 0.535094 | 20 | 1 | 0.925271 |
| 10 | 1 | 0.997336 | 21 | 1 | 0.948666 |
| 11 | 1 | 0.999332 | | | |

З табл. 2.3 слідує, що вага правил 9, 12 та 16 стала незначною, що вказує на їх деяку суперечливість.



а) до настройки

б) після настройки

Рис. 2.3. Функції належності змінної x_1 відповідному нечіткому терму (*низький, середній, високий*) до та після настройки

На рис. 2.4 представлені результати розрахунків за нейро-нечіткою моделлю залежності (2.18) до і після настройки.

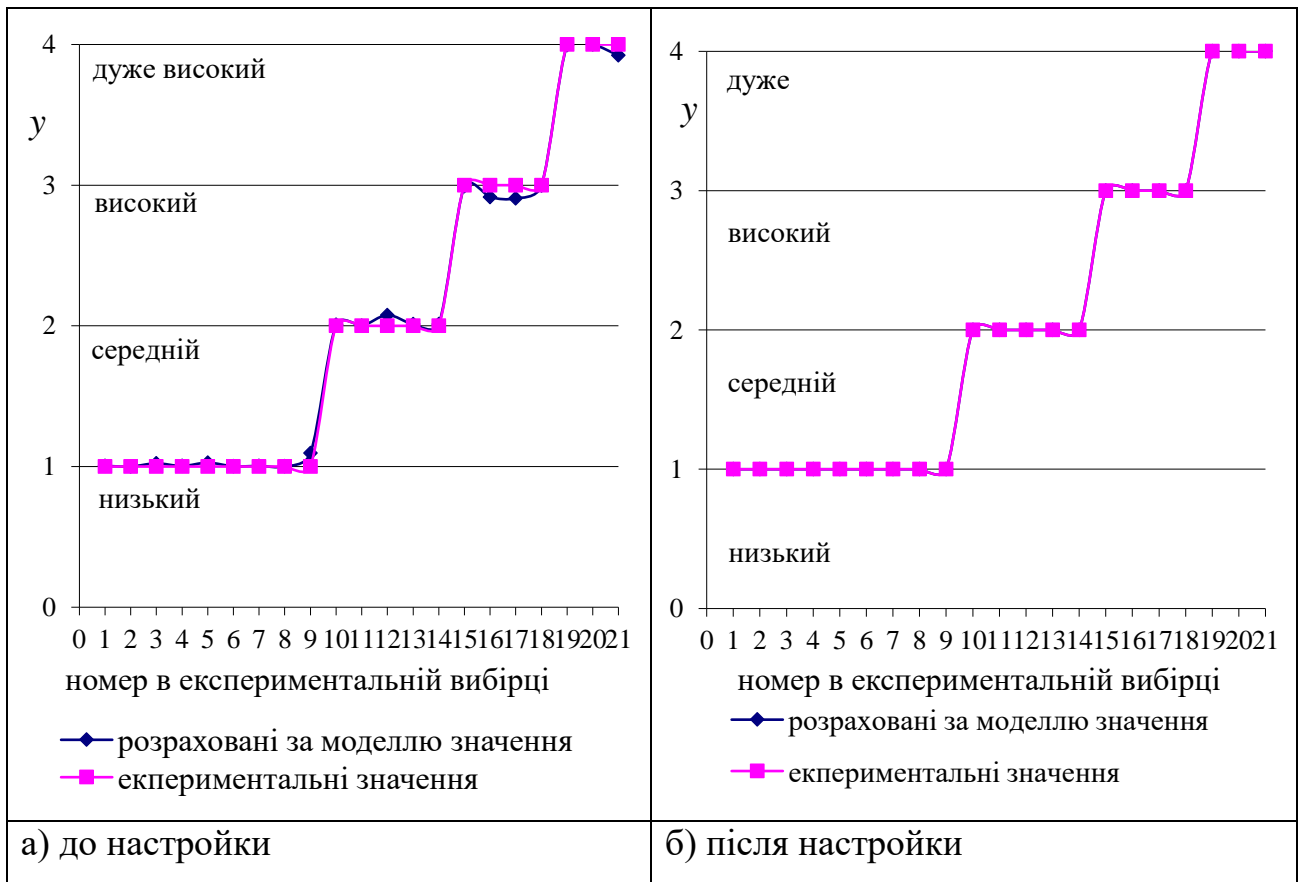


Рис. 2.4. Експериментальні та розраховані за моделлю значення вихідної змінної u до і після настройки

Таким чином, як видно з графіку (рис. 2.4б), модельні значення вихідної змінної u після настройки практично співпадають з її експериментальними значеннями.

2.4 Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації сформульовані математичні постановки нечітких задач ОРМ та викладені підходи щодо їх розв'язання на основі методів обчислювального інтелекту.

Запропоновано класифікацію нечітких задач ОРМ у відповідності до того, у яких елементах задачі наявна нечіткість: тип 1 - з нечіткістю в елементах задачі,

які підлягають оптимізації; тип 2 - з нечіткістю в елементах задачі, які не підлягають оптимізації.

Для формулювання математичних постановок нечітких задач ОРМ типу 1 наведені два еквівалентні означення нечіткого розбиття чіткої множини.

Сформульовано математичну постановку нечіткої неперервної задачі типу 1 оптимального розбиття множини Ω з E_n на її нечіткі підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з відшуканням координат центрів цих підмножин τ_1, \dots, τ_N . Показано, що нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ повністю визначається своєю вектор-функцією належності $\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x))$, $x \in \Omega$.

Сформульовано нечітку задачу типу 2 з нечітко описаними параметрами в цільовому функціоналі та обмеженнях.

Наведено підходи щодо формалізації нечіткості у задачах обчислювального інтелекту та описано метод побудови узагальненої математичної моделі ідентифікації нелінійних об'єктів із застосуванням нейронечітких технологій, які застосовуються для розробки методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ.

Застосування нейронечітких технологій до задачі ідентифікації (відновлення) залежності виходу від входів об'єкта ідентифікації розглядається як побудова моделі об'єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язки входи-вихід та вирішується, як правило, в два етапи:

- структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО-ТО», що генеруються з експериментальних даних;

- параметрична ідентифікація (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

Для оптимізації параметрів нечіткої моделі (параметрична ідентифікація) застосовано r -алгоритм Шора (метод мінімізації з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів). Перевага r -алгоритму Н.З. Шора, крім того, що він є ефективним для задач оптимізації великих розмірностей для гладких яружних функцій з сильно витягнутими лініями рівня, полягає в тому, що він може застосовуватися і для негладких цільових функцій, які виникають при використанні трикутних і трапецієподібних функцій належності та деяких операцій над нечіткими множинами. У цих випадках застосування класичних градієнтних методів, що вимагають гладкості функцій, може викликати проблеми в збіжності цих методів. Роботу методу нейролінгвістичної ідентифікації залежностей продемонстровано на модельній задачі.

Основні результати розділу опубліковані в [1, 2, 3, 8, 9, 18]

Розділ 3. МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ В УМОВАХ НЕЧІТКИХ ДАНИХ

3.1 Розробка єдиного підходу до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких даних

У третьому розділі досліджуються нечіткі задачі оптимального розбиття типу 2 з нечіткістю в елементах задачі, які не підлягають оптимізації.

На основі описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей розроблено єдиний підхід до розв'язання нечітких задач ОРМ, у яких нечіткість може бути наявна у елементах задачі, які не підлягають оптимізації, тобто з нечіткими початковими даними задачі.

Єдиний підхід до розв'язання задач ОРМ з нечіткими вхідними даними заснований на застосуванні математичного апарату теорії ОРМ і нейронечітких технологіях.

Спочатку для зняття нечіткості в обмеженнях застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних залежностей, а потім застосовується математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ в умовах визначеності.

Цим підтверджується універсальність теорії ОРМ, а саме, моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття можуть бути узагальнені на випадок нечіткого завдання початкових даних задачі.

Такий підхід до розв'язання нечітких задач ОРМ типу 2, у яких початкові дані задачі можуть бути неточні, неповні, недовизначені, застосовано для розробки методів і алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ у цьому розділі.

3.1.1 Метод розв'язання задачі оптимального розбиття з нейролінгвістичною ідентифікацією функцій у цільовому функціоналі

Сформулюємо математичну постановку задачі оптимального розбиття множин n -вимірному евклідовому простору E_n на підмножини без обмежень з відшукуванням координат центрів [39].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ множини $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його

підмножини, що не перетинаються $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$, $mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$,

$i \neq j, i, j = 1, \dots, N$, де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега. Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини, що не перетинаються $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, через

Σ_{Ω}^N , тобто:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx.$$

Неперервною лінійною задачею оптимального розбиття множин Ω з E_n на його підмножини, що не перетинаються $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні) без обмежень з відшукуванням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин, відповідно, називається наступна задача.

Задача 3.1. Знайти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

де $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; функції $c(x, \tau_i)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; координати $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$ спочатку невідомі; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід’ємна на Ω функція; a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N – задані невід’ємні числа, причому:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тут і в подальшому інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок Ω_i , $i = 1, \dots, N$, дорівнює нулю.

Означення 3.1. Розбиття $\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}$, що є розв’язком задачі 3.1, назвемо оптимальним.

Для обґрунтування методу розв’язання поставленої задачі застосуємо апарат теорії оптимального розбиття множин з [39].

Введемо характеристичні функції підмножин Ω_i :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

и перепишемо задачу 3.1 в наступному вигляді.

Задача 3.2. Знайти $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$,

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega \};$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Тут

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (3.1)$$

Як доведено в роботі [39], для кожного фіксованого набору $\tau \in \Omega^N$ (з припущення, що $\rho(x) \geq 0$) майже всюди для $x \in \Omega$) мають місце наступні теореми.

Теорема 3.1. Для того щоб можливе розбиття $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множини Ω для кожного фіксованого $\tau \in \Omega$ було оптимальним для задачі 3.2, необхідно і достатньо щоб

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j, \quad i \neq j, \text{ м.в. для } x \in \Omega_{*i}, i, j = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Наслідок з теореми 3.1. В точках x , що належать оптимальній границі підмножин Ω_{*i} і Ω_{*j} , в нерівності (3.2) досягається знак рівності.

Теорема 3.2. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$, що відповідає оптимальному розв'язку $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$ задачі 3.2, для $i = 1, \dots, N$ і майже всіх $x \in \Omega$, мають вигляд:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i}) + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (3.3)$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ обирається оптимальне рішення задачі

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N. \quad (3.4)$$

Відзначимо, що в математичній постановці задачі 3.1 і в різних узагальненнях цієї задачі з робіт [25, 39] в цільовий функціонал входять функції $c(x, \tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, и $\rho(x)$, які, наприклад, в термінах нескінченновимірних транспортних задач і задач розміщення мають наступний зміст: $c(x, \tau_i)$ – вартість транспортування одиниці продукції з пунктів виробництва τ_i , $i = 1, \dots, N$, в пункт

споживання з координатою $x = (x_1, \dots, x_n)$, а $\rho(x)$ – функція попиту споживача x на продукцію, що виробляється пунктом виробництва τ_i .

Також в нескінченновимірних транспортних задачах та задачах розміщення передбачається, що попит або рівномірно розподілено в заданій області, або розподілений в цій області з заданою щільністю $\rho(x)$. Тому функцію $\rho(x)$ ми далі будемо називати попитом або щільністю.

В роботі [39] припускалося, що для функцій $c(x, \tau_i)$, $i=1, \dots, N$, та $\rho(x)$ відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна нелінійна) невідома. Крім того, часто неможливо врахувати в явному аналітичному вигляді вплив деяких реальних факторів або через брак інформації про модельовану залежність, або складності обліку різноманіття чинників, що впливають на характер цієї залежності. Для нескінченновимірної транспортної задачі, наприклад, на попит $\rho(x)$ можуть впливати такі чинники, як зміна рівня доходу споживача, коливання валютного курсу або нестабільність політичної обстановки, коливання цін на бензин і багато інших

Для ідентифікації залежності функції $\rho(x)$ від її аргументів застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей, описаний у другому розділі.

Розглянемо функціональну залежність виходу y от входів x_1, x_2, \dots, x_m у вигляді:

$$y = \rho(x), \text{ де } x = (x_1, \dots, x_m), x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Провівши операцію побудови нечіткої моделі по вхідним даним, яка описана у другому розділі, отримаємо нечітку модель у вигляді:

$$y = F(x, B, C, T, W), \quad (3.6)$$

де $x = (x_1, \dots, x_m)$ – вхідний вектор,

$W = \{w_j^k\}$, $j = 1, 2, \dots, s_k$, $k = 1, 2, \dots, L$, набір вагових коефіцієнтів правил,

$B = \{b_{ij}^k\}$, $C = \{c_{ij}^k\}$, $T = \{t_{ij}^k\}$ – набори параметрів настройки функцій належності, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s_k$, $k = 1, \dots, L$;

F – функція зв'язку вхід-вихід, яка включає перетворення.

Якщо побудована модель (3.6) недостатньо точно описує модельований об'єкт (3.5), то необхідно налаштувати її, тобто знайти такі параметри B , C , T , W , які мінімізують відхилення між модельними (теоретичними, отриманими за моделлю (3.6)) і експериментальними даними.

Як уже було описано у другому розділі для оптимізації параметрів нечіткої моделі (3.6) будемо застосовувати метод мінімізації з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнта (r -алгоритм Н.З.Шора). З одного боку, перевага r -алгоритму Н.З.Шора, крім того, що він добре працює в задачах оптимізації великих розмірностей для гладких яружних функцій з сильно витягнутими лініями рівня, полягає в тому, що він може застосовуватися і для негладких цільових функцій. З іншого боку, при заміні операції максимуму на складання з обрізанням значень, що перевищують одиницю, а також при використанні трикутних і трапецієподібних функцій приналежності, ми приходимо до негладких функцій. У цих випадках застосування класичних градієнтних методів, що вимагають гладкості функцій, може викликати проблеми в збіжності цих методів.

В результаті розв'язання задачі оптимізації отримуємо вектор $Q^* = (B^*, C^*, T^*, W^*)$, який доставляє мінімальне значення цільовій функції в задачі оптимізації параметрів нечіткої моделі (3.6). Тобто отримуємо такі значення $W^* = \{w_j^{k*}\}$ – для набору вагових коефіцієнтів правил і наборів параметрів $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$ функцій належності, для яких

відхилення між експериментальними і модельними даними, отриманими після настройки нечіткої моделі, досягає мінімального значення.

Запишем результуючу нейронечітку ідентифікацію функції $\rho(x)$, яку далі будемо використовувати для розв'язання задачі 3.2, у вигляді наступних співвідношень:

$$\rho(x) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(y)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(y)}, \quad x \in U = U_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times U_m, \quad (3.7)$$

де

$$\mu_{D_k}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(x_i), \quad (3.9)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(x_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right|^{2t_{ij}^{k*}}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad (3.10)$$

$$k = 1, 2, \dots, L.$$

В співвідношеннях (3.7)-(3.10) значення $\mu_{ij}^{k*}(x_i)$, $p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu_{D_k}^*(y)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $W^* = \{w_j^{k*}\}$, $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$, отриманих після налаштування.

Для формулювання алгоритму розв'язання задачі ОРМ з нейролінгвістичною ідентифікацією функції $\rho(x)$ наведемо математичну постановку задачі 3.1 в термінах характеристичної функції $\lambda(\cdot)$, тобто задачу 3.2, з відновленою функцією $\rho(\cdot)$.

Задача 3.3. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ майже всюду для } x \in \Omega \};$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де в якості функції $\rho(x)$ обирається її нейролінгвістична ідентифікація, отримана у вигляді співвідношень (3.7)-(3.10).

Відповідно до теореми 3.2 оптимальний розв'язок задачі 3.2 в термінах характеристичних функцій $\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x)$ підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$, що складають оптимальне розбиття множини Ω , з припущення, що $\rho(x)$ – невід'ємна на Ω функція, визначається формулами (3.3), (3.4).

Для розв'язку отриманої скінченновимірної задачі оптимізації (3.4) з недиференційованою цільовою функцією $G(\tau)$ застосуємо алгоритм узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних антиградієнтів (r -алгоритм Шора [100]).

Алгоритм розв'язання задачі 3.1

Приведемо алгоритм розв'язку задачі 3.1, заснований на теоремі 3.2.

Визначимо i -ту компоненту вектору узагальненого градієнту $g_G^{\tau}(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ функції

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx$$

в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ наступним чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x, \tau) \lambda_i(x) \rho(x) dx, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -та компонента N -вимірному вектору узагальненого градієнту $g_c^{\tau}(x, \tau)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ (тут $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$); при фіксованому x вона має вигляд

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

Алгоритм

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед U , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in U \setminus \Omega$. Паралелепіпед U покриваємо прямокутної сіткою. Розраховуємо значення функції $\rho(x)$ в узлах сітки за формулами (3.7)-(3.10) і задаємо початкове наближення $\tau = \tau^{(0)}$. Розраховуємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах при $\tau = \tau^{(0)}$ за формулами (3.3), значення $g_G(\tau)$ – за формулами (3.11) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}$, обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ і знаходимо

$$\tau^1 = P_U \left(\tau^0 - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^0), g_G(\tau^0))}} \right),$$

P_U – оператор проектування на U .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті розрахунків після k , $k = 1, 2, \dots$, ітерацій алгоритму отримані деякі конкретні значення $\tau^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сітки.

Опишемо $(k+1)$ -й крок.

Розрахуємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сітки за формулами (3.3) при $\tau = \tau^{(k)}$.

Знаходимо значення $g_G(\tau)$ за формулами (3.11) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\tau = \tau^{(k)}$.

Проводимо $(k+1)$ -й крок r -алгоритма в H -формі [26], ітераційна формула якого має вигляд

$$\tau^{k+1} = P_U \left(\tau^k - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^k), g_G(\tau^k))}} \right).$$

Якщо умови

$$\|\tau^k - \tau^{k+1}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.12)$$

не виконуються, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритма.

Покладемо $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова (3.12).

Розраховуємо оптимальне значення цільової функції за формулою

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx$$

та, для контрол. правильності розрахунку, за формулою (3.1) при $\tau = \tau_*$ та $\rho(x)$, розрахованими за формулами (3.7)-(3.10).

Алгоритм описаний.

3.1.2 Метод розв'язання задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі

Сформулюємо математичну постановку неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини Ω з n -вимірного евклідового простору E_n на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються (серед яких можуть бути і порожні), з відшукуванням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Постановка цієї задачі розроблена на основі аналогічної задачі в умовах визначеності з [39].

Наведемо спочатку математичну постановку неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини Ω з n -вимірного евклідового простору E_n на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються (серед яких можуть бути і порожні), з відшукуванням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей з точними значеннями параметрів у цільовому функціоналі, тобто в умовах визначеності [39].

Задача 3.4. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \right] \quad (3.13)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset E_n$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; функції $c(x, \tau_i)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; координати $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центру τ_i , $i = 1, \dots, N$, заздалегідь невідомі (які потрібно визначити); $\rho(x)$ – обмежені, вимірні, невід'ємні на Ω функції; $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ – задані невід'ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини межових точок Ω_i , $i = 1, \dots, N$, дорівнює нулю.

У роботі [39] передбачалося, що для функцій $\rho(x)$, $c(x, \tau_i)$, $i=1, \dots, N$, відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна нелінійна) не відома. У попередньому пункті роботи було запропоновано алгоритм розв'язання задачі 3.1 з нейролінгвістичною ідентифікацією функції попиту $\rho(x)$. У даному пункті роботи розглянемо випадок, коли параметри a_i , $i=1, \dots, N$, у цільовому функціоналі (3.13) можуть бути нечіткими, неточними, недостовірними. Для зняття нечіткості в подальшому будемо використовувати метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей з другого розділу дисертації.

Для цього параметри a_i , $i=1, \dots, N$, представимо як параметри, що залежать від нечітких факторів $\tilde{\gamma}_j$, $j=1, \dots, m$, у вигляді

$$\tilde{a}_i = a_i(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m). \quad (3.16)$$

Тоді задачу 3.4 з нечіткими параметрами можна записати у такому виді:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \tilde{a}_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \tau)} \quad (3.17)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i=1, \dots, p, \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i=p+1, \dots, N, \quad (3.18)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j=1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Для відновлення значень нечітких параметрів a_i , $i=1, \dots, N$ застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей з другого розділу дисертації та наведемо результуючу нейронечітку ідентифікацію залежності (3.16) у вигляді наступних співвідношень:

$$a(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(a)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(a)}, \quad \gamma \in \Upsilon = \Upsilon_1 \times \dots \times \Upsilon_i \times \dots \times \Upsilon_m, \quad (3.20)$$

де

$$\mu_{D_k}^*(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^m \mu_{ij}^{k*}(\gamma_i), \quad (3.22)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad k = 1, 2, \dots, L. \quad (3.23)$$

У співвідношеннях (3.20)-(3.23) значення $\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i)$, $p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, $\mu_{D_k}^*(a)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $W^* = \{w_j^{k*}\}$, $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, отриманих після настройки.

Алгоритм розв'язання задачі з нейролінгвістичною ідентифікацією нечітких параметрів \tilde{a}_i .

Для формулювання алгоритму розв'язання задачі (3.17)-(3.19) з нечіткими параметрами $\tilde{a}_i, i = 1, \dots, N$, перепишемо задачу 3.4 з чіткими параметрами, вводячи характеристичну функцію [39] підмножини $\Omega_i, i = 1, \dots, N$,

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

Отримаємо наступну задачу.

Задача 3.5. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

де

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \},$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Тут

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі 3.5 має наступний вигляд для $i = 1, \dots, N$ та майже всіх $x \in \Omega$, як доведено у [39]:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (3.24)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p + 1, \dots, N, \quad (3.25)$$

де

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (3.26)$$

Для розв'язання скінченновимірної задачі (3.24), (3.25) з недиференційовною функцією (3.26) застосуємо евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних градієнтів, близький до r -алгоритму Н.З. Шора [100].

Для цього від задачі (3.24), (3.25) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (3.26) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N\}$. Знайти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi),$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

де S – досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (3.24)).

Визначимо i -ту, $i = 1, \dots, N$, компоненту $2N$ -вимірному вектору узагальненого псевдоградієнта

$$g_P(\tau, \psi) = \left(g_P^\tau(\tau, \psi), -g_P^\psi(\tau, \psi) \right) = \left(g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi) \right)$$

функції $P(\tau, \psi)$ в точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ таким чином:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.27)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.28)$$

де $g_P^{\tau_i}(\tau, x)$ – i -та компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_P^{\tau}(\tau, x)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фіксованому x , яка має вид

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

У формулах (3.27), (3.28) $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, визначається наступним чином:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Опишемо алгоритм розв'язання задачі (3.17)-(3.19).

Алгоритм.

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутної сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.29) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$ та $a_i, i = 1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.20)-(3.23), де в якості a взяті відповідні $a_i, i = 1, \dots, N$. Обчислюємо значення $g_P^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ у вузлах сітки за формулами (3.27) та (3.28) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$, та $a_i, i = 1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.20)-(3.23), вибираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r -алгоритму та знаходимо

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau \left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)} \right) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi \left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)} \right),\end{aligned}$$

де P_{Π} – оператор проектування на Π .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k , $k = 1, 2, \dots$, кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$, у вузлах сітки.

Опишемо $(k + 1)$ -й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.29) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ та $a_i, i = 1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.20)-(3.23).

2. Обчислюємо значення $g_P \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right)$ за формулами (3.27), (3.29) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ та $a_i, i = 1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.20)-(3.23).

3. Проводимо $(k + 1)$ -й крок алгоритму узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору, близького до r -алгоритму [26], коротка схема якого має вигляд

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \tilde{g}_P^\tau \right), \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_P^\psi,\end{aligned}$$

де $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n , причому $B_0^\tau = I_N, B_0^\psi = I_N$ (I_N – одинична матриця); $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right)$; h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму різниці

$$\left[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)}) \right]$$

у напрямку антипсевдоградієнта $-g(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\| \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (3.30)$$

не виконується, переходимо до $(k + 2)$ -го кроку алгоритму.

5. Вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова (3.30).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (3.26) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$ та $a_i, i = 1, \dots, N$, які знайдені за формулами (3.20)-(3.23), й, для контролю правильності розрахунків, за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \quad (3.31)$$

Алгоритм описаний.

3.1.3 Алгоритм розв'язання нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами

Задачі розміщення (location) підприємств з одночасним розбиттям (allocation) даного регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується одним підприємством, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат у математичній постановці зводяться до нескінченновимірних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) на неперетинні підмножини з розміщенням центрів цих підмножин [52].

Для розв'язання практичних задач location-allocation, як скінченновимірних, так і нескінченновимірних, розроблено значну кількість методів і алгоритмів, серед яких вкажемо на підхід, запропонований в роботі [171], де автор надав також і огляд літератури з підходів, методів і алгоритмів розв'язання задач location-allocation у чітких умовах.

Однак, нескінченновимірні задачі location-allocation суттєво ускладнюються в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд їх параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі. Такі моделі відносять до нечітких задач ОРМ, для їх розв'язання потрібна розробка спеціальних підходів і методів.

Розглянемо нескінченновимірну задачу location-allocation з нечіткими параметрами, яка у математичній постановці зводиться до неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини з n -вимірного евклідового простору E_n на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри.

Алгоритм розв'язання цієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі розроблено у попередньому пункті роботи. Застосуємо цей алгоритм для розв'язання модельної нескінченновимірної задачі location-allocation з нечіткими параметрами.

Розглянемо спрощену модель нескінченновимірної задачі розміщення виробництва, що називається в зарубіжній науковій літературі задачею location-allocation [171], в наступній постановці.

Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області $\Omega \subset E_2$. Скінченне число N виробників цієї продукції розташовані в ізольованих точках $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$, $i = 1, \dots, N$, області Ω . Вважаються заданими: $\rho(x)$ – попит на продукцію споживача з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$; $c(x, \tau_i)$ –

вартість транспортування одиниці продукції від виробника $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ споживачеві з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$. Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат.

Множину споживачів Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i споживачів i -м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N. \quad (3.32)$$

При цьому потужність i -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i , і не перевищує заданих обсягів:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = 1, \dots, N, \quad (3.33)$$

не виключається, що деякі з підмножин Ω_i виявляться порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на зони обслуговування їх N виробниками, тобто на підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$, і розмістити цих виробників в Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживачів:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx + \varphi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) \right\} \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \quad (3.34)$$

за умов (3.34), (3.35).

Задача (3.34)-(3.36) – нескінченновимірна задача location-allocation в чітких умовах.

У роботі [39] показано, що вираз (3.34) можна представити у наступному вигляді

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})}. \quad (3.35)$$

Задача (3.32)-(3.35) при $a_i = 0$, $i = 1, \dots, N$, – нескінченновимірна транспортна задача, при $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, – нескінченновимірна задача location-allocation.

Для сформульованої задачі (3.32)-(3.35) розглянемо випадок, коли параметри a_i , $i = 1, \dots, N$, можуть бути нечіткими, неточними, недостовірними.

Параметр a_i можна представити, наприклад, як параметр, що залежить від трьох нечітких факторів $\tilde{\gamma}_j$, $j = 1, 2, 3$, у вигляді

$$\tilde{a}_i = a_i(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3), \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.36)$$

Тоді задачу (3.32)-(3.35) можна записати з нечіткими параметрами у вигляді:

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \tilde{a}_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_5\}, \{\tau_1, \dots, \tau_5\})} \quad (3.37)$$

за умов

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.39)$$

Задача (3.37)-(3.39) є задачею location-allocation з нечіткими параметрами.

Для розв'язання задачі (3.37)-(3.39) застосовано алгоритм, запропонований у попередньому пункті дисертації, та проілюстровано на модельних задачах в роботі [55]. Порівнюючи результати розв'язання задачі location-allocation, отримані для чітких параметр a_1, \dots, a_5 у цільовому функціоналі [55] та для нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 , відновлених за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації після настройки [55], можна зробити висновок, що оптимальні розв'язки цих задач збігаються з достатнім ступенем точності.

Таким чином, можна зробити висновок, що метод нейролінгвістичній ідентифікації з достатнім ступенем точності відновлює значення параметрів, які невідомі або неточні.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в обмеженнях

Розглянемо ще одну практичну виробничо-транспортну задачу оптимального розміщення підприємств з обмеженими обсягами виробництва в умовах невизначеності. Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області $\Omega \subset E_2$. Скінченне число N виробників цієї продукції розташовані в ізольованих точках $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$, $i = 1, \dots, N$, області Ω . Вважаються заданими: $\rho(x)$ – попит на продукцію споживача з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$; $c(x, \tau_i)$ – вартість транспортування одиниці продукції від виробника $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ споживачеві з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$. Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат.

Для кожного i -го виробника задана функція $\varphi_i(Y_i)$, що описує залежність вартості виробництва від його потужності Y_i , яка визначається за формулою $Y_i = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx$, і наведені капітальні витрати на реконструкцію i -го виробника для збільшення його потужності від існуючої до проектної Y_i .

Множину споживачів Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i споживачів i -м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.41)$$

де $\text{mes}(\cdot)$ - міра Лебега, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$.

При цьому потужність i -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i , і не перевищує заданих обсягів:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.42)$$

Не виключається, що деякі з підмножин Ω_i виявляться порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на зони обслуговування їх N виробниками, тобто на підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$, і розмістити цих виробників в Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживачів:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx + \varphi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) \right\} \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \quad (3.43)$$

за умов (3.41), (3.42).

У роботі [39] показано, що (3) можна представити у вигляді:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \quad (3.44)$$

Задача (3.41)-(3.44) є нескінченновимірною задачею location-allocation в умовах визначеності, якщо параметри a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N – задані невід'ємні числа.

Розглянемо більш детально параметри b_1, \dots, b_N у обмеженнях (3.42). Зрозуміло, що у багатьох практичних виробничо-транспортних задачах оптимального розміщення підприємств з обмеженнями виробництва величини цих параметрів залежать від багатьох факторів реального процесу, не врахованих у наведеній моделі.

Модель з фіксованими значеннями параметрів b_1, \dots, b_N може виявитися занадто «грубою», тому що на практиці відомими бувають не конкретні точні значення параметрів, а множини їх можливих значень.

Для зняття невизначеності при завданні параметрів b_1, \dots, b_N у співвідношенні (3.42) розглядатимемо їх як нечіткі змінні, що залежать від нечітких факторів β_m , $m = 1, \dots, q$ у виді $b_i \equiv b_i(\beta_1, \dots, \beta_q)$. Такими факторами для обмежень обсягів виробництва можуть бути вартості засобів виробництва, вартості та обмеженість трудових, природних ресурсів та ін. Урахування подібної додаткової інформації ускладнює вихідну математичну модель, але, тим не менше, вона може виявитися прийнятно більш точною та адекватною, тому що враховує вплив додаткових факторів на параметри b_1, \dots, b_N .

Таким чином, неперервну задачу оптимального розбиття множини Ω з E_2 на її підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються та серед яких можуть бути порожні, із відшуканням координат центрів цих підмножин та при нечітких параметрах у обмеженнях можна записати у такому виді:

Задача 3.6. Знайти

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \quad (3.45)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i(\beta_1, \dots, \beta_q), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.46)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.47)$$

Підхід до розв'язання сформульованої задачі з нечіткими параметрами в обмеженнях заснований на застосуванні математичного апарату теорії ОРМ і нейронечітких технологіях. Спочатку для зняття нечіткості в обмеженнях застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних

залежностей з [29], [30], а потім застосовується математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ з [39].

Обґрунтування методу розв'язання задачі 3.6.

При кожному фіксованому b_i , $i = 1, \dots, N$, введемо характеристичні функції підмножин Ω_i :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.48)$$

та перепишемо задачу 3.6 у термінах характеристичних функцій у виді задачі 3.7.

Задача 3.7. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau) \quad (3.49)$$

де

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N \},$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \}; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Під функціоналом Лагранжа для задачі 3.7 будемо розуміти функціонал

$$h(\lambda(x), \tau, \psi(x)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x) dx - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \quad (3.50)$$

де $\psi(x) = (\psi_0(x), \psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N)$, $\psi_0(x)$ - дійсна функція, визначена на Ω зі значеннями в гільбертовому просторі L_{Ω}^2 ; $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ - N - вимірний вектор дійсних чисел, у якого компоненти ψ_1, \dots, ψ_p - довільні по знаку, а $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ - невід'ємні.

Пару $(\{\lambda^*(x), \tau^*\}, \psi(x))$ будемо називати сідловою точкою функціоналу (350) на множині

$$\{\underbrace{\Gamma \times \Omega \times \dots \times \Omega}_N \times \Lambda_2 = \{(\{\lambda(x), \tau\}, \psi(x)) : \lambda(x) \in \Gamma, \tau \in \underbrace{\{\Omega \times \dots \times \Omega\}}_N, \psi_0(x) \in L^2_\Omega, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N \geq 0\},$$

якщо

$$h(\{\lambda^*(x), \tau^*\}, \psi(x)) \leq h(\{\lambda^*(x), \tau^*\}, \psi^*(x)) \leq h(\{\lambda(x), \tau\}, \psi^*(x))$$

для всіх $\lambda(x) \in \Gamma, \tau \in \underbrace{\{\Omega \times \dots \times \Omega\}}_N, \psi(x) \in \Lambda_2,$

або

$$\begin{aligned} h(\{\lambda^*(x), \tau^*\}, \psi^*(x)) &= \max_{\psi_0(x), \psi} \min_{\lambda(x), \tau} h(\{\lambda(x), \tau\}, \{\psi_0(x), \psi\}) = \\ &= \min_{\lambda(x), \tau} \max_{\psi_0(x), \psi} h(\{\lambda(x), \tau\}, \{\psi_0(x), \psi\}) \end{aligned}$$

Вважаючи функції $c(x, \tau_i), i=1, \dots, N$, ще й опуклими по аргументу τ_i на Ω , можна довести, що справедливі наступні теореми.

Теорема 3.3. Сідлова точка $(\{\lambda^*(x), \tau^*\}, \{\psi_0^*(x), \psi^*\})$ функціоналу (3.50) на множині

$\{\underbrace{\Gamma \times \Omega \times \dots \times \Omega}_N \times \Lambda_2$ визначається для $i=1, \dots, N$ й майже всіх $x \in \Omega$ у вигляді:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c(x, \tau_i^*)\rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^*\rho(x) > 0, \quad x \in \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i^*)\rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^*\rho(x) < 0, \quad x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\text{mes}\{x \in \Omega : c(x, \tau_i^*)\rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^*\rho(x) = 0\} = 0,$$

$$\psi_0^*(x) = -\frac{1}{2} \left\{ (c(x, \tau_i^*) + \psi_i^*) + \min_{j \neq i} (c(x, \tau_j^*) + \psi_j^*) \right\} \rho(x), \quad (3.52)$$

де $c(x, \tau_i^*) + \psi_i^* = \min_{k=1, N} (c(x, \tau_k^*) + \psi_k^*),$

в якості $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі максимізації при $\psi_i \geq 0, i=p+1, \dots, N$ функціоналу

$$Q(\psi) = \min_{\tau} G(\bar{\psi}_0(x), \psi, \tau), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} G(\bar{\psi}_0(x), \psi, \tau) = \\ = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |c(x, \tau_i) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \psi_i \rho(x)| dx + \sum_{i=1}^N (2b_i - b) \psi_i + (2 - N) \int_{\Omega} \bar{\psi}_0(x) dx \Big] + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \end{aligned} \quad (3.54)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(x) = -\frac{1}{2} \left\{ (c(x, \tau_i) + \tau_i) + \min_{j \neq i} (c(x, \tau_j) + \psi_j) \right\} \rho(x), \\ c(x, \tau_i) + \psi_i = \min_{k=1, N} (c(x, \tau_k) + \psi_k), \end{aligned}$$

або у вигляді

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (c(x, \tau_i^*) \rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^* \rho(x) > 0, \quad x \in \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_i^*) \rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^* \rho(x) = 0, \quad x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\text{mes} \{ x \in \Omega : [c(x, \tau_i^*) \rho(x) + \psi_0^*(x) + \psi_i^* \rho(x)] < 0 \} = 0,$$

$$\psi_0^*(x) = - \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k^*) + \psi_k^*) \rho(x), \quad (3.56)$$

в якості $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ вибирається оптимальний розв'язок задачі максимізації при $\psi_i \geq 0, i=1, \dots, N$, функціоналу

$$Q(\psi) = \min_{\tau} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, N} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\}. \quad (3.57)$$

Теорема 3.4. Для оптимальності можливого розв'язку

$(\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}, \tau^*)$ задачі 3.7 необхідно й достатньо існування дійсних

констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$, серед яких $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ - невід'ємні, такі, що

$$c(x, \tau_i^*) - c(x, \tau_j^*) \leq \psi_j - \psi_i \text{ майже всюди для } x \in \Omega_i^*, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.58)$$

Причому в точках x , які належать оптимальній границі підмножин Ω_i^* й Ω_j^* , в нерівності (3.58) досягається знак рівності.

Таким чином, доведено, що оптимальний розв'язок задачі 3.7 для $i = 1, \dots, N$ та майже всіх $x \in \Omega$ має наступний вигляд:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3.59)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.60)$$

де

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (3.61)$$

Для розв'язання скінченновимірної задачі (3.59)-(3.61) з недиференційовною функцією (3.61) застосуємо евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних градієнтів, близький до r -алгоритму Н.З. Шора [26].

Для цього від задачі (3.59), (3.60) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (3.61) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$. Знайти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi),$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, -\psi_i),$$

де S – досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (3.61)).

Визначимо i -ту, $i=1, \dots, N$, компоненту $2N$ -вимірного вектора узагальненого псевдоградієнту

$$g_P(\tau, \psi) = \left(g_P^\tau(\tau, \psi), -g_P^\psi(\tau, \psi) \right) = \left(g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi) \right)$$

функції $P(\tau, \psi)$ в точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ таким чином:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad i=1, \dots, N, \quad (3.62)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, \dots, N, \quad (3.63)$$

де $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$ – i -а компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_P^\tau(\tau, x)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фіксованому x , яка має вид

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

У формулах (3.62), (3.63) $\lambda_i(x)$, $i=1, \dots, N$, визначається наступним чином:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (3.64)$$

Опишемо алгоритм розв'язання задачі (3.37)-(3.39).

Алгоритм розв'язання задачі 3.7.

Крок 1. Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого

паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.64) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $g_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ у вузлах сітки за формулами (3.62) та (3.63) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$. У формулі (3.62) $b_i, i = 1, \dots, N$ обчислені за формулами (3.41)-(3.44), де в якості b взяті відповідні $b_i, i = 1, \dots, N$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r -алгоритму та знаходимо

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= P_\Pi \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}),\end{aligned}$$

де P_Π – оператор проектування на Π .

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після $k, k = 2, 3, \dots$, кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$, у вузлах сітки.

Крок $(k + 1)$ -й:

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (3.64) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

2. Обчислюємо значення $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ за формулами (3.62), (3.63) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ та $b_i, i = 1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.41)-(3.44).

3. Проводимо $(k + 1)$ -й крок алгоритму узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору, близького до r -алгоритму [5], коротка схема якого має вигляд

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_P^{\tau} \right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi},$$

де $B_{k+1}^{\tau}, B_{k+1}^{\psi}$ – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n , причому $B_0^{\tau} = I_N$, $B_0^{\psi} = I_N$ (I_N – одинична матриця); $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$; h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму різниці

$$\left[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)}) \right]$$

у напрямку антипсевдоградієнта $-g(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\| \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (3.65)$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритму, якщо виконується - то до п. 5.

5. Вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi_* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова (3.65).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (3.61) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi_*$ та b_i , $i=1, \dots, N$, які обчислені за формулами (3.41)-(3.44), та, для контролю правильності розрахунків, за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \quad (3.66)$$

Завершення роботи алгоритму.

Наведений алгоритм реалізовано для наступної модельної задачі.

Модельна задача.

Розглянемо задачу розміщення трьох підприємств, які виробляють продукцію одного виду, із обмеженими зверху обсягами виробництва. Наведемо вхідні дані. Область $\Omega = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i = \overline{1, 3}$, підприємства до споживача

$(x^{(1)}, x^{(2)})$ задається наступним чином: $c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}$.

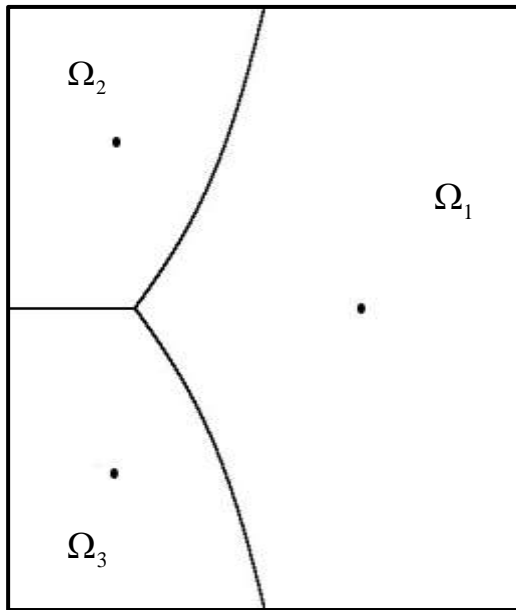
Попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \equiv 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$. Задані такі параметри a_i : $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$.

При цьому потужність i -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i , і не перевищує заданих обсягів:

$$\iint_{\Omega_1} \rho(x) dx \leq b_1, \quad \iint_{\Omega_2} \rho(x) dx \leq b_2, \quad \iint_{\Omega_3} \rho(x) dx \leq b_3 \quad (3.67)$$

Потрібно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування Ω_i трьома підприємствами за умов (3.67) і розмістити ці підприємства в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживача (3.37).

Відмітимо спочатку, що для розв'язання цієї модельної задачі з чіткими параметрами $b_1 = 0,6; b_2 = 0,2; b_3 = 0,2$ був застосований алгоритм з [39]. В результаті роботи алгоритму за 83 ітерації отримано оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством, яке представлено на рис. 3.1, де суцільною лінією позначені границі підмножин Ω_i а символами «•» позначені оптимальні координати розташованих підприємств:



Оптимальні координати
розташованих підприємств:

$$\tau_1 = (0,6912; 0,5000),$$

$$\tau_2 = (0,2100; 0,2384),$$

$$\tau_3 = (0,2100; 0,7924).$$

Максимальне значення
функціонала двоїстої задачі 0,2530.

Мінімальне значення
функціонала прямої задачі 0,2530.

Обсяги виробництва:
(0,6000; 0,2000; 0,2000).

Рис. 3.1. Оптимальне розбиття для модельної задачі з точними значеннями параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$

Однак, реальні залежності параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$ від факторів, що на них впливають, як правило складні, нелінійні або невідомі. Перейдемо до ілюстрації описаного у статті підходу до розв'язання цієї задачі при наявності нечітких параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$ у обмеженнях.

Після застосування метода нейролінгвістичній ідентифікації для відновлення (до настройки) параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$, отримуємо такі їх значення: $b_1 = 0,6474$; $b_2 = 0,2214$; $b_3 = 0,1843$.

Далі, у результаті застосування описаного алгоритму розв'язання задачі 3.7 з цими відновленими значеннями параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$ отримано за 74 ітерації оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством, яке представлено на рис. 3.2, де пунктирною лінією позначені границі підмножин Ω_i а символами «■» позначені оптимальні координати розташованих підприємств.

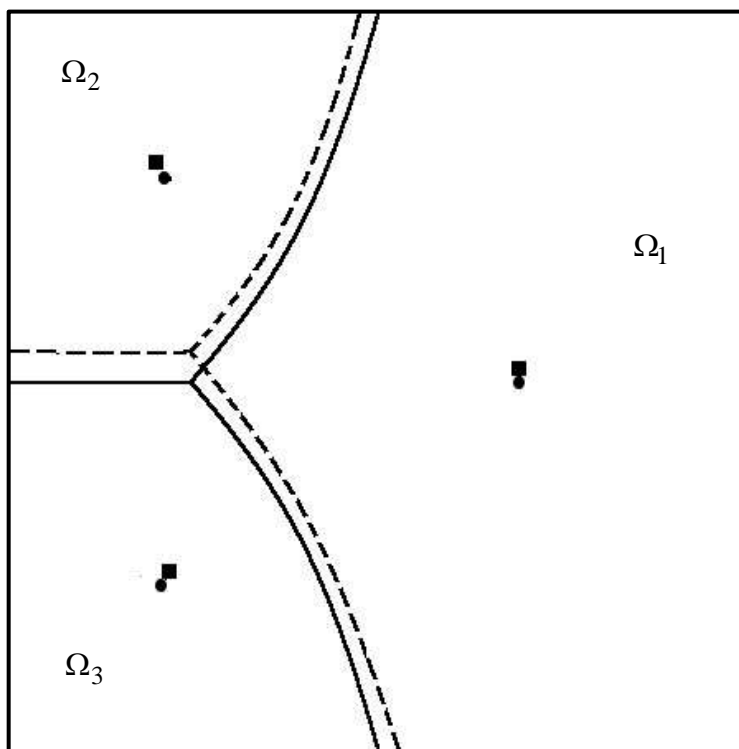


Рис.3.2 Оптимальне розбиття для модельної задачі з відновленими значеннями параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$ (до та після настройки)

Нарешті, після відновлення значень параметрів b_i , $i = 1, 2, 3$ за допомогою метода нейролінгвістичної ідентифікації та подальшого застосування описаного вище алгоритму до розв'язання задачі 3.7 з відновленими після настройки значеннями параметрів $b_1 = 0,6000$, $b_2 = 0,2000$, $b_3 = 0,2000$, за 76 ітерацій були отримані такі ж результату (у межах заданої точності $\epsilon=0,0001$), як і для випадку з чіткими параметрами. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством представлено на рис. 3.2, де суцільною лінією позначені границі підмножин Ω_i , а символами «•» позначені оптимальні координати розташованих підприємств.

У результаті роботи розробленого алгоритму отримані числові результати оптимального розбиття заданої множини представлені у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 Числові результати оптимального розбиття заданої множини для модельної задачі

| | До настройки параметрів нечіткої моделі | Після настройки параметрів нечіткої моделі |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Оптимальні координати розташованих підприємств | $\tau_1 = (0,6883; 0,5000)$, $\tau_2 = (0,2055; 0,2234)$, $\tau_3 = (0,2124; 0,7816)$ | $\tau_1 = (0,6911; 0,5000)$, $\tau_2 = (0,2101; 0,2384)$, $\tau_3 = (0,2101; 0,7925)$. |
| Максимальне значення функціоналу двоїстої задачі | 0,2524 | 0,2537 |
| Мінімальне значення функціоналу прямої задачі | 0,2537 | 0,2530 |
| Оптимальні обсяги виробництва підприємств | $b_1 = 0,6011$ $b_2 = 0,2200$ $b_3 = 0,1789$ | $b_1 = 0,6000$ $b_2 = 0,2001$ $b_3 = 0,1999$ |

Порівнюючи числові та графічні результати розв'язання модельної задачі, отримані для чітких параметр b_1 , b_2 , b_3 у цільовому функціоналі (рис. 3.1) та для нечітких параметрів b_1 , b_2 , b_3 , відновлених за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації після настройки (рис. 3.2), бачимо, що оптимальні розв'язки цих задач збігаються із заданим ступенем точності.

3.3 Висновки до розділу 3

У третьому розділі досліджуються нечіткі задачі оптимального розбиття типу 2 з нечіткістю в елементах задачі, які не підлягають оптимізації.

У підрозділі 3.1 описано розроблений єдиний підхід до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та обчислювального інтелекту. Спочатку для зняття нечіткості у початкових даних застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей, а потім застосовується математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ в умовах визначеності. Цим підтверджується універсальність теорії ОРМ, а саме, моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття можуть бути узагальнені на випадок нечітких початкових даних задачі.

Єдиний підхід продемонстровано при розробці методів та алгоритмів розв'язання таких нечітких задач ОРМ: з функцією у цільовому функціоналі, явний вид якої невідомий, з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі, а також нескінченновимірної задачі розміщення-розбиття з нечіткими параметрами.

У підрозділі 3.2 представлено метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в обмеженнях, які розроблені на основі запропонованого єдиного підходу. У відповідності до запропонованого єдиного підходу розв'язання нечітких задач ОРМ типу 2 нечіткі параметри в обмеженнях приведені до чіткості із застосуванням методу нейролінгвістичної ідентифікації, який описано у другому розділі, потім застосовано відповідний метод теорії оптимального розбиття множин.

Наведено теорему про існування розв'язку задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в обмеженнях.

Для розв'язання скінченновимірної задачі з недиференційовною функцією застосовано евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору у напрямку різниці двох послідовних градієнтів, близький до r -алгоритму Н.З.Шора. Для цього від вихідної задачі зроблено перехід до задачі безумовної

максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію негладкої штрафної функції множини.

Розроблені у розділі алгоритми засновані на застосуванні нейронечітких технологій та методах теорії оптимального розбиття множин. Розроблені алгоритми дозволяють розв'язувати задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема, задачі, в яких ряд параметрів та/або деякі залежності у цільовому функціоналі, обмеження є нечіткими, неточними, недовизначеними або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

Основні результати розділу опубліковані в [10, 11, 12, 16, 19].

Розділ 4. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНИХ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ-РОЗПОДІЛУ

Розділ присвячений подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n на випадок двоетапної безперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу при обмеженнях у формі рівностей із заданим положенням центрів підмножин та з відшукуванням центрів підмножин в умовах визначеності, а також на випадок двоетапної безперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами.

4.1 Метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з заданим положенням центрів підмножин

Неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу, що розглядається, узагальнює, з одного боку, класичну скінченновимірну транспортну задачу [9] на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами, з іншого боку, дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі [91] на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

Прикладні задачі, що зводяться до двоетапних безперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу характеризуються наявністю двох етапів і полягають у визначенні зон збору неперервно розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу і обсягів перевезень переробленого продукту від

підприємств першого етапу до споживачів (пунктам другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти переробки (збору, зберігання) до споживачів.

Зауважимо, що такі задачі часто зустрічаються на практиці [38, 66, 86, 87, 96, 98, 184]. До їх числа відносяться: задачі, де в якості неперервно-розподіленого ресурсу можуть виступати, наприклад, природна сировина (нафта, газ, руда) або урожай сільськогосподарських культур; задачі по організації збору деревних відходів для виробництва палива з подальшим розподілом їх між пунктами виробництва теплової енергії з метою мінімізації сумарних транспортних витрат; задачі оптимізації депозитно-кредитної діяльності відділень банку з метою залучення депозитів від фізичних осіб з подальшим розподілом залучених коштів між позичальниками та ін.

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена, замкнена, вимірنا за Лебегом множина в n -вимірному евклидовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на її підмножини, що не перетинаються $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}.$$

Тоді під двоетапною безперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття-розподілу з заданим розташуванням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей будемо розуміти наступну задачу.

Задача 4.1. Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$ і такий невід'ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j=1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^H = (\tau_1^H, \dots, \tau_M^H) \in \Omega^M.$$

Тут b_j^H , $j=1, \dots, M$, – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язання задачі

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^H, \quad 0 \leq b_j^H \leq S, \quad j=1, \dots, M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має сенс обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу τ_i^I , $i=1, \dots, N$, до пунктів τ_j^H , $j=1, \dots, M$, кінцевого споживання (другого етапу).

Функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$ з Ω для усіх $i=1, \dots, N$; функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід'ємна на Ω ;

$\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i = 1, \dots, N$, – деяка задана еталонна точка для підмножини Ω_i , звана центром цієї підмножини; $\tau_j^II = (\tau_j^{II(1)}, \dots, \tau_j^{II(n)})$, $j = 1, \dots, M$, – деяка задана точка множини Ω ; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^II)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, – задана обмежена, визначена на $\Omega \times \Omega$ функція, є функцією «відстані» у відповідній метриці між точками τ_i^I и τ_j^II .

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра безлічі граничних точок підмножин $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, дорівнюють нулю.

Означення 4.1. Пару $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком задачі 4.1, назвемо оптимальною.

Введем характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^II) v_{ij}, \quad (4.1.1)$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вид $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_i(x), \dots, \lambda_N(x))$, а вектор v має вид $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$. Очевидно, що $I(\lambda(\cdot), v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$.

Перепишемо задачу 4.1 в термінах характеристичної функції $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$, у такому виді.

Задача 4.2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v)} I(\lambda(\cdot), v),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M;$$

$\lambda_i(x) = 0 \vee 1$ майже всюди (м.в.) для $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$;

$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1$ м.в. для $x \in \Omega$;

$v_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

Від нескінченновимірної задачі 4.2 з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 4.3. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma_1 \times Q} I(\lambda(\cdot), v),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.в. для } x \in \Omega\};$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j'', \quad j = 1, \dots, M\}.$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N; \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega\};$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}.$$

Покажемо, що при кожному фіксованому $v \in Q$ задача 4.3, має розв'язок.

Дійсно, так як Γ_1 – обмежена, замкнена, опукла множина гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$, а функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ для кожного фіксованого $v \in Q$ лінійний (а значить опуклий) і неперервний відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_1 , то в силу узагальненої теореми Вейерштрасса [6] опуклий безперервний функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ за фіксованого $v \in Q$ на замкненій, обмеженій, опуклій множині Γ_1 гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ досягає своєї нижньої грані.

Твердження 4.1. При кожному фіксованому $v \in Q$ обмежена, замкнена, опукла множина Γ_1 гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ слабо компактна і (відповідно до теореми Крейна-Мільмана [92]) містить принаймні одну крайню точку.

Твердження 4.2. Серед множини точок Γ_1^* в яких лінійний щодо $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), v)$ досягає для кожного фіксованого $v \in Q$ мінімального по $\lambda(\cdot)$ значення на множині Γ_1 , знайдеться хоча б одна крайня точка множини Γ_1 .

Твердження 4.3. Крайні точки множини Γ_1 являють собою характеристичні функції деяких підмножин Ω_i , що утворюють розбиття множини Ω для кожного фіксованого $v \in Q$.

З тверджень 4.1-4.3 витікає, що для кожного фіксованого $v \in Q$ в множині оптимальних розв'язки задачі 4.3 містяться оптимальні розв'язки задачі 4.2, що дозволяє в подальшому перейти до розгляду задачі 4.3.

Обґрунтування методу розв'язання задачі

Введемо функціонал Лагранжа для задачі 4.3 наступним чином:

$$L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), v) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j'' - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right), \quad (4.1.2)$$

де $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_M)$ – $(N+M)$ -вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ м.в. для $x \in \Omega$;

$v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ – $N \times M$ - вимірний вектор дійсних невід'ємних чисел.

Пару елементів $(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*)$ назвемо сідловою точкою функціоналу (4.1.2) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$, де

$$Q = \left\{ v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\},$$

$$\Lambda = \left\{ \Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E_M \right\},$$

якщо $L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi) \leq L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi^*)$

для $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in Q$, $\Psi \in \Lambda$,

або $L(\{\lambda_*(\cdot), v_*\}, \Psi^*) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$.

Введемо функціонали

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) = \max_{\Psi \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \quad \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) \rightarrow \min, \quad \{\lambda(\cdot), v\} \in \Gamma \times Q. \quad (4.1.3)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda. \quad (4.1.4)$$

Задачу (4.1.3) назвемо прямою, задачу (4.1.4) - двоїстою до задачі (4.1.3).

Неважко показати (за аналогією з [39]), що задачі (4.1.3), (4.1.4) пов'язані співвідношенням двоїстості $X_* = G^*$ і розв'язок пари двоїстих задач (4.1.3) і (4.1.4), (кожна з яких може бути розв'язана) еквівалентний відшукуванню сідлової точки функціонала Лагранжа (4.1.2) на множині $\{\Gamma \times Q\} \times \Lambda$.

Для відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа (4.1.2) конкретизуємо двоїсту задачу (4.1.4). Для цього від задачі відшукування $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in Q} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$

перейдемо, відповідно [5, 8], до наступної задачі:

$$\min_{v \geq 0} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi).$$

Позначимо

$$G_1(\Psi) = G_1(\psi, \eta) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi). \quad (4.1.5)$$

Підставляючи до (4.1.5) вираз для $L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi)$ з (4.2), ураховуючи (4.1.1), а також той факт, що функціонал (4.1.2) є лінійним сепарабельним щодо λ (для кожного фіксованого $v \geq 0$) на множині Γ , див. [25], отримуємо

$$G_1(\psi, \eta) = \sum_{j=1}^M \eta_j b_j'' + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{\lambda_i=1, \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ i=1, \dots, N}} \left\{ (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) \right\} dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j) v_{ij}. \quad (4.1.6)$$

Як слідує з [39], в (4.6) мінімальне значення i -го, $i=1, \dots, N$, виразу, що знаходиться в фігурних дужках, для кожного $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$, досягається для $\lambda_i(x) = \lambda_{*i}(x)$, де

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

і функціонал $G(\Psi)$ приймає вид

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \min_{v \geq 0} G_1(\psi, \eta) = \\ = \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j'' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min_{v_{ij} \geq 0} (c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j) v_{ij}. \quad (4.1.8)$$

Очевидно, що для $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$ і всіх $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$ має місце

$$\min_{v_{ij} \geq 0} (c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j) v_{ij} = \begin{cases} 0, & c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j \geq 0, \\ -\infty, & c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j < 0. \end{cases}$$

Оскільки двоїста задача (4.1.4) полягає в максимізації функціоналу $G(\Psi)$ (4.1.8) на множині Λ , то його максимум має сенс шукати на множині лише тих $(\psi, \eta) \in \Lambda$, для яких $c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j'') - \psi_i - \eta_j \geq 0$. Тому двоїсту задачу (4.1.4), з урахуванням виконаних перетворень, можна сформулювати наступним чином:

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \int \min_{\Omega, k=1, \dots, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^II \rightarrow \max_{\Psi} \quad (4.1.9)$$

за умов

$$\eta_j \leq c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \psi_i, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \quad (4.1.10)$$

$$\psi \in E_N, \eta \in E_M.$$

Перепишемо умови (4.1.10) у виді

$$\eta_j = \min_{1 \leq k \leq N} (c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k), \quad j=1, \dots, M. \quad (4.1.11)$$

Підставляючи вираз (4.1.11) в (4.1.9), і тим самим, виключаючи змінну η з функціоналу $G(\Psi)$, отримуємо двоїсту задачу (4.1.4) у вигляді

$$G(\Psi) = G_2(\psi) = \int \min_{\Omega, k=1, \dots, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^{II}(\tau_k^I, \tau_j^{II}) - \psi_k) \rightarrow \max_{\psi} \quad (4.1.12)$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N. \quad (4.1.13)$$

Таким чином, переходячи від початкової задачі 4.3 (через функціонал Лагранжа (4.1.2)) до двоїстої задачі, приведеної до виду (4.1.12), (4.1.13), ми отримали вираз для першої компоненти $\lambda_*(\cdot)$ оптимального розв'язку задачі 4.3 у вигляді (4.1.7), де в якості $\psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (4.1.12), (4.1.13).

Далі, підставляючи в цільовій функціонал (4.1.1) задачі 4.3 знайдений вираз для $\lambda_*(\cdot)$ з (4.7) для $\psi = \psi^*$, переходимо до наступної задачі 4.4 відшукування другої компоненти $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ оптимального розв'язку задачі 4.3.

Задача 4.4.

$$I(\lambda_*(\cdot), v) = const + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i=1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j=1, \dots, M; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M,$$

де значення $const = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*) \rho(x) dx$ не впливає на значення точки мінімуму функції $I(\lambda_*(\cdot), v)$.

Очевидно, що задача 4.4 - це класична скінченновимірна транспортна задача, для якої виконується умова балансу $\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^II$.

Для розв'язку задачі 4.4 можна застосувати відомий метод потенціалів.

Сформулюємо теорему, що підводить підсумок нашим міркуванням.

Теорема 4.1. Перша компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*i}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$ оптимального розв'язку задачі 4.3 визначається для усіх $i=1, \dots, N$, та майже всіх $x \in \Omega$ наступним чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_{*i}^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*, \quad i \neq k, \quad k=1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

у якості $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ вибирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (4.1.4), приведеної до виду (4.1.12), (4.1.13).

Друга компонента $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM})$ відшукується як оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної транспортної задачі методом потенціалів [9]:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_{*i}^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v \quad (4.1.14)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i=1, \dots, N, \quad (4.1.15)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j'', \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.1.16)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.1.17)$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j''. \quad (4.1.18)$$

Далі наведемо алгоритм розв'язання задачі 4.3, заснований на сформульованій вище теоремі 4.1, складовими частинами якого є, з урахуванням недиференційовної функції $G_2(\psi)$, один з варіантів r -алгоритму Шора [90, 181], який застосовується для числового розв'язку двоїстої задачі (4.1.12)-(4.1.13), і метод потенціалів [9], що застосовується для розв'язання задачі (4.1.14)-(4.1.18) - відшукування значення другої компоненти оптимального розв'язку задачі 4.3.

Алгоритм розв'язку задачі 4.3

Перш ніж сформулювати алгоритм розв'язання задачі 4.3, заснований на сформульованій теоремі 4.1, визначимо i -ту, $i = 1, \dots, N$, компоненту вектора узагальненого градієнту $g_{G_2}(\psi) = (g_{G_2}^{\psi_1}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_i}(\psi), \dots, g_{G_2}^{\psi_N}(\psi))$ функції $G_2(\psi)$ задачі (4.1.12) у точці $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ наступним чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j'' q_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1.19)$$

де

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.1.20)$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}''(\tau_i^I, \tau_j^II) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}''(\tau_k^I, \tau_j^II) - \psi_k), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Опишемо алгоритм.

Алгоритм

Попередній етап. Область Ω заключаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 1$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулам (4.1.20) при $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення вектора узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулам (4.1.19) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Крок 1. алгоритму проводимо за формулою

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}(\psi^{(0)}),$$

де h_0 – величина кроку, що визначається з умови максимуму функції $G_2(\psi)$ у напрямку узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi^{(0)})$.

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після k , $k = 1, 2, \dots$, кроків алгоритму отримані значення $\psi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ у вузлах сітки.

Крок $(k + 1)$ -й.

1) обчислюємо значення $\lambda^k(x)$ у вузлах сітки за формулами (4.1.20) при $\psi = \psi^{(k)}$;

2) обчислюємо значення вектору $g_{G_2}(\psi)$ у вузлах сітки за формулами (4.1.19) при $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$;

3) проводимо обчислення за ітераційною формулою
$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi,$$

де B_{k+1}^ψ – оператор відображення перетвореного простору в основний простір E_N , причому $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^* g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k – величина

кроку, визначається з умови максимуму функції $G_2(\psi)$ у напрямку узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi^{(k)})$ в перетвореному просторі;

$$4) \quad \text{якщо умова } \|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.1.21)$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -у кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5;

5) приймаємо $\psi^* = \psi^l$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l -номер ітерації, на якій виконано умову (4.1.21);

6) розв'язуючи транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$ і $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$;

7) обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\psi)$ двоїстої задачі (4.1.12)-(4.1.13) при $\psi = \psi^*$ та, для правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу (4.1.1) задачі 4.3 за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), v_*) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{*ij}. \quad (4.1.22)$$

Завершення роботи алгоритму.

Описаний вище алгоритм реалізований для наступної модельної задачі.

Модельна задача 4.1. Деякий постачальник однорідного ресурсу (сировини), безперервно розподілений з густиною $\rho(x) = 1$ в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0 \leq x^{(1)} \leq 1, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$, поставляє його в п'ять пунктів (першого етапу) для первинної переробки (зберігання). Задані координати $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i = \overline{1,5}$, розташування цих пунктів:

$$\tau_1^I = (0.2; 0.2); \tau_2^I = (0.3; 0.5); \tau_3^I = (0.8; 0.3); \tau_4^I = (0.6; 0.8); \tau_5^I = (0.6; 0.1).$$

Задано також координати $\tau_j^{\prime\prime} = (\tau_j^{\prime\prime(1)}, \tau_j^{\prime\prime(2)})$, $j = \overline{1,3}$, пунктів споживання (пунктів другого етапу) ресурсу, переробленого (зберігався) в пунктах першого етапу:

$$\tau_1^{\prime\prime} = (0.2; 0.8); \tau_2^{\prime\prime} = (0.6; 0.4); \tau_3^{\prime\prime} = (0.8; 0.7).$$

Вартість транспортування одиниці ресурсу від постачальника з координатами (x, y) до пункту першого етапу з координатами $\tau_i^{\prime} = (\tau_i^{\prime(1)}, \tau_i^{\prime(2)})$ задано у виді:

$$c_i^{\prime}(x, \tau_i^{\prime}) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{\prime(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{\prime(2)})^2}, i = \overline{1,5}.$$

Витрати на транспортування одиниці продукції з i -го пункту першого етапу $\tau_i^{\prime} = (\tau_i^{\prime(1)}, \tau_i^{\prime(2)})$ до пункту другого етапу $\tau_j^{\prime\prime} = (\tau_j^{\prime\prime(1)}, \tau_j^{\prime\prime(2)})$ задано у виді

$$c_{ij}^{\prime\prime}(\tau_i^{\prime}, \tau_j^{\prime\prime}) = \sqrt{(\tau_i^{\prime(1)} - \tau_j^{\prime\prime(1)})^2 + (\tau_i^{\prime(2)} - \tau_j^{\prime\prime(2)})^2}, i = \overline{1,5}, j = \overline{1,3}.$$

Задано попит $b_j^{\prime\prime}$ на продукцію для j -го пункту споживання, $j = \overline{1,3}$. Крім того будем вважати, що потужність i -го, $i = \overline{1,5}$, пункту першого етапу визначається сумарним запасом ресурсу в сфері його обслуговування Ω_i і не повинна перевищувати заданих обсягів b_i^{\prime} : $\int_{\Omega} \rho(x) dx \leq b_i^{\prime}$, $i = \overline{1,5}$.

Множина Ω постачальників ресурсу можна розбивати на зони Ω_i їх обслуговування i -м, $i = \overline{1,5}$, пунктом першого етапу так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i = \overline{1,5}, j = \overline{1,3}.$$

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на сфери їх обслуговування п'ятьма пунктами першого етапу, тобто на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_5$, і визначити обсяги перевезень $v_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$, від підприємств першого етапу τ_i^{\prime} , $i = \overline{1,5}$, до пунктів споживання (пунктам другого

етапу) τ_j'' так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти первинної переробки (пункти першого етапу) і доставки переробленого ресурсу в пункти кінцевого споживання (пункти другого етапу):

$$F\left(\{\Omega_1, \dots, \Omega_5\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{53}\}\right) = \\ = \sum_{i=1}^5 \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \rightarrow \min, \quad (4.1.23)$$

і при цьому:

– весь перероблений продукт з усіх пунктів першого етапу повинен бути вивезений в пункти другого етапу:

$$\sum_{j=1}^3 v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (4.1.24)$$

– весь попит всіх пунктів другого етапу повинен бути задоволений:

$$\sum_{i=1}^5 v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (4.1.25)$$

– виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^3 b_j^{II}. \quad (4.1.26)$$

Для розв'язання сформульованої задачі (4.1.23)-(4.1.26) описаним вище алгоритмом область Ω покривалася прямокутною сіткою розміром 31x31.

В якості вихідних даних для змінних двоїстої задачі (4.1.12)-(4.1.13) були обрані $\psi_i^{(0)} = 0, i = \overline{1, 5}$. Умовою припинення розрахунків було виконання нерівності $\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\| \leq 10^{-4}$, де $(k+1)$ – номер ітерації, на якій стався останов алгоритму. Подвійні інтеграли, що зустрічаються по ходу реалізації алгоритму, обчислювалися за допомогою кубатурної формули трапецій по вузлах обраної сітки; вихідний опорний план транспортної задачі (4.1.14) - (4.1.18) відшукувався методом північно-західного кута.

В результаті роботи алгоритму за 15 ітерацій отримані наступні результати:

– оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_5$ з обсягами виробництва 0.0736; 0.3008; 0.2242; 0.2986; 0.1028 відповідно, див. рис. 4.1.

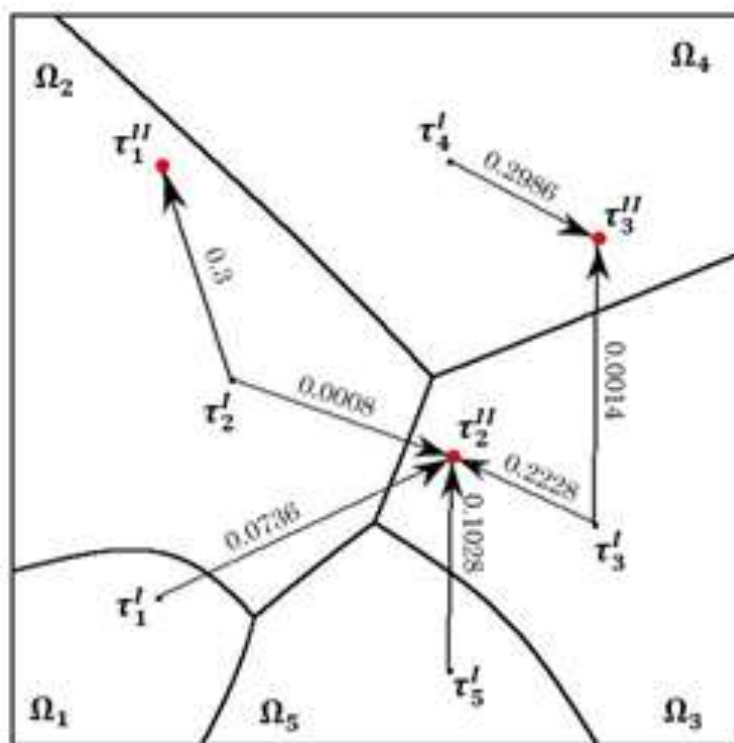


Рис.4.1. Оптимальне розбиття для модельної задачі 4.1.

Оптимальні межі між відповідними підмножинами вказані суцільними лініями;

– оптимальний план перевезень переробленого ресурсу з i -го, $i = \overline{1,5}$, пункту першого етапу до j -го, $j = \overline{1,3}$, пункту другого етапу:

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.0000, & 0.0736, & 0.0000 \\ 0.3000, & 0.0008, & 0.0000 \\ 0.0000, & 0.2228, & 0.0014 \\ 0.0000, & 0.0000, & 0.2986 \\ 0.3008, & 0.1028, & 0.0000 \end{pmatrix};$$

– мінімальне значення функціоналу (4.22) вихідної задачі 4.3:

$$I(\lambda_*(\cdot), v_*) = 0.4805;$$

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G_2(\psi^*) \approx 0.4808$.

4.2 Метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з оптимальним розміщенням центрів підмножин

У підрозділі розглядається двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу при обмеженнях у формі рівностей з розміщенням (відшукування координат) центрів підмножин у заданій множині, яка підлягає розбиттю.

Названа неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу є узагальненням, з одного боку, класичної транспортної задачі [9] на випадок, коли координати пунктів виробництва (збирання, зберігання, переробки) однорідної, неперервно розподіленої в заданій множині продукції і обсяги виробництва в цих пунктах невідомі заздалегідь, а відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини з E_n на підмножини з розміщенням (відшукування оптимальних координат) центрів цих підмножин. Більш проста двоетапна безперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розміщення з заданими положеннями центрів підмножин представлена у попередньому пункті роботи. З іншого боку, неперервно-дискретна задача розбиття-розміщення є узагальненням дискретних дветапних виробничо-транспортних задач [7, 121, 122, 166] на випадок неперервно розподіленого споживача.

Прикладні задачі, що зводяться до двоетапним неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу з розміщенням центрів підмножин

характеризуються наявністю двох етапів і полягають у визначенні зон збору неперервного розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу з одночасним відшукування їх місця розташування і обсягів перевезень переробленого продукту від підприємств першого етапу до споживачів (пунктам другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти переробки (збору, зберігання) до споживачів.

Зауважимо, що такі задачі часто зустрічаються на практиці. До їх числа відносяться: задачі, в яких у якості неперервно-розподіленого ресурсу може виступати, наприклад, природна сировина (нафта, газ, руда) або урожай сільськогосподарських культур; задачі по організації збору деревних відходів для виробництва палива з подальшим розподілом його між пунктами виробництва теплової енергії з метою мінімізації сумарних транспортних витрат; задачі оптимізації депозитно-кредитної діяльності відділень банку з метою залучення депозитів від фізичних осіб з подальшим розподілом залучених коштів між позичальниками та ін.

Розв'язок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу заснований на єдиному підході [21], який складається в зведенні вихідних нескінченновимірних задач оптимального розбиття-розподілу до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, до чисельного розв'язання яких застосовуються ефективні методи недиференційованої оптимізації - різні варіанти r -алгоритму Шора [26, 101, 178].

Постановка задачі

Нехай Ω – обмежена, замкнута, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ з $\Omega \subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини Ω на її підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на її підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij},$$

де $\tau_1^I, \dots, \tau_N^I$ - сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, званих центрами цих підмножин ($\tau_i^I \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$), причому координати центрів $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, не відомі і вимагають свого визначення; $\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}$ - деякі задані точки множини Ω ; v_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$) – вагові параметри, що виражають зв'язок між центрами підмножин $\tau_i^I \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$, і заданими точками $\tau_j^{II} \in \Omega, \tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \dots, \tau_j^{II(n)})$, $j = 1, 2, \dots, M$. Функція $\rho(x) \geq 0$ – задана обмежена, вимірна на Ω ; $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = 1, 2, \dots, N$, – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані дійсні обмежені функції, вимірні по аргументу $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)}) \in \Omega_i \subset \Omega$; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$, – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані обмежені функції, які мають сенс «відстані» між точками $\tau_i^I \in \Omega_i$ и $\tau_j^{II} \in \Omega$ у відповідній метриці простору E_n .

Тоді під двоетапною неперервно-дискретною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття-розподілу з розміщенням (відшукування

координат) центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівності будемо розуміти наступну задачу.

Задача 4.5. Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$, такі координати центрів $\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*i}^I, \dots, \tau_{*N}^I$ цих підмножин в області Ω і такий невід'ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j=1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega;$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^{II} = (\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}) \in \Omega^M.$$

Тут b_j^{II} , $j=1, \dots, M$, – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язання задачі

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}, \quad 0 \leq b_j^{II} \leq S, \quad j=1, \dots, M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має сенс обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу τ_i^I , $i=1, \dots, N$, до пунктів τ_j^{II} , $j=1, \dots, M$, кінцевого споживання (другого етапу).

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин Ω_i , $i=1, \dots, N$, дорівнюють нулю.

Означення 4.2. Трійку $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком задачі 4.5, назвемо оптимальною.

Введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}, \quad (4.2.1)$$

де вектор-функція $\lambda(\cdot)$ має вид $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_i(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$. Очевидно,

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}).$$

Перепишемо задачу 4.5 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$, у наступному вигляді.

Задача 4.6. Знайти $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v)} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$, за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega;$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Від нескінченновимірної задачі 4.6 з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями функцій $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 4.7. Знайти $\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, v) \in \Gamma_1 \times \Omega^N \times Q} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$, де

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.в. для } x \in \Omega;$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M \}.$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N;$$

$$Q = \{ v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \}.$$

Покажемо, що при кожному фіксованому $v \in Q$ задача 4.7 має розв'язок.

Дійсно, так як Γ_1 – обмежена, замкнута, опукла множина гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$, а функціонал $I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$ для кожного фіксованого $\tau^I \in \Omega^N$ і кожного фіксованого $v \in Q$ лінійний (а значить опуклий) і неперервний щодо $\lambda(\cdot)$ на Γ_1 , то в силу узагальненої теореми Вейерштрасса [5] опуклий неперервний функціонал $I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$ для фіксованих $\tau^I \in \Omega^N$ і $v \in Q$ на замкнутій, обмеженій, опуклій множині Γ_1 гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ досягає своєї нижньої грані по $\lambda(\cdot)$.

Твердження 4.4. При кожному фіксованому $\tau^I \in \Omega^N$ і кожному фіксованому $v \in Q$ обмежена, замкнена, опукла множина Γ_1 гільбертова простору $L_2^N(\Omega)$ слабо компактна і (відповідно до теореми Крейна – Мільмана [1]) містить принаймні одну крайню точку.

Твердження 4.5. Серед множини точок Γ_1^* у яких лінійний відносно $\lambda(\cdot)$ функціонал $I(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$ досягає при кожному фіксованому $\tau^I \in \Omega^N$ і кожному фіксованому $v \in Q$ мінімального за $\lambda(\cdot)$ значення на множині Γ_1 , знайдеться хоча б одна крайня точка множини Γ_1 .

Твердження 4.6. Крайні точки множини Γ_1 являють собою характеристичні функції деяких підмножин Ω_i , що утворюють розбиття множини Ω для кожного фіксованого $\tau^I \in \Omega^N$ і кожного фіксованого $v \in Q$.

З тверджень 4.4-4.6 витікає, що при кожному фіксованому $\tau^I \in \Omega^N$ і кожному фіксованому $v \in Q$ в множині оптимальних рішень задачі 4.7 містяться оптимальні розв'язки задачі 4.6, що дозволяє в подальшому перейти до розгляду задачі 4.7.

Обґрунтування методу розв'язання задачі 4.7

Введемо функціонал Лагранжа для задачі 4.7 наступним чином:

$$L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(b_j^H - \sum_{i=1}^N v_{ij} \right), \quad (4.2.2)$$

де $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N; \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_M)$ – $(N + M)$ -вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma$ м.в. для $x \in \Omega$; $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N$; $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ – $N \times M$ -вимірний вектор дійсних невід'ємних чисел.

Означення 4.3. Пару елементів $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\}, \Psi^*)$ назвемо сідловою точкою функціоналу (4.2.2) на множині $\{\Gamma \times \Omega^N \times Q\} \times \Lambda$, де

$$Q = \left\{ v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\},$$

$$\Lambda = \left\{ \Psi = (\psi; \eta) \in E_{N+M} : \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_M) \in E_M \right\},$$

якщо $L(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\}, \Psi) \leq L(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*\}, \Psi^*) \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi^*)$ для $\lambda(\cdot) \in \Gamma$,

$\tau^I \in \Omega^N, v \in Q, \Psi \in \Lambda$,

або

$$\begin{aligned} L\left(\{\lambda_*(\cdot), \tau^I, \nu_*\}, \Psi^*\right) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} \max_{\Psi \in \Lambda} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right) = \\ &= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right). \end{aligned}$$

Введемо функціонали

$$X\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}\right) = \max_{\Psi \in \Lambda} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right), \quad \{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q,$$

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі

$$X\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}\right) \rightarrow \min, \quad \{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\} \in \Gamma \times \Omega^N \times Q. \quad (4.2.3)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda. \quad (2.3.4)$$

Задачу (4.2.3) назвемо прямою, задачу (4.2.4) – двоїстою до задачі (4.2.3).

Неважко показати (за аналогією з [8]), що задачі (4.2.3), (4.2.4) пов'язані співвідношенням подвійності $X_* = G^*$ і розв'язок пари двоїстих задач (4.2.3) і (4.2.4), (кожна з яких є розв'язуваною) еквівалентний відшукуванню сідлової точки функціонала Лагранжа (4.2.2) на множині $\{\Gamma \times \Omega^N \times Q\} \times \Lambda$.

Для відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа (4.2.2) конкретизуємо двоїсту задачу (4.2.4). Для цього від задачі відшукування

$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^I) \in \Gamma \times \Omega^N, \nu \in Q} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right)$ перейдемо, відповідно [8], до наступної задачі:

при кожному фіксованому $\Psi \in \Lambda$ знайти:

$$\min_{\tau^I \in \Omega^N} \min_{\nu \geq 0} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right).$$

Позначимо

$$G_1\left(\tau^I, \nu, \Psi\right) = G_1\left(\tau^I, \nu, \{\psi, \eta\}\right) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L\left(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi\right). \quad (4.2.5)$$

Підставляючи в (4.2.5) вираз для $L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, \nu\}, \Psi)$ з (4.2.2), враховуючи (4.2.1), а також той факт, що функціонал (4.2.2) є лінійним сепарабельним по λ на множині Γ при кожному фіксованому $\tau^I \in \Omega^N$ і при кожному фіксованому $\nu \geq 0$, див. [8], отримуємо

$$G_1(\tau^I, \nu, \{\psi, \eta\}) = \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{\text{II}} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ i=1, \dots, N}} \left\{ (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) \right\} dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{\text{II}}(\tau_i^I, \tau_j^{\text{II}}) - \psi_i - \eta_j) \nu_{ij}. \quad (4.2.6)$$

Легко бачити, див. [8], що в (4.2.6) мінімальне значення i -го, $i = 1, \dots, N$, виразу, що стоїть у фігурних дужках, для кожного $\tau^I \in \Omega^N$, $\nu \geq 0$ і кожного $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$, досягається при $\lambda_i(x) = \lambda_{*i}(x)$, де

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, \\ & i \neq k \text{ м.в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

і функціонал $G(\Psi)$, з урахуванням позначення

$G_2(\tau^I, \{\psi, \eta\}) = \min_{\nu \geq 0} G_1(\tau^I, \nu, \{\psi, \eta\})$, приймає вид

$$G(\Psi) = G(\psi, \eta) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_2(\tau^I, \{\psi, \eta\}) = \\ = \min_{\tau^I \in \Omega^N} \left[\int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{\text{II}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min_{\nu_{ij} \geq 0} (c_{ij}^{\text{II}}(\tau_i^I, \tau_j^{\text{II}}) - \psi_i - \eta_j) \nu_{ij} \right]. \quad (4.2.8)$$

Очевидно, що для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, усіх $\tau^I \in \Omega^N$ і усіх $\Psi = (\psi, \eta) \in \Lambda$ має місце

$$\min_{v_{ij} \geq 0} \left(c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \right) v_{ij} = \begin{cases} 0, & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \geq 0, \\ -\infty, & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j < 0. \end{cases}$$

Оскільки двоїста задача (4.2.4) полягає в максимізації функціоналу $G(\Psi)$ (4.2.8) на множині Λ , то його максимум має сенс шукати на множині лише тих $\Psi = (\psi, \eta)$ з Λ , для яких $c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i - \eta_j \geq 0$. Тому двоїсту задачу (4.2.4), з урахуванням виконаних перетворень, можна сформулювати наступним чином:

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= G(\psi, \eta) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_2(\tau^I, \{\psi, \eta\}) = \\ &= \min_{\tau^I \in \Omega^N} \left[\int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^H \right] \rightarrow \max_{\Psi} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

за умов

$$\eta_j \leq c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \quad (4.2.10)$$

$$\psi \in E_N, \eta \in E_M.$$

Перепишемо умови (4.2.10) у виді

$$\eta_j = \min_{1 \leq k \leq N} \left(c_{kj}^H(\tau_k^I, \tau_j^H) - \psi_k \right), \quad j=1, \dots, M. \quad (4.2.11)$$

Підставляючи вираз (4.2.11) в (4.2.9), і тим самим, виключаючи змінну η з функціонала $G(\Psi)$, отримуємо двоїсту задачу (4.2.4) у вигляді

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_2(\tau^I, \psi) = \\ &= \min_{\tau^I \in \Omega^N} \left[\int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} \left(c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k \right) \rho(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^M b_j^H \min_{k=1, \dots, N} \left(c_{kj}^H(\tau_k^I, \tau_j^H) - \psi_k \right) \right] \rightarrow \max_{\psi} \end{aligned}, \quad (4.2.12)$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N. \quad (4.2.13)$$

Таким чином, переходячи від початкової задачі 4.7 (через функціонал Лагранжа (4.2.2)) до двоїстої задачі, приведеної до виду (4.2.12)-(4.2.13), ми

отримали вираз для компоненти $\lambda_*(\cdot)$ оптимального розв'язку задачі 4.7 у вигляді (4.2.7), де в якості (τ^I, ψ) вибирається оптимальний розв'язок (τ_*^I, ψ^*) двоїстої задачі (4.2.12)-(4.2.13).

Далі, підставляючи в цільовий функціонал (4.2.1) вихідної задачі 4.7 знайдений вираз для $\lambda_*(\cdot)$ з (4.2.7) при $(\tau^I, \psi) = (\tau_*^I, \psi^*)$, переходимо до наступної задачі 4.8 відшукування компоненти $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$ оптимального розв'язку вихідної задачі 4.7.

Задача 4.8.

$$I(\lambda_*(\cdot), v) = \text{const} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^H(\tau_{*i}^I, \tau_j^H) v_{ij} \rightarrow \min_v$$

за умов

$$\sum_j^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

де значення $\text{const} = \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*) \rho(x) dx$ не впливає на значення точки мінімуму функції $I(\lambda_*(\cdot), v)$.

Очевидно, задача 4.8 – це класична скінченновимірна транспортна задача, для якої виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^H.$$

Для розв'язання задачі 4.8 можна застосувати відомий метод потенціалів [9].

Сформулюємо теорему, що підводить підсумок нашим міркуванням.

Теорема 4.2.. Компонента $\lambda_*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*i}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$ оптимального розв'язку задачі 4.7 визначається для всіх $i=1, \dots, N$, і майже всіх $x \in \Omega$ таким чином:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_{*i}^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_{*k}^I) + \psi_k^*, i \neq k, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості $(\tau_{*1}^I, \dots, \tau_{*N}^I)$, $(\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ вибирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (4.2.4), приведені до виду (4.2.12), (4.2.13).

Компонента $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM})$ відшукується як оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної транспортної задачі методом потенціалів:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min_v \quad (4.2.14)$$

за умов

$$\sum_j v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.15)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.2.16)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.2.17)$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}. \quad (4.2.18)$$

Далі наведемо алгоритм розв'язання задачі 4.7, заснований на сформульованій вище теоремі 4.2., складовими частинами якого є (з урахуванням недиференційовної функції $G_2(\tau^I, \psi)$) один із варіантів r -алгоритму Шора Н.З. – метод узагальнених псевдоградієнтів, див. [26], який застосовується для числового розв'язання двоїстої задачі (4.2.12)-(4.2.13), і метод потенціалів [9], що

застосовується для розв'язку задачі (4.2.14)-(4.2.18) відшукування значення компоненти v_* оптимального розв'язку задачі 4.7.

Алгоритм розв'язання задачі.

Перш ніж сформулювати алгоритм розв'язання задачі 4.7, заснований на сформульованій вище теоремі 4.2, визначимо i -ту, $i=1, \dots, N$, компоненту вектора узагальненого псевдоградієнту

$$\begin{aligned} g_{G_2}(\tau^I, \psi) &= (g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi}(\tau^I, \psi)) = \\ &= (g_{G_2}^{\tau_1^I}(\tau^I, \psi), \dots, g_{G_2}^{\tau_N^I}(\tau^I, \psi), -g_{G_2}^{\psi_1}(\tau^I, \psi), \dots, -g_{G_2}^{\psi_N}(\tau^I, \psi)) \end{aligned}$$

функції $G_2(\tau^I, \psi)$ задачі (4.2.12)-(4.2.13) в точці $(\tau^I, \psi) = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I, \psi_1, \dots, \psi_N)$

наступним чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\tau^I, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^H q_{ij}), \quad i=1, \dots, N, \quad (4.2.19)$$

де

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^H(\tau_k^I, \tau_j^H) - \psi_k), \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$g_{G_2}^{\tau_i^I} = \int_{\Omega} \rho(x) g_{c_i^I}^{\tau_i^I}(\tau, x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^M (b_j^H r_{ij}), \quad i=1, \dots, N, \quad (4.2.20)$$

де

$$r_{ij} = \begin{cases} g_{c_{ij}^H}^{\tau_i^I}(\tau_i^I, \tau_j^H), & c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) - \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} (c_{kj}^H(\tau_k^I, \tau_j^H) - \psi_k), \quad j=1, \dots, M, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $g_{c_i^I}^{\tau_i^I}(\tau^I, x)$ - i -та компонента, $i=1, \dots, N$, N - вимірного вектора узагальненого градієнту $g_{c_i^I}^{\tau_i^I}(\tau^I, x)$ функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$ в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$;

$g_{c_{ij}^I}^{\tau_i^I, \tau_j^I}$ - i -та компонента, $i=1, \dots, N$, N - вимірного вектора узагальненого градієнта $g_{c_{ij}^I}^{\tau_i^I, \tau_j^I}$ функції $c_{ij}^I(\tau_i^I, \tau_j^I)$ в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$;

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* \leq c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k, \\ & i \neq k, \text{ м.в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Опишемо алгоритм.

Алгоритм

Попередній етап. Область Ω заключаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 1$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкові наближення $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулам (4.2.21) при $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення вектора узагальненого псевдоградієнту $g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ в вузлах сітки за формулами (4.2.19)-(4.2.20) при $\tau^I = \tau^{I(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Вибираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$, (як правило, h_0 вибирається рівним 1).

Перший крок алгоритму проводимо по формулі

$$\begin{aligned} \tau^{I(1)} &= P_{\Omega^N} \left[\tau^{I(0)} - h_0 g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}) \right], \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}^{\psi}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}), \end{aligned}$$

P_{Ω^N} - оператор проектування на Ω^N .

Переходимо до другого кроку. Нехай в результаті обчислень після k , $k=1, 2, \dots$, кроків алгоритму отримані значення $\tau^{I(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\lambda^{k-1}(x)$ у вузлах сітки.

Опишемо $(k+1)$ -й крок алгоритму.

1. Обчислюємо значення $\lambda^k(x)$ в вузлах сітки за формулами (4.2.21) при $\tau^I = \tau^{I(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

2. Обчислюємо значення вектора $g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ в вузлах сітки за формулами (4.2.19)-(4.2.20) при $\tau^I = \tau^{I(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$.

3. Проводимо $(k+1)$ -й крок r -алгоритму Шора, ітераційна формула якого має вигляд

$$\begin{aligned}\tau^{I(k+1)} &= P_{\Omega^N} \left[\tau^{I(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau^I} \tilde{g}_{G_2}^{\tau^I} \right], \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_{G_2}^{\psi},\end{aligned}$$

де $B_{k+1}^{\tau^I}$, B_{k+1}^{ψ} – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_N , причому $B_0^{\tau^I} = I_N$, $B_0^{\psi} = I_N$ (одична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^{\tau^I} = B_{k+1}^{*\tau^I} g_{G_2}^{\tau^I}(\tau^{I(k)}, \psi^{(k)})$, $\tilde{g}_{G_2}^{\psi} = B_{k+1}^{*\psi} g_{G_2}^{\psi}(\tau^{I(k)}, \psi^{(k)})$, h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється за умови мінімуму різниці $\left[G_2(\tau^{I(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_2(\tau^{I(k)}, \psi^{(k-1)}) \right]$ у напрямку узагальненого антипсевдоградієнта $-g_{G_2}(\tau^I, \psi)$ в перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\| (\tau^{I(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{I(k)}, \psi^{(k)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.2.22)$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -му кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5.

5. Вважаємо $\tau_*^I = \tau^{I(l)}$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l -номер ітерації, на якій виконана умова (4.2.22).

6. Розв'язуючи транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$, $\tau^I = \tau_*^I$ і $\psi = \psi^*$, знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$.

7. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\tau^I, \psi)$ двоїстої задачі (4.2.12) - (4.2.13) при $\tau^I = \tau_*^I$, $\psi = \psi^*$ та, для контролю правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу (4.2.1) задачі 4.7 за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_{*i}^I) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_{*i}^I, \tau_j^{II}) v_{*ij}. \quad (4.2.23)$$

Алгоритм описано.

Описаний алгоритм реалізований для наступних двох модельних задач.

Модельна задача 4.2. Деякий постачальник однорідного ресурсу (сировини), безперервно розподілений з густиною $\rho(x) = 1$ в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \leq x^{(1)} \leq 1, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$, поставляє його в два пункту (I-го етапу) для первинної переробки (зберігання). При цьому, координати розташування цих пунктів $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i = 1, 2$, можуть бути заздалегідь невідомі. Задані координати $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)})$, $j = \overline{1, 6}$, пунктів споживання (пунктів II-го етапу) ресурсу, переробленого (зберігався) в пунктах I-го етапу, і попит b_j^{II} на продукцію для j -го пункту споживання, $j = \overline{1, 6}$.

Вартість транспортування одиниці ресурсу від постачальника з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ до пункту I-го етапу з координатами $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ задана у виді:

$$c_i^I(x, \tau_i^I) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{I(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{I(2)})^2}, \quad i = 1, 2.$$

Витрати на транспортування одиниці продукції з i -го пункту I-го етапу $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ до пункту II-го етапу $\tau_j^II = (\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)})$ задані у виді

$$c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^II) = \sqrt{(\tau_i^{I(1)} - \tau_j^{II(1)})^2 + (\tau_i^{I(2)} - \tau_j^{II(2)})^2}, \quad i=1,2, \quad j=\overline{1,6}.$$

Крім того будемо вважати, що потужність i -го, $i=1,2$, пункту I-го етапу визначається сумарним запасом ресурсу в сфері його обслуговування Ω_i и не повинна перевищувати заданих обсягів b_i^I : $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i^I$, $i=1,2$. Числові значення вхідних даних задачі представлені в табл. 4.1.

Множину Ω постачальників ресурсу можна розбивати на області Ω_i , кожна з яких обслуговується тільки одним, i -м, $i=1,2$, пунктом I-го етапу так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^2 \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0.$$

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на області їх обслуговування двома пунктами I-го етапу, тобто на підмножини Ω_1, Ω_2 , знайти координати розташування пунктів I-го етапу $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i=1,2$, в області Ω (в разі, коли вони не задані) і визначити обсяги перевезень $v_{ij} \geq 0$, $i=1,2$, $j=\overline{1,6}$, з пунктів I-го етапу τ_i^I , $i=1,2$, в пункти споживання (пункти II-го етапу) τ_j^II , $j=\overline{1,6}$, так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти первинної переробки (пункти I-го етапу) і доставки переробленого ресурсу з пунктів I-го етапу в пункти кінцевого споживання (пункти II-го етапу):

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2\}, \{\tau_1^I, \tau_2^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{26}\}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^6 c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^II) v_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.2.24)$$

і при цьому:

– весь перероблений продукт з усіх пунктів I-го етапу повинен бути вивезений в пункти II-го етапу:

$$\sum_{j=1}^6 v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1,2, \quad (4.2.25)$$

– весь попит всіх пунктів II-го етапу повинен бути задоволений:

$$\sum_{i=1}^2 v_{ij} = b_j^{\text{II}}, \quad j=\overline{1,6}, \quad (4.2.26)$$

– виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^6 b_j^{\text{II}}. \quad (4.2.27)$$

Як було зазначено вище в умові завдання, координати розташування пунктів I-го етапу $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i=1,2$, можуть бути як задані, так і заздалегідь невідомі.

На рис. 4.2 наведено розв'язок сформульованої задачі описаним вище алгоритмом для випадку заданих фіксованих координат $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i=1,2$, розташування пунктів I-го етапу.

В якості вхідних даних для змінних $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ двоїстої задачі (4.2.12) - (4.2.13) були обрані $\psi_i^{(0)} = 0$, $i=1,2$. Умовою припинення розрахунків було виконання нерівності $\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\| \leq \varepsilon$, де k ($k=0,1,2,\dots$) – номер ітерації; $\varepsilon > 0$ – задана точність обчислень; $\|\cdot\|$ – евклідова норма.

В результаті роботи алгоритму, з точністю $\varepsilon=0.0001$, за 18 ітерацій отримано оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини Ω_1, Ω_2 . Оптимальні межі між відповідними підмножинами вказані на рис. 4.2 суцільними лініями. Для випадку заданих координат пунктів I-го етапу, як видно з рис. 4.2, весь обсяг переробленого ресурсу з пунктів I-го

етапу вивозиться в пункти II-го етапу, тобто виконується умова балансу (4.2.27). Обсяги перевезень на рис. 4.2 вказані над відповідними стрілками, спрямованими від пунктів I-го етапу до пунктів II-го етапу.

Числові результати розв'язання модельної задачі 4.2 для випадку заданих координат пунктів I-го етапу наведені в другому стовпчику табл. 4.1. Оптимальний план транспортування переробленого ресурсу з i -го, $i=1,2$, пункту I-го етапу до j -го, $j=\overline{1,6}$, пункту II-го етапу має вигляд:

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.0000, 0.0000, 0.1497, 0.0000, 0.0000, 0.0000 \\ 0.1500, 0.1500, 0.0003, 0.1500, 0.1500, 0.2500 \end{pmatrix}.$$

Для випадку розв'язання модельної задачі 4.2 з відшукування оптимальних координат пунктів I-го етапу описаним вище алгоритмом, на відміну від попереднього випадку, в якому τ_i^I , $i=1,2$, були задані, як початкові значення для змінних τ_i^I и ψ_i двоїстої задачі (4.2.12)-(4.2.13) були обрані: $\tau_i^{I(0)} = 0$ и $\psi_i^{(0)} = 0$, $i=1,2$. Умовою припинення розрахунків було виконання нерівності $\|(\tau^{I(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{I(k)}, \psi^{(k)})\| \leq \varepsilon$, де k ($k=0,1,2,\dots$) – номер ітерації.

В результаті роботи алгоритму, з точністю $\varepsilon=0.0001$, за 41 ітерацію отримано оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини Ω_1, Ω_2 . Оптимальні межі між відповідними підмножинами вказані на рис. 4.3 суцільними лініями. Як і у випадку заданих координат пунктів I-го етапу, весь обсяг переробленого ресурсу з пунктів I-го етапу вивозиться до пунктів II-го етапу, див. рис. 4.3, тобто виконується умова балансу (4.2.27).

Числові результати розв'язання модельної задачі 4.2 для випадку з відшукуванням координат пунктів I-го етапу наведені в третьому стовпці табл. 4.1. Оптимальний план транспортування переробленого ресурсу з i -го пункту I-го етапу до j -го пункту II-го етапу має вигляд:

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.0612, 0.0000, 0.1500, 0.1500, 0.0000, 0.2500 \\ 0.0888, 0.1500, 0.0000, 0.0000, 0.1500, 0.0000 \end{pmatrix}.$$

З рис. 4.3 і табл.4.1 в результаті оптимального розміщення пунктів I-го етапу витікає, що: а) оптимальне значення цільового функціоналу вихідної задачі з оптимально розміщеними пунктами I-го етапу менше, ніж оптимальне значення цільового функціоналу у випадку з фіксованими центрами підмножин; б) оптимально розміщені пункти I-го етапу і збіглися із заданою точністю з деякими пунктами II-го етапу, а саме, збіглося з, збіглося з, що логічно, тому що мінімальна сумарна вартість транспортування досягається в разі, якщо пункти I-го етапу розміщені безпосередньо в пунктах II-го етапу. При цьому, попит в тих пунктах II-го етапу, в яких були розміщені пункти I-го етапу, був повністю задоволений, а надлишки переробленого ресурсу в пунктах I-го етапу були розподілені між іншими пунктами II-го етапу, що показано на рис 4.3 відповідними стрілками, із зазначеними над ними обсягами перевезень.

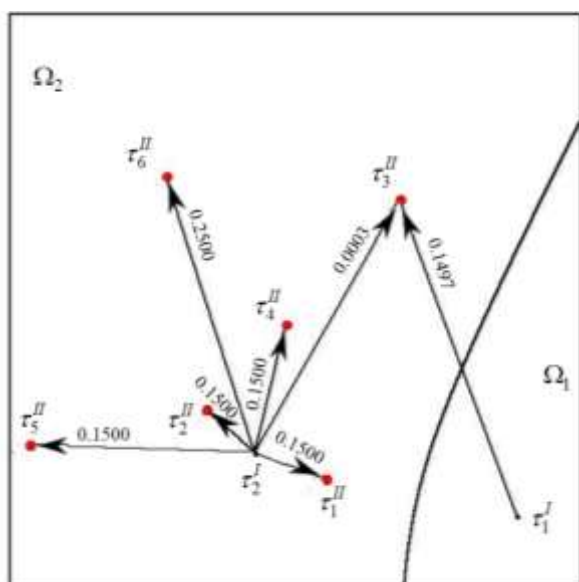


Рис. 4.2. Оптимальний розв'язок модельної задачі 4.2 із заданими пунктами I-го етапу

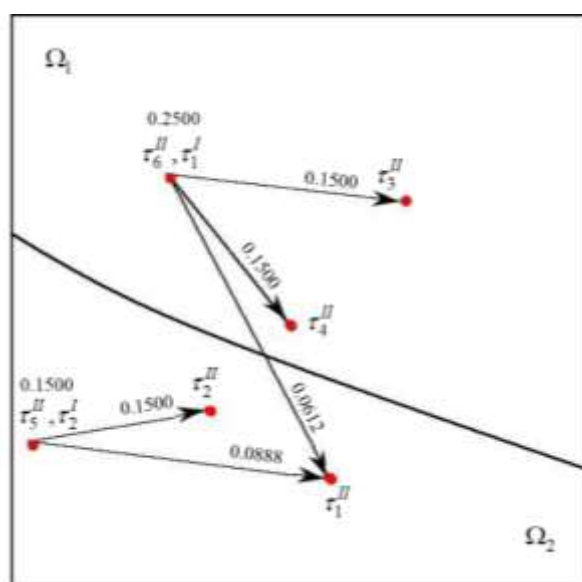


Рис. 4.3. Оптимальний розв'язок модельної задачі 4.2 з оптимально розміщеними пунктами I-го етапу

Таблиця 4.1. – Числові результати розв’язання модельної задачі 4.2

| | Випадок із заданими координатами пунктів I-го етапу | Випадок з відшукуванням оптимальних координат пунктів I-го етапу |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Задані координати пунктів I-го етапу: | $\tau_1^I = (0.89; 0.12);$ $\tau_2^I = (0.43; 0.23);$ | – |
| Задані координати пунктів II-го етапу: | $\tau_1^{II} = (0.55; 0.19); \tau_2^{II} = (0.34; 0.31); \tau_3^{II} = (0.68; 0.68);$ $\tau_4^{II} = (0.48; 0.46); \tau_5^{II} = (0.03; 0.25); \tau_6^{II} = (0.27; 0.72)$ | |
| Заданий попит в пунктах II-го етапу: | $b_1^{II} = 0.15; b_2^{II} = 0.15; b_3^{II} = 0.15; b_4^{II} = 0.15; b_5^{II} = 0.15;$ $b_6^{II} = 0.25$ | |
| Кількість ітерацій: | 18 | 41 |
| Максимальне значення функціоналу двоїстої задачі: | $G(\psi^*) = 0.7611$ | $G(\psi^*) = 0.6507$ |
| Мінімальне значення функціоналу вихідної задачі | $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = 0.7611$ | $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = 0.6508$ |
| Оптимальні потужності кожного з пунктів I-го етапу: | $b_1^I = 0.1497;$ $b_2^I = 0.8503$ | $b_{*1}^I = 0.6111;$ $b_2^I = 0.3889$ |
| Оптимальні координати розміщених пунктів I-го етапу: | – | $\tau_{*1}^I = (0.27; 0.72);$ $\tau_{*2}^I = (0.03; 0.25);$ |

Достовірність результатів обчислень з використанням описаного алгоритму підтверджується збігом із заданою точністю максимального значення двоїстого функціоналу $G(\psi^*)$ і мінімального значення прямого функціонала $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*)$ на оптимальних розв’язках в обох випадках, як із заданими пунктами I-го етапу, так і оптимально розміщеними пунктами I-го етапу в області Ω .

Модельна задача 4.3. Постановка задачі 4.3 аналогічна постановці модельної задачі 4.2, тільки деякий постачальник однорідного ресурсу поставляє його в п'ять пунктів I-го етапу для первинної переробки (зберігання), а з пунктів I-го етапу перероблений ресурс розподіляється в три пункти II-го етапу. Числові значення вхідних даних задачі 4.3 представлені в табл. 4.2.

На рис. 4.4 приведено розв'язок сформульованої задачі 4.3 описаним вище алгоритмом для випадку заданих координат розташування пунктів I-го етапу. В результаті роботи алгоритму, з точністю $\varepsilon=0.0001$, за 15 ітерацій отримано оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_5$. Оптимальні межі між відповідними підмножинами вказані на рис. 4.4 суцільними лініями. Як і в модельній задачі 4.2 у випадку із заданими координатами пунктів I-го етапу, весь обсяг переробленого ресурсу з пунктів I-го етапу вивозиться в пункти II-го етапу, див. рис. 4.4, тобто виконується умова балансу.

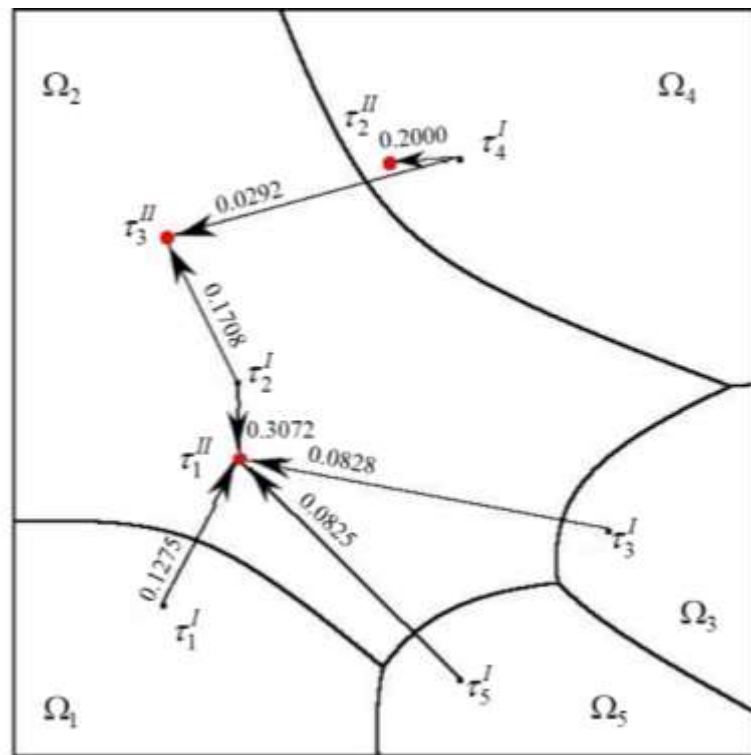


Рис. 4.4. Оптимальний розв'язок модельної задачі 4.3 із заданими пунктами I-го етапу

Таблиця 4.2. – Числові результати розв'язання модельної задачі 4.3

| | Випадок із заданими координатами пунктів I-го етапу | | Випадок із відшуканням оптимальних координат пунктів I-го етапу |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Задані координати пунктів I-го етапу: | $\tau_1^I = (0.20; 0.20); \tau_2^I = (0.30; 0.50);$ $\tau_3^I = (0.80; 0.30); \tau_4^I = (0.60; 0.80);$ $\tau_5^I = (0.60; 0.10)$ | | – |
| Задані координати пунктів II-го етапу: | $\tau_1^{II} = (0.30; 0.40); \tau_2^{II} = (0.50; 0.80); \tau_3^{II} = (0.20; 0.70)$ | | |
| Заданий попит пунктів II-го етапу: | $b_1^{II} = 0.60; b_2^{II} = 0.20; b_3^{II} = 0.20$ | | |
| Кількість ітерацій: | 36 | | 237 |
| Максимальне значення функціоналу двоїстої задачі: | $G(\psi^*) = 0.4405$ | | $G(\psi^*) = 0.3111$ |
| Мінімальне значення функціоналу вихідної задачі | $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = 0.4405$ | | $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*^I, v_*) = 0.3113$ |
| Оптимальні потужності кожного з пунктів I-го етапу: | $b_{*1}^I = 0.1275; b_{*2}^I = 0.4780;$ $b_{*3}^I = 0.0828; b_{*4}^I = 0.2292;$ $b_{*5}^I = 0.0825$ | | $b_{*1}^I = 0.5989; b_{*2}^I = 0.0005;$ $b_{*3}^I = 0.0011; b_{*4}^I = 0.2003;$ $b_{*5}^I = 0.1992$ |
| Оптимальні координати розміщених пунктів I-го етапу: | – | $\tau_{*1}^I = (0.3000; 0.4000);$ $\tau_{*2}^I = (0.9594; 0.9964); \tau_{*3}^I = (0.3642; 0.9719);$ $\tau_{*4}^I = (0.2000; 0.7000); \tau_{*5}^I = (0.5000; 0.8000)$ | |

Числові результати розв'язку модельної задачі 4.3 для випадку заданих координат пунктів I-го етапу наведені в другому стовпчику табл. 4.2. Оптимальний план транспортування переробленого ресурсу з i -го, $i = \overline{1, 5}$, пункту I-го етапу до j -го, $j = \overline{1, 3}$, пункту II-го етапу має вигляд:

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.1275, 0.0000, 0.0000 \\ 0.3072, 0.0000, 0.1708 \\ 0.0828, 0.0000, 0.0000 \\ 0.0000, 0.2000, 0.0292 \\ 0.0825, 0.0000, 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Для випадку розв'язання модельної задачі 4.3 з відшукуванням оптимальних координат пунктів I-го етапу описаним вище алгоритмом, з точністю $\varepsilon = 0.0001$, за 237 ітерацій отримано оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_5$. Як і у випадку заданих координат пунктів I-го етапу, весь обсяг переробленого ресурсу з пунктів I-го етапу вивозиться до пунктів II-го етапу, див. рис. 4.5, тобто виконується умова балансу.

Числові результати розв'язку модельної задачі 4.3 для випадку з відшукуванням координат пунктів I-го етапу наведені в третьому стовпці табл. 4.3. Оптимальний план транспортування переробленого ресурсу з i -го, $i = \overline{1,5}$, пункту I-го етапу до j -го, $j = \overline{1,3}$, пункту II-го етапу має вигляд:

$$v_* = \begin{pmatrix} 0.5989, 0.0000, 0.0000 \\ 0.0000, 0.0005, 0.0000 \\ 0.0008, 0.0003, 0.0000 \\ 0.0003, 0.0000, 0.2000 \\ 0.0000, 0.1992, 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Так як при розподілі переробленого ресурсу від пунктів I-го етапу в пункти II-го етапу отримані обсяги v_{*2j} , $j = \overline{1,3}$, і v_{*3j} , $j = \overline{1,3}$, перевезень з пунктів τ_{*2}^I і τ_{*3}^I , відповідно, є величинами одного порядку малості із заданою точністю обчислень $\varepsilon = 0.0001$, то, з урахуванням фізичного змісту задачі, значеннями цих обсягів в межах зазначеної точності можна знехтувати.

Тоді, з урахуванням вищесказаного, розв'язок модельної задачі 4.3 з відшукування оптимальних координат розташування пунктів I-го етапу може бути

представлено у вигляді, зображеному на рис. 4.6. З рис. 4.6 видно, що 2-й і 3-й пункти I-го етапу не функціонують, тому що їх обсягами змогли знехтувати в межах заданої точності.

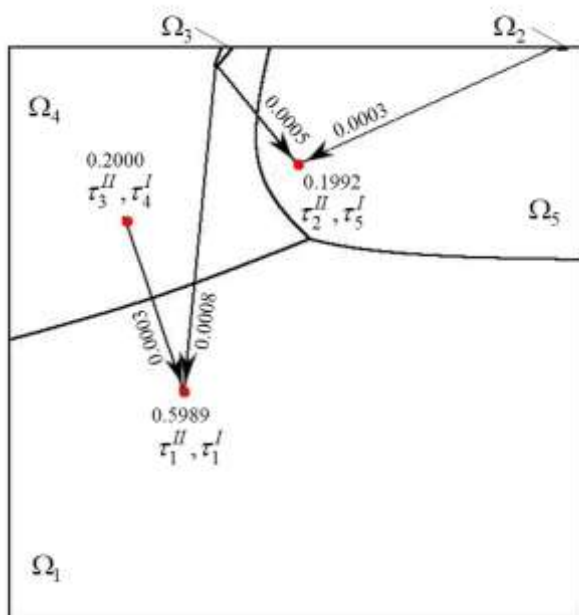


Рис. 4.5. Оптимальний розв'язок модельної задачі 4.2 з оптимально розміщеними пунктами I-го етапу

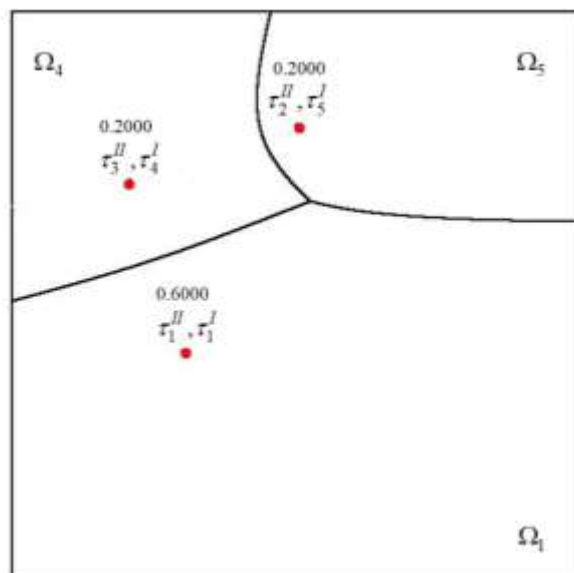


Рис. 4.6. Розв'язок задачі 4.2, представлений на рис. 4.5, без пунктів, обсягами яких можна знехтувати

Відзначимо, що для модельної задачі 4.2, також як і для модельної задачі 4.3, отримано наступне: а) оптимальне значення цільового функціоналу вихідної задачі з оптимально розміщеними пунктами I-го етапу менше, ніж оптимальне значення цільового функціоналу у випадку з фіксованими пунктами; б) оптимально розміщені пункти I-го етапу τ_1^I , τ_4^I і τ_5^I збіглися із заданою точністю до пунктів II-го етапу, а саме, τ_1^I збіглося з τ_1^II , τ_4^I – з τ_3^II , τ_5^I – з τ_2^II . При цьому, попит в тих пунктах II-го етапу, в яких були розміщені пункти I-го етапу, був повністю задоволений.

4.3 Алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами

У цьому підрозділі запропоновано подальший розвиток теорії оптимального розбиття множин із E_n на випадок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу в умовах невизначеності вхідних даних, які часто зустрічаються на практиці. Відзначимо, що класична скінченновимірна транспортна задача розглядається в роботі [9, 175], дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі розглядаються в роботі [91]. В роботах [14, 15] представлена класична скінченновимірна транспортна задача в умовах невизначеності.

Запропонована неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу узагальнює двоетапну неперервно-дискретну задачу оптимального розбиття-розподілу при обмеженнях у вигляді рівностей та заданим положенням центрів підмножин, яка розглянута в [31], на випадок, коли деякі параметри задачі можуть бути задані неповно, неточно, недостовірно. Тоді дані параметри можна розглядати як лінгвістичні змінні. Для їх відновлення використовується метод нейролінгвістичній ідентифікації невідомих складних, нелінійних залежностей [30]. Запропоновано метод розв'язання сформульованої задачі, який базується на використанні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень тих параметрів задачі, які задані нечітко, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена, замкнута, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}. \quad (4.3.1)$$

В (4.3.1) функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = 1, \dots, N$, є функціями відстані між точками x і τ_i^I для I-го етапу та визначаються як одна з метрик [52]:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} - \text{евклідова}, \quad (4.3.2)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{k=1}^n |x^{(k)} - \tau_i^{(k)}| - \text{манхеттенська}, \quad (4.3.3)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{k=1, \dots, n} \{ |x^{(k)} - \tau_i^{(k)}| \} - \text{Чебишева}; \quad (4.3.4)$$

функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, є функціями відстані між точками τ_i^I і τ_j^{II} для II-го етапу, які визначаються аналогічно функціям відстані I-го етапу.

Для практичних задач відстані між споживачами і підприємствами I-го етапу, а також відстані між підприємствами I-го та II-го етапів можуть істотно відрізнятися від відстаней, що розраховуються за допомогою «формальних»

метрик (4.3.2)-(4.3.4). Ці відмінності можуть бути задані нечітко за допомогою множника – вектора нечітких параметрів $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N)$ для кожної функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = 1, \dots, N$ та вектора нечітких параметрів $\tilde{w} = (\tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{NM})$ для кожної функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

Тоді функціонал (4.3.1) запишемо у виді

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}, \tilde{a}, \tilde{w}) = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \tilde{a}_i c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tilde{w}_{ij} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}. \quad (4.3.5)$$

Перш ніж формулювати математичну постановку двоетапної неперервно-дискретної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття-розподілу на випадок заданих координат центрів підмножин і при обмеженнях у вигляді рівностей, знімемо нечіткість у функціоналі (4.3.5) за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації, який описаний у другому розділі дисертації.

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N$, $\tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{NM}$ позначимо їх відновленні значення як u та розглянемо функціональну залежність виходу u від входів z_1, \dots, z_q об'єкта ідентифікації у виді:

$$u = u(z_1, \dots, z_q), \quad (4.3.6)$$

тут z_1, \dots, z_q - фактори, що впливають на u , та можуть бути задані нечітко.

Як зазначено у другому розділі роботи для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів z_1, \dots, z_q , область зміни виходу u для (4.3.6), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (6) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об'єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності виду (4.3.6) розглядається як побудова моделі об'єкта за експертно-

експериментальними даними про взаємозв'язки <входи> - <вихід> та вирішується, як правило, в два етапи:

- структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО-ТО», що генеруються з експериментальних даних;

- параметрична ідентифікація (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

У результаті застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації отримуємо точне (чітке) значення вихідної змінної y , яке розраховується за формулами (2.18)-(2.21), наведеними у другому розділі.

Таким чином, після відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N$, $\tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{NM}$ у функціоналі (4.3.5) за допомогою описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації, отримуємо їх відновлені (чіткі) значення a_1, \dots, a_N , w_{11}, \dots, w_{NM} .

Сформулюємо тепер математичну постановку двоетапної неперервно-дискретної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття-розподілу на випадок заданих координат центрів підмножин і при обмеженнях у вигляді рівностей та відновленими значеннями її нечітких параметрів.

Задача 4.9. Знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$ і такий невід'ємний вектор $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*ij}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j=1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N; v_{ij} \geq 0, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \underbrace{\in \Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \tau^II = (\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}) \in \Omega^M,$$

де

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} a_i c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}. \quad (4.3.7)$$

У функціоналі (4.3.7) кожний з параметрів $a_i, w_{ij}, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$, позначений раніше, як вихід y , що залежить від входів z_1, \dots, z_q , у методі нейролінгвістичної ідентифікації, розраховується за формулами (2.18)-(2.21).

Тут $b_j^{II}, j=1, \dots, M$, – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}, 0 \leq b_j^{II} \leq S, j=1, \dots, M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$ має значення обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу $\tau_i^I, i=1, \dots, N$, до пунктів $\tau_j^{II}, j=1, \dots, M$, кінцевого споживання (другого етапу).

Функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід’ємна на Ω ; $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$, $i=1, \dots, N$, – деяка задана еталонна точка для підмножини Ω_i , яку позначають центром цієї підмножини; $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \dots, \tau_j^{II(n)})$, $j=1, \dots, M$, – деяка задана точка множини Ω .

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин $\Omega_i, i=1, \dots, N$, дорівнюють нулю.

Означення 4.4. Пару $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{v_{*11}, \dots, v_{*NM}\})$, що є розв'язком задачі 4.9, назвемо оптимальною.

Введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} c_{ij}^H(\tau_i^I, \tau_j^H) v_{ij}, \quad (4.3.8)$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вид $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_i(x), \dots, \lambda_N(x))$, а вектор v має вид $v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM})$. Очевидно, що $I(\lambda(\cdot), v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$.

Перепишемо задачу 4.9 в термінах характеристичної функції $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$, у такому виді.

Задача 4.10. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v)} I(\lambda(\cdot), v),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Від нескінченновимірної задачі 4.10 з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot)$ з відрізка $[0, 1]$.

Задача 4.11. Зайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma_1 \times Q} I(\lambda(\cdot), v),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Gamma \text{ м.в. для } x \in \Omega;\}$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega\};$$

$$Q = \{v = (v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}) : v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

При кожному фіксованому $v \in Q$ задача 4.11, як доведено в пункті 4.1, має розв'язок, і у множині оптимальних розв'язків задачі 4.10 містяться оптимальні розв'язки задачі 4.10, що дозволяє в подальшому перейти до розгляду задачі 4.11.

Метод розв'язання задачі 4.11 аналогічний методу розв'язання задачі 4.4 з пункту 4.1. Алгоритм розв'язання задачі 4.11 будується на основі алгоритму розв'язання задачі 4.4.

Алгоритм.

Попередній етап. Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в вузлах сітки за формулами при $\psi = \psi^{(0)}$ та значеннями параметрів a_1, \dots, a_N , відновленими за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (2.18)-(2.21). Обчислюємо значення вектору узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi)$ в вузлах сітки при $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Крок 1. Обчислюємо за формулою

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}(\psi^{(0)}),$$

де h_0 – величина кроку, яка розраховується із умови максимуму функції $G_2(\psi)$ за напрямком узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi^{(0)})$.

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після k , $k = 2, 3, \dots$, кроків алгоритму отримані значення $\psi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ в вузлах сітки.

Крок $(k+1)$ -й.

1) обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки при $\psi = \psi^{(k)}$ та значеннями параметрів a_1, \dots, a_N , відновленими за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (2.18)-(2.21);

2) обчислюємо значення вектору $g_{G_2}(\psi)$ в вузлах сітки при $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$;

3) проводимо обчислення за ітераційною формулою $\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_{G_2}^\psi$,

де B_{k+1}^ψ – оператор відображення перетвореного простору в основний простір E_N , причому $B_0^\psi = I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^\psi = B_{k+1}^* g_{G_2}(\psi^{(k)})$, h_k – величина кроку, яка визначається з умови максимуму функції $G_2(\psi)$ у напрямку узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi^{(k)})$ в перетвореному просторі;

4) якщо умова

$$\|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5;

5) вважаємо $\psi^* = \psi^l$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l -номер ітерації, на якій виконалася умова попереднього пункту;

б) розв'язуючи транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x) = \lambda_*(x)$, $\psi = \psi^*$ та значеннях параметрів w_{11}, \dots, w_{NM} , відновлених за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (2.18)-(2.21), знаходимо $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM})$;

7) обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\psi)$ двоїстої при $\psi = \psi^*$ та, для контролю правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціонала $I(\lambda_*(\cdot), v_*)$,

де значення параметрів a_1, \dots, a_N , w_{11}, \dots, w_{NM} відновлені за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих складних, нелінійних залежностей за формулами (2.18)-(2.21).

Завершення роботи алгоритму.

4.4 Висновки до розділу 4

У четвертому розділі досліджуються двоетапні неперервно-дискретні задачі оптимального розбиття-розподілу. Неперервно-дискретні задачі оптимального розподілу-розбиття узагальнюють, з одного боку, класичні скінченновимірні транспортні задачі на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшуковуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами, з іншого боку, дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

Двоетапні безперервно-дискретні задачі оптимального розбиття-розподілу характеризуються наявністю двох етапів і полягають у визначенні зон збору

неперервно розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу і обсягів перевезень переробленого продукту від підприємств першого етапу до споживачів (пунктам другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти переробки (збору, зберігання) до споживачів.

У підрозділі 4.1 досліджується двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу із заданим положенням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей. Розроблені та обґрунтовані метод та алгоритм поставленої задачі. Доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу із заданим положенням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей.

У підрозділі 4.2 досліджується двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу з відшукуванням оптимальних координат розташування центрів підмножин. Розроблені та обґрунтовані метод та алгоритм поставленої задачі. Доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з відшукуванням оптимальних координат розташування центрів підмножин.

Алгоритми, які розроблені в підрозділах 4.1. та 4.2, протестовані на модельних задачах. За результатами розв'язання модельних задач зроблено такі висновки: а) оптимальне значення цільового функціоналу задачі з оптимально розміщеними пунктами I-го етапу менше, ніж оптимальне значення цільового функціоналу у випадку з фіксованими пунктами; б) оптимально розміщені пункти I-го етапу збіглися із заданою точністю до пунктів II-го етапу. При цьому, попит в тих пунктах II-го етапу, в яких були розміщені пункти I-го етапу, був повністю задовільнений.

Крім того, аналіз результатів розв'язання модельних задач показав, що характерною особливістю оптимального розв'язку двоетапної безперервно-

дискретної задачі розбиття-розподілу з відшукуванням оптимальних координат розташування центрів підмножин є поєднання із заданою точністю оптимально розміщених пунктів I-го етапу з деякими пунктами II-го етапу, що відповідає здоровому глузду. Дійсно, є логічним, що мінімальна сумарна вартість транспортування досягається в разі, якщо пункти I-го етапу розміщені безпосередньо в пунктах споживання II-го етапу.

У підрозділі 4.3 розроблені метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі, який базується на єдиному підході, розробленому у третьому розділі. Спочатку для відновлення точних значень нечітких параметрів у цільовому функціоналі застосовано метод нейролінгвістичної ідентифікації, описаний у другому розділі, потім оптимальне розбиття знаходиться за допомогою методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі на основі розробленого в пункті 4.1 алгоритму.

Основні результати розділу опубліковані в [14, 17, 25].

Розділ 5. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ ДІАГРАМ ВОРОНОГО З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Як відомо, діаграма Вороного заданої скінченної множини M точок площини (простору), які називають точками-генераторами, - це математичний об'єкт, який представляє собою таке розбиття площини (простору), при якому кожна область (комірка Вороного) цього розбиття утворює множину елементів, більш близьких до однієї з точок множини M , ніж до будь-якої іншої точки цієї множини.

Діаграми Вороного в двох і тривимірних просторах використовуються в самих різних областях прикладних наук: кристалографії, фізики, астрономії, хімії, мікробіології, комп'ютерній графіці, при вирішенні проблем штучного інтелекту, розпізнавання образів, офтальмології. Змістовні огляди додатків діаграм Вороного в різних областях приведені в роботах [25, 108, 172]. Широкий огляд останніх технічних результатів і додатків з посиланнями на літературу по обчислювальній геометрії можна знайти в [129]. Незважаючи на те, що багато хто з відомих алгоритмів побудови діаграм Вороного мають складність $O(|M|\log(|M|))$, а деякі з цих алгоритмів навіть працюють в середньому за $O(|M|)$, всі ці алгоритми досить складні. Що ж стосується діаграми Вороного на випадок простору довільної розмірності, то її побудова пов'язана зі значними алгоритмічними проблемами. Дійсно, відомо [70], що при заданому числі N точок-генераторів кількість елементів, необхідних для опису діаграми Вороного, зростає експоненціально в залежності від розмірності простору.

В роботі [128] наведено короткий огляд деяких наявних в науковій літературі узагальнень стандартної діаграми Вороного, зокрема: адитивно зважена діаграма Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram), мультиплікативно зважена діаграма Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram). В [144] згадані також деякі інші узагальнення стандартної діаграми

Вороного такі, як діаграма Лагерра (Power Voronoi Diagram), наближені (нечіткі) діаграми Вороного, діаграми Вороного з обмеженнями на потужності точок-генераторів, динамічні діаграми Вороного та ін., а також приведена таблиця відповідності між конкретним варіантом діаграми Вороного і математичною моделлю неперервної задачі оптимального розбиття множин, в результаті розв'язання якої може бути отримана ця діаграма.

У даному розділі представлені алгоритми побудови узагальненої, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n -вимірною евклидовою простору $E_n (n \geq 2)$ як в умовах визначеності, так і з нечіткими параметрами.

5.1. Алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів на основі методів теорії ОРМ

Перш ніж сформулювати математичну постановку задачі побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів, наведемо визначення стандартної (класичної) діаграми Вороного [70].

Стандартною (класичною) діаграмою Вороного скінченої множини $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset E_n$ точок-генераторів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, в n -вимірному евклидовому просторі $E_n (n \geq 2)$, називається сукупність багатогранників Вороного

$$Vor(\tau_i) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq c(x, \tau_j), j \neq i, j = 1, \dots, N\}, i = 1, 2, \dots, N \quad (5.1)$$

вихідних точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, де $c(x, \tau_i)$ – метрика в E_n , яка визначається одним зі способів:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \text{ – евклідова;}$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \text{ – манхеттенська;}$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{|x^j - \tau_i^j|\} - \text{Чебишева.}$$

Іншими словами, діаграмою Вороного скінченної множини $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ з E_n ($n \geq 2$) називається множина

$$\text{Vor}(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} \text{Vor}(\tau_i), \quad (5.2)$$

причому $\text{mes}(\text{Vor}(\tau_i) \cap \text{Vor}(\tau_j)) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ ($i \neq j$), де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега. Розбиття простору E_n на багатогранники Вороного $\text{Vor}(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, заданої множини точок $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ однозначне.

В роботі [144] наведено короткий огляд деяких наявних в науковій літературі узагальнень стандартної діаграми Вороного, зокрема:

– адитивно зважена діаграма Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram) множини $M = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \subset E_n$

$$\text{AW Vor}(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} \text{AW Vor}(\tau_i),$$

$$\text{AW Vor}(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : c(x, \tau_i) - w_i \leq c(x, \tau_j) - w_j, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \right\}, i = 1, 2, \dots, N,$$

в якій кожна точка-генератор $\tau_i \in M$ має свою вагу $w_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), що додається до функції, яка задає відстань, при її вимірюванні;

– мультиплікативно зважена діаграма Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram) множини $M = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \subset E_n$

$$\text{MW Vor}(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} \text{MW Vor}(\tau_i),$$

в якій кожен багатогранник Вороного

$$\text{MW Vor}(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : c(x, \tau_i) / w_i \leq c(x, \tau_j) / w_j, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \right\}, i = 1, 2, \dots, N$$

є множиною точок простору, зважена відстань від яких до точки-генератора $\tau_i \in M$ не перевищує зваженої відстані до будь-якої іншої вихідної точки ($w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, як і вище, – задані ваги).

В [144] згадані також деякі інші узагальнення стандартної діаграми Вороного (5.1), (5.2) такі, як діаграма Лагерра (Power Voronoi Diagram), наближені (нечіткі) діаграми Вороного, діаграми Вороного з обмеженнями на потужності точок-генераторів, динамічні діаграми Вороного та ін., а також наведена таблиця відповідності між конкретним варіантом діаграми Вороного і математичною моделлю неперервної задачі оптимального розбиття множин, в результаті розв'язання якої може бути отримана ця діаграма.

Нехай Ω – деяка задана обмежена множина з E_n , $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – скінченна множина точок-генераторів в Ω . У тих випадках, коли розташування точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в Ω невідомо і їх потрібно розмістити (вибрати) в Ω , можна ввести ще один варіант діаграми Вороного на множині $\Omega \subset E_n$, а саме діаграму Вороного скінченної кількості точок, *оптимально розміщених в обмеженій множині*, яка узагальнює стандартну діаграму Вороного.

Означення 5.1. Під узагальненою діаграмою Вороного точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, оптимально розміщених в обмеженій множині $\Omega \subset E_n$, будемо розуміти таку сукупність багатогранників Вороного

$$\text{Vor}(\tau_i) = \{x \in \Omega \subset E_n : c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j, \quad (5.3)$$

$$i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i\}$$

точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, для якої сумарна зважена відстань від точок множини Ω до відповідних точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ є найменшою, тобто функціонал

$$J(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\text{Vor}(\tau_i)} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) dx \quad (5.4)$$

приймає мінімальне значення. Тут, $w_i > 0$, a_i , $i = 1, 2, \dots, N$, – задані числа (ваги).

Зауваження: задаючи конкретні значення параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N і вид функції $c(x, \tau_i)$ у виразу для функціоналу (5.4), можна отримати різні варіанти діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів:

- адитивно зважені ($w_i = 1, a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, N$),
- мультипликативно зважені ($w_i > 1, a_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$),
- адитивно-мультипликативно зважені ($w_i > 1, a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, N$) та ін.

Таким чином, як випливає з визначення узагальненої діаграми Вороного кінцевого числа точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, оптимально розміщених в обмеженій множині $\Omega \subset E_n$, для її побудови необхідно побудувати сукупність багатогранників Вороного (5.3) і відшукати такі координати відповідних точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, які мінімізують функціонал (5.4).

Метод розв'язання

Перейдемо тепер до викладу підходу до побудови діаграми Вороного (5.3)-(5.4), заснованого на застосуванні математичного апарату теорії оптимального розбиття множин [145].

Для цього спочатку наведемо відповідну неперервну лінійну задачу оптимального розбиття множини n -вимірному евклидовому простору E_n на підмножини з невідомими заздалегідь координатами деяких характерних для кожної підмножини точок, які називають «центрами» підмножин [144].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклидовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини Ω на її підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (i \neq j),$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо через \sum_{Ω}^N клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, тобто

$$\sum_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, i \neq j \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) dx, \quad (5.5)$$

де $c(x, \tau_i)$ – задана дійсна обмежена на $\Omega \times \Omega$ функція, вимірна за $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ для усіх $i = 1, 2, \dots, N$; $w_i > 0$, a_i , $i = 1, 2, \dots, N$, – задані числа (ваги).

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок множин Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, дорівнює нулю.

Під неперервною лінійною задачею оптимального розбиття множини Ω з E_n на її підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (серед яких можуть бути і порожні) з відшукуванням координат центрів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ цих підмножин, відповідно, розуміють таку задачу [26].

Задача 5.1. Знайти
$$\min_{\substack{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N \\ \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \in \Omega^N}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

де функціонал $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$ має вигляд (5.5); координати $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центрів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, N$, заздалегідь невідомі та підлягають визначенню.

Означення 5.2. Пару $(\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}, \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\})$, яка доставляє мінімум функціоналу (5.5) на множині $\sum_{\Omega}^N \times \Omega^N$, назовемо *оптимальним розв'язком* задачі 5.1. При цьому розбиття $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ назовемо *оптимальним розбиттям* множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин, а сукупність $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ центрів $\tau_i^* \in \Omega_i^*$, $i = 1, 2, \dots, N$, – *оптимальними центрами підмножин Ω_i^* задачі 5.1.*

Для побудови методу розв'язання задачі 5.1 введемо характеристичні функції підмножин Ω_i :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i=1, \dots, N.$$

Для задачі 5.1 приведені в [144] наступні теореми 5.1 і 5.2, які будуть використані в подальшому при формулюванні алгоритму розв'язання задачі 5.1.

Теорема 5.1. Для того щоб можливе розбиття $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ множини Ω при кожному фіксованому $\tau \in \Omega$ було оптимальним для задачі 5.1, необхідно і достатньо, щоб

$$c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j, \quad i, j=1, \dots, N, \quad j \neq i \text{ м.в. для } x \in \Omega_i^*.$$

При цьому в точках x , що належать оптимальній межі підмножин Ω_i^* і Ω_j^* , у нерівності досягається знак рівності.

Теорема 5.2. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$, що відповідає оптимальному розв'язку $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$ задачі 5.1 для $i=1, 2, \dots, N$ і майже всіх $x \in \Omega$ мають вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & j=1, \dots, N, i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (5.6)$$

у якості $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N. \quad (5.7)$$

Наведемо алгоритм розв'язання задачі 5.1, в основі якого лежать теореми 5.1, 5.2 і один з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Шора [100]).

Сутність методів узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору, як уже було охарактеризовано у пункті 2.2 дисертації, ґрунтується на

побудові в процесі послідовних наближень лінійних операторів, що змінюють метрику простору, і виборі напрямку спуску відповідного антиградієнта в просторі з новою метрикою.

В ітераційній формулі r -алгоритму [100], що має вигляд

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^\tau [B_{k+1}^\tau]^\tau g_G(\tau^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.8)$$

B_{k+1}^τ – оператор, який відображає перетворений простір в основний простір E_n (причому $B_0^\tau = I$ – одинична матриця); h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму функції G за напрямком $B_{k+1} B_{k+1}^\tau g_G(\tau^{[k]})$; $g_G(\tau^{[k]})$ – узагальнений градієнт функції $G(\tau)$ в точці $\tau^{[k]}$.

У даному алгоритмі r -алгоритм застосовується в H -формі [178] (H_k – симетрична матриця, така, що $H_k = B_k B_k^T$), для якої ітераційна формула (5.8) набуває вигляду

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^{[k]}), g_G(\tau^{[k]})}}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$H_{k+1} = H_k + (1 / \alpha_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}; \quad \Delta_k = g_G(\tau^{[k]}) - g_G(\tau^{[k-1]}).$$

Коефіцієнт розтягування простору α_k приймається рівним 3. Для крокового множника h_k застосовується адаптивний спосіб регулювання, описаний в [178].

Визначимо i -ту компоненту вектора узагальненого градієнту $g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ функції

$$\begin{aligned} G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) / w_i + a_i] dx^{(1)} \dots dx^{(n)} \end{aligned}$$

в точці $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ наступним чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.9)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -а компонента N -вимірною вектора узагальненого градієнта $g_c^{\tau}(x, \tau)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ (тут $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$); при фіксованому x вона має вид

$$g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

Алгоритм

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\tau = \tau^{[0]}$. обчислюємо значення $\lambda^{[0]}(x)$ в вузлах сітки за формулами (6) при $\tau = \tau^{[0]}$, значення $g_G(\tau)$ – за формулою (9) при $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$, $\tau = \tau^{[0]}$, вибираємо початковий пробний крок h_0 алгоритму $h_0 > 0$ і знаходимо

$$\tau^{[1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[0]} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^{[0]})}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^{[0]}), g_G(\tau^{[0]})}} \right),$$

P_{Π} – оператор проектування на Π .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k ($k = 1, 2, \dots$) кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{[k]}$, $\lambda^{[k-1]}(x)$ у вузлах сітки.

Опишемо $[k+1]$ -й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (5.6) при $\tau = \tau^{[k]}$.

2. Знаходимо значення $g_G(\tau)$ за формулами (5.9) при $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$, $\tau = \tau^{[k]}$.

3. Проводимо $[k+1]$ -й крок r -алгоритму в H -формі [178], ітераційна формула якого має вигляд

$$\tau^{[k+1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[k]} - h_k \frac{H_1 g_G(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^{[k]}), g_G(\tau^{[k]}))}} \right).$$

4. Якщо умова

$$\|\tau^{[k]} - \tau^{[k+1]}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.10)$$

не виконуються, переходимо до $[k + 2]$ -го кроку алгоритму, в іншому випадку - до п. 5.

5. Приймаємо $\lambda_*(x) = \lambda^{[l]}(x)$, $\tau_* = \tau^{[l]}$, де l – номер ітерації, на якій виконана умова (5.10).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільової функції $G(\tau_*)$ із (5.7) за формулою

$$G(\tau_*) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i] dx.$$

Алгоритм описаний.

Таким чином, в результаті розв'язання задачі 5.1 описаним алгоритмом, заснованим на теоремах 5.1 і 5.2, отримуємо сукупність багатогранників Вороного (5.3) точок-генераторів τ_i , $i = 1, \dots, N$:

$$Vor(\tau_i) = \{x \in \Omega \subset E_n : c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i\},$$

але, на відміну від стандартної діаграми Вороного (1), в якій точки τ_1, \dots, τ_N фіксовані, координати точок-генераторів τ_1, \dots, τ_N , оптимально розміщених в $\Omega \subset E_n$, відшукуються як розв'язок скінченновимірної задачі оптимізації

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N,$$

з недиференційовною цільовою функцією $G(\tau)$.

5.2. Алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з нечіткими параметрами

Одним з перспективних напрямків розвитку даної тематики є розробка алгоритмів побудови діаграм Вороного в умовах невизначеності, які характерні для практичних задач. Для обробки ситуацій невизначеності, що виникають в задачах науки, техніки і повсякденному житті, унікальним інструментом кілька десятиліть тому була теорія ймовірностей [127]. Відзначимо, що ймовірність, заснована на принципах традиційної бінарної логіки, достатня для вирішення проблем невизначеності, пов'язаної з випадковістю. Однак, для багатьох практичних задач побудови діаграм Вороного, описаних у попередньому пункті, характерні ситуації невизначеності в меті, умовах, обмеженнях, початкових даних задачі, які можуть бути неточними, недостовірними, нечіткими. Для розкриття ситуацій невизначеності, які мають не ймовірно-статистичну, а нечітко-множинну природу, можуть бути застосовані апарати теорії нечітких множин, нечіткої логіки, нейронних мереж і їх комбінацій (нейронечіткі системи і технології) [129, 130].

У даному пункті роботи розроблено алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням N точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n -вимірного евклідового простору E_n ($n \geq 2$) при наявності нечітких вхідних параметрів. Алгоритм розроблено на основі синтезу методів розв'язання задач теорії ОРМ [39] з нейронечіткими технологіями [3, 69] і модифікаціями r -алгоритму Шора для розв'язання негладких задач оптимізації [26].

Постановка задачі. Перейдемо тепер до математичного формулювання задачі побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням кінцевого числа точок-генераторів при наявності нечітких вхідних даних.

Необхідно зауважити, що задача 5.1, сформульована у попередньому пункті, є задачею в умовах визначеності.

Для зняття можливої нечіткості параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N , у функціоналі (5.5) пропонується застосовувати метод нейролінгвістичній ідентифікації складних нелінійних залежностей, описаний у розділі 3. Нагадаємо коротко його суть. Для спрощення опису методу нейролінгвістичного ідентифікації для відновлення точних значень параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N , які можуть бути невідомим, неточними, недовизначеними та залежними від факторів, що впливають на них, позначимо кожний з них як u і розглянемо функціональну залежність виходу y від входів z_1, \dots, z_q об'єкта ідентифікації у вигляді:

$$y = y(z_1, \dots, z_q), \quad (5.11)$$

тут z_1, \dots, z_q - фактори, що впливають на y . Тобто для кожного з параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N розглядається залежність виду (5.11), де відповідний параметр залежить від кількісних або якісних факторів, які впливають на нього. Зауважимо, що залежність (5.11) відповідає залежності (2.4) з розділу 2 дисертації, де викладено метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей.

Для задачі ідентифікації передбачається відомими області визначення входів z_1, \dots, z_q , область зміни виходу y для (5.11), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (5.11) у вигляді вибірки даних про входах і виході об'єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності виду (5.11) розглядається як побудова моделі об'єкта по експертно-експериментальними даними про взаємозв'язок <входи> - <вихід> та вирішується, як правило, в два етапи (пункт 2.3 роботи):

- структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО-ТО», що генеруються з експериментальних даних;

- параметрична ідентифікацію (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

В результаті застосування методу нейролінгвістичного ідентифікації отримуємо точне (відновлене) значення відповідного параметра, яке розраховується за формулами (2.18)-(2.21) з розділу 2 дисертації, де у цих формулах:

- $\mu^*_{D_l}(y)$ - функція належності вихідної змінної y класу виходу D_l , $l=1,2,\dots,L$, L - кількість класів (лінгвістичних термів) вихідної змінної y , d_l - центр класу D_l ;

- $p^*_{j^l}(z_1, z_2, \dots, z_q)$ - нечіткі продукційні правила, що отримуються з експертно-експериментальної інформації про залежність (5.11), j - номер правила в l -му класі, $j=1,2,\dots,s_l$, s_l - кількість правил у l -му класі; $v^*_{j^l}$ - вага j -го правила в l -му класі виходу;

- $\mu^*_{ij^l}(z_i)$ - дзвонова функція належності z_i її лінгвістичному терму в j -му правилі l -го класу виходу вихідної змінної y , $b^*_{ij^l}$ - координата максимуму та $c^*_{ij^l}$ - коефіцієнт концентрації цієї функції належності з формули (2.21).

Нагадаємо, що значення $v^*_{j^l}$ - ваг правил в (2.20) й параметрів $b^*_{ij^l}$, $c^*_{ij^l}$ функції належності (2.21), позначені зірочкою як оптимальні, є такими, що отримані в результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичного ідентифікації, для яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об'єкта (5.11), досягає мінімального значення. Значення $\mu^*_{D_l}(y)$, $p^*_{j^l}(z_1, z_2, \dots, z_q)$ й $\mu^*_{ij^l}(z_i)$ в (2.18)-(2.21) обчислюються за оптимальних значень $v^*_{j^l}$, $b^*_{ij^l}$, $c^*_{ij^l}$.

Таким чином, в функціоналі (5.5) кожен з нечітких параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N , позначених вище як вихід y , що залежить від входів z_1, \dots, z_q для застосування методу нейролінгвістичній ідентифікації, розраховується за формулами (2.18)-(2.21). Після відновлення точних значень відповідних нечітких параметрів в (5.5) за допомогою описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації, отримуємо їх відновлені значення та позначимо їх: до настройки - $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N$, $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_N$, а після настройки - $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N$, $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N$.

Сформулюємо тепер математичну постановку задачі побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням N точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n -вимірною евклідовою простору E_n ($n \geq 2$) на основі методів розв'язання задач ОРМ і відновленими значеннями її нечітких параметрів (після настройки).

Нехай Ω – деяка задана обмежена множина з E_n , $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – скінченна множина точок-генераторів в Ω . У тих випадках, коли розташування точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в Ω невідомо і їх потрібно розмістити (вибрати) в Ω , можна ввести ще один варіант діаграми Вороного на множині $\Omega \subset E_n$, а саме діаграму Вороного кінцевого числа точок, оптимально розміщених в обмеженій множині з нечіткими параметрами.

Означення 5.3. Під діаграмою Вороного точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, оптимально розміщених в обмеженій множині $\Omega \subset E_n$, з нечіткими параметрами будемо розуміти таку сукупність багатогранників Вороного

$$Vor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : (c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i) \leq (c(x, \tau_j) / \bar{w}_j + \bar{a}_j), j \neq i, i, j = 1, 2, \dots, N, \right\}, \quad (5.12)$$

точок $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, для якої сумарна зважена відстань від точок множини Ω до відповідних точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ є найменшим, тобто функціонал

$$J(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{Vor(\tau_i)} (c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i) dx \quad (5.13)$$

приймає мінімальне значення. Тут $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N$ - відновлені після настройки значення нечітких параметрів діаграми Вороного.

Метод розв'язання та його обґрунтування

Перейдемо тепер до викладу підходу до побудови діаграми Вороного (5.12)-(5.13), заснованого на застосуванні математичного апарату теорії оптимального розбиття множин і нейронечітких технологій.

Для цього спочатку наведемо відповідну неперервну лінійну задачу оптимального розбиття множини n -вимірного евклідового простору E_n на підмножини з невідомими заздалегідь координатами деяких характерних для кожної підмножини точок, які називаються «центрами» підмножин [39].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних по Лебегу підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини Ω на його підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (i \neq j), \quad (5.14)$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо через \sum_{Ω}^N клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, тобто.

$$\sum_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i) dx, \quad (5.15)$$

де $c(x, \tau_i)$ – задана дійсна обмежена на $\Omega \times \Omega$ функція, вимірна за $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ для

усіх $i=1,2,\dots,N$; $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_N$, $\bar{w}_1,\dots,\bar{w}_N$ - відновлені після настройки значення нечітких параметрів.

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра безлічі граничних точок множин Ω_i , $i=1,2,\dots,N$, дорівнює нулю.

Під безперервною лінійною задачею оптимального розбиття множини Ω з E_n на його підмножини, що не перетинаються, Ω_1,\dots,Ω_N (серед яких можуть бути і порожні) з відшукування координат центрів $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_N$ цих підмножин, відповідно та нечіткими початковими даними, розуміють таку задачу.

Задача 5.2. Знайти

$$\min_{\substack{\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N \\ \{\tau_1,\dots,\tau_N\} \in \Omega^N}} F(\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\},\{\tau_1,\dots,\tau_N\}),$$

де функціонал $F(\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\},\{\tau_1,\dots,\tau_N\})$ має вигляд (5.15); координати $\tau_i^{(1)},\tau_i^{(2)},\dots,\tau_i^{(n)}$ центрів $\tau_i = (\tau_i^{(1)},\tau_i^{(2)},\dots,\tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i=1,2,\dots,N$, заздалегідь невідомі і підлягають визначенню.

Означення 5.4. Пару $(\{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*\},\{\tau_1^*,\dots,\tau_N^*\})$, яка доставляє мінімум функціоналу (5.15) на множині $\sum_{\Omega}^N \times \Omega^N$, назовемо *оптимальним розв'язком задачі 5.2*. При цьому розбиття $\{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ назовемо *оптимальним розбиттям* множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин, а сукупність $\tau^* = (\tau_1^*,\dots,\tau_N^*) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ центрів $\tau_i^* \in \Omega_i^*$, $i=1,2,\dots,N$, – *оптимальними центрами підмножин Ω_i^* в задачі 5.2*.

Для побудови методу розв'язання задачі 5.2 введемо характеристичні функції підмножин Ω_i :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i=1,\dots,N.$$

Переформулюємо задачу 5.2 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ у наступному вигляді.

Задача 5.3. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \int \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i) \lambda_i(x) dx,$$

де

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = \{ (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \}$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega; \}$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$$

Для задачі 5.3 у роботі [39] доведено наступну теорему, яка встановлює вид оптимального розв'язку $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$.

Теорема 5.3. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$, що відповідає оптимальному розв'язку $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$ задачі 5.3, для $i = 1, \dots, N$ та майже усіх $x \in \Omega$ мають вигляд:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв'язок задачі, двоїстої до задачі 5.3:

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] dx \rightarrow \min, \tau \in \Omega^N.$$

Оскільки, як зазначено вище, параметри $w_i, a_i, i = 1, \dots, N$, в (5.15) залежать від нечітких факторів, відповідно у вигляді $w_i \equiv w_i(z_1, \dots, z_p), a_i \equiv a_i(z_1, \dots, z_q)$, то задачу 5.3 з нечіткими параметрами перепишемо так:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) / w_i(z_1, \dots, z_p) + a_i(z_1, \dots, z_q)) dx \rightarrow \min_{\substack{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \\ \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \in \Omega^N}}$$

за умов (5.14).

Наведемо теорему 5.4, засновану на результатах з роботи [39], яка підводить підсумки нашим міркуваннями та буде використана в подальшому при формулюванні алгоритму розв'язання задачі 5.3.

Теорема 5.4. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$, що відповідає оптимальному розв'язку $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}$ задачі 5.3, для $i = 1, 2, \dots, N$ і майже всіх $x \in \Omega$ мають вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_{*i}) / \bar{w}_i + \bar{a}_i \leq c(x, \tau_{*j}) / \bar{w}_j + \bar{a}_j, \\ & j = 1, \dots, N, i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (5.16)$$

в якості $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ вибирається оптимальний розв'язок задачі

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i] dx \rightarrow \min, \tau \in \Omega^N. \quad (5.17)$$

Тут кожний параметр $\bar{w}_i, \bar{a}_i, i = 1, \dots, N$, - це відновлене значення відповідних нечітких параметрів, які указані вище як вихід y , що залежить від входів z_1, \dots, z_q з (5.11) у вигляді $w_i \equiv w_i(z_1, \dots, z_p), a_i \equiv a_i(z_1, \dots, z_q), i = 1, \dots, N$, та обчислюється за формулами (2.18)-(2.21).

Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі 5.3, в основі якого лежить теорема 5.4 і один з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Шора [99]).

Нагадаємо, що як було відмічене у розділі 2 роботи, сутність методів узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору ґрунтується на побудові в процесі послідовних наближень лінійних операторів, що змінюють метрику простору, і виборі напрямку спуску, відповідного антиградієнта в просторі з новою метрикою.

В ітераційній формулі r -алгоритму [99], що має вигляд

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^r [B_{k+1}^r]^T g_G(\tau^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

B_{k+1}^r - оператор, відображає перетворене простір в основний простір E_n (причому

$B_0^\tau = I$ – одинична матриця); h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму функції G у напрямку $B_{k+1} B_{k+1}^\tau g_G(\tau^{[k]})$; $g_G(\tau^{[k]})$ – узагальнений градієнт функції $G(\tau)$ в точці $\tau^{[k]}$.

У даній роботі r -алгоритм застосовується в H -формі [27] (H_k – симетрична матриця, така, що $H_k = B_k B_k^T$), для якої ітераційна формула (5.18) набуває вигляду

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^{[k]}), g_G(\tau^{[k]})}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}; \quad \Delta_k = g_G(\tau^{[k]}) - g_G(\tau^{[k-1]}).$$

Коефіцієнт розтягування простору α_k приймається рівним 3. Для крокового множника h_k застосовується адаптивний спосіб регулювання, описаний в [27].

Визначимо i -ту компоненту вектора узагальненого градієнту $g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ функції

$$G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) / w_i + a_i] dx^{(1)} \dots dx^{(n)}$$

в точці $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ наступним чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ = \frac{1}{\bar{w}_i} \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.19)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -а компонента N -вимірному вектору узагальненого градієнта $g_c^\tau(x, \tau)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ (тут $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$); при фіксованому x вона має вид

$$g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

Зауваження. У випадку, коли $c(x, \tau_i)$ – евклідова метрика, i -а компонента

N -вимірному вектора узагальненого градієнта $g_c^\tau(x, \tau)$ функції

$c(x, \tau) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2}$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, при фіксованому x , має такий

вигляд:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})}{\left(\bar{w}_i \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \right)} \\ \dots \\ \frac{(x^{(n)} - \tau_i^{(n)})}{\left(\bar{w}_i \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \right)} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутної сіткою і задаємо початкове наближення $\tau = \tau^{[0]}$. Обчислюємо значення $\lambda^{[0]}(x)$ в вузлах сітки за формулам (5.) при $\tau = \tau^{[0]}$, значення $g_G(\tau)$ – за формулою (16) при $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$, $\tau = \tau^{[0]}$, і відновлених значеннях нечітких параметрів $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N$, $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N$, які, в свою чергу, обчислюються за формулами (6) - (9). Вибираємо початковий пробний крок r -алгоритму $h_0 > 0$ та знаходимо

$$\tau^{[1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[0]} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^{[0]})}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^{[0]}), g_G(\tau^{[0]})}} \right),$$

P_{Π} – оператор проектування на Π .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k ($k = 1, 2, \dots$) кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{[k]}$, $\lambda^{[k-1]}(x)$ у вузлах сітки.

Опишемо $[k+1]$ -й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ у вузлах сітки за формулами (5.16) при $\tau = \tau^{[k]}$.
2. Знаходим значення $g_G(\tau)$ за формулами (5.19) при $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$, $\tau = \tau^{[k]}$.

3. Проводимо $[k+1]$ -й крок r -алгоритму в H -формі [27], ітераційна формула якого має вид

$$\tau^{[k+1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[k]} - h_k \frac{H_1 g_G(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^{[k]}), g_G(\tau^{[k]})}} \right).$$

4. Якщо умова

$$\|\tau^{[k]} - \tau^{[k+1]}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.20)$$

не виконуються, переходимо до $[k + 2]$ -го кроку алгоритму, інакше - до п. 5.

5. Полагаємо $\lambda_*(x) = \lambda^{[l]}(x)$, $\tau_* = \tau^{[l]}$, де l – номер ітерації, на якій виконана умова (5.20).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільової функції $G(\tau_*)$ з (5.17) за формулою

$$G(\tau_*) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_{*i}) / \bar{w}_i + \bar{a}_i] dx.$$

Алгоритм описан.

Таким чином, в результаті розв'язання задачі 5.3 описаним алгоритмом, заснованим на теоремі 5.4, і методі нейролінгвістичній ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів, отримуємо сукупність багатогранників Вороного (5.12) точок-генераторів τ_i , $i = 1, \dots, N$:

$$Vor(\tau_i) = \{x \in \Omega \subset E_n : c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i \leq c(x, \tau_j) / \bar{w}_j + \bar{a}_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i\},$$

але, на відміну від стандартної діаграми Вороного (5.1), в якій точки τ_1, \dots, τ_N фіксовані, координати точок-генераторів τ_1, \dots, τ_N , оптимально розміщених в $\Omega \subset E_n$, відшукуються як розв'язок скінченновимірної задачі оптимізації

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / \bar{w}_i + \bar{a}_i] dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N,$$

з недиференційованої цільовою функцією $G(\tau)$ і відновленими значеннями нечітких параметрів \bar{w}_i , \bar{a}_i , $i = 1, \dots, N$.

5.3. Алгоритм побудови адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з нечіткими параметрами

Як було зазначено у попередньому пункті, побудова діаграм Вороного істотно ускладнюється в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд параметрів в (5.4) можуть бути неточними, нечіткими або невідомий математичний опис деяких залежностей в (5.4).

Адитивно та мультиплікативно зважені діаграми Вороного з нечіткими параметрами з'являються, наприклад, у випадках, коли параметри a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N , задані як лінгвістичні змінні, які залежать від зовнішніх чинників, причому вид цих залежностей заздалегідь невідомий. Для зняття нечіткості параметрів a_1, \dots, a_N , w_1, \dots, w_N , застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних залежностей, описаний у розділі 2 дисертації.

У цьому пункті опишемо основні етапи алгоритму побудови адитивної і мультиплікативної діаграм Вороного в умовах невизначеності, який розроблено на основі єдиного підходу до розв'язання задач ОРМ в умовах нечітких початкових даних, запропонований у розділі 3 дисертації, та базується на синтезі методів розв'язання нескінченновимірних задач ОРМ з n -вимірною евклідовою простору [39] і нейронечітких технологій [3, 69]. Логіка цього алгоритму подібна до алгоритму, сформульованому у попередньому пункті, тому тут наведемо тільки його основні етапи.

Алгоритм складається з таких етапів:

1-й етап. Формулювання відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини з E_n на підмножини, що не перетинаються, з критерієм якості розбиття, який забезпечує відповідний вид діаграми Вороного з нечіткими параметрами.

2-й етап. Відновлення нечітких параметрів діаграми Вороного, за допомогою методу нейронечіткої ідентифікації нелінійних залежностей.

3-й етап. Застосування описаного вище математичного і алгоритмічного апаратів розв'язання сформульованої на першому етапі задачі, з відновленими на другому етапі значеннями нечітких параметрів, складовою частиною якого є r -алгоритм Шора.

В основі згаданого математичного і алгоритмічного апаратів лежить наступна загальна ідея [39]. Вхідні неперервні задачі оптимального розбиття множин, які математично сформульовані як нескінченновимірні задачі оптимізації, зводяться через функціонал Лагранжа до допоміжних скінченновимірних негладких задач максимізації або негладким задачам максиміна, для чисельного розв'язування яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційованої оптимізації, а саме, різні модифікації r -алгоритму Шора. Особливістю такого підходу є той факт, що розв'язок вхідних нескінченновимірних задач оптимізації вдається отримати аналітично в явному вигляді, причому в аналітичний вираз можуть входити параметри, які відшуковуються як оптимальний розв'язок вищеназваних допоміжних скінченновимірних задач оптимізації з негладкими цільовими функціями.

5.4 Розв'язання модельних задач побудови діаграм Вороного

Для реалізації розроблених алгоритмів створено програмне забезпечення в середовищі Microsoft Visual Studio 2013 мовою програмування C #, опис якого представлено у Додатку А. Розв'язання модельних задач побудови різних діаграм Вороного, наведених у цьому розділі, отримані за допомогою розробленого програмного забезпечення.

Модельна задача 5.1. Побудова узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного в умовах визначеності.

На рис. 5.1 наведені стандартні діаграми Вороного N точок-генераторів, оптимально розміщених в області

$$\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(i)} \leq 10, i = 1, 2\},$$

отримані в результаті розв'язання задачі 5.1 алгоритмом, описаним в пункті 5.1, з нульових початкових наближень $\tau_i = (0;0)$ при $a_i = 0$, $w_i = 1$ для $i = 1, \dots, N$.

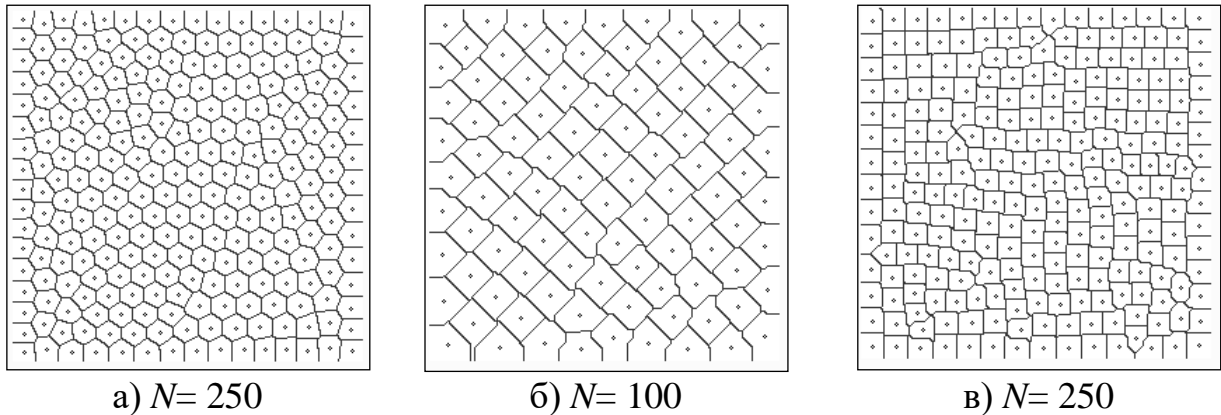


Рис. 5.1. Стандартні діаграми Вороного з оптимальним розміщенням N точок-генераторів: а) - евклідова метрика; б) - манхеттенська метрика; в) - метрика Чебишева

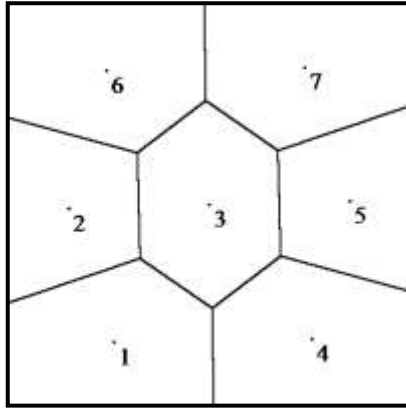
На рис. 5.2 зображені наступні діаграми Вороного для семи точок-генераторів, оптимально розміщених в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(i)} \leq 10, i = 1, 2\}$, отримані в результаті розв'язання задачі 5.1 алгоритмом, описаним в пункті 5.1, з нульових початкових наближень $\tau_i = (0;0)$:

а) стандартна; б) адитивно зважена; в) мультиплікативно зважена; г) адитивно-мультиплікативно зважена.

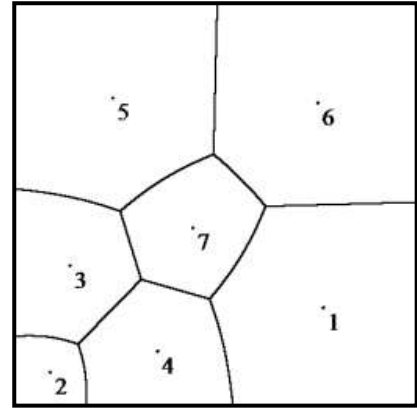
Для стандартної діаграми Вороного (рис. 5.2 а)) в результаті роботи алгоритму за 97 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F=147,92$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (2,62; 1,56)$, $\tau_2 = (1,49; 4,91)$, $\tau_3 = (5,00; 5,00)$, $\tau_4 = (7,57; 1,63)$, $\tau_5 = (8,51; 5,09)$, $\tau_6 = (2,43; 8,37)$, $\tau_7 = (7,38; 8,44)$.

Для адитивно зваженої діаграми Вороного (рис. 5.2 б)) в результаті роботи алгоритму за 92 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F=295,01$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (7,69; 2,43)$, $\tau_2 = (0,84; 0,81)$, $\tau_3 = (1,34; 3,48)$, $\tau_4 = (3,54; 1,33)$,

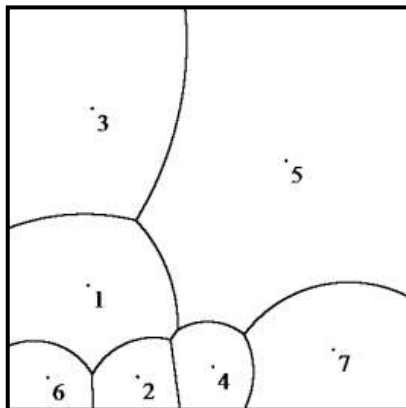
$\tau_5 = (2,42; 7,68)$, $\tau_6 = (7,55; 7,56)$, $\tau_7 = (4,42; 4,43)$. Відзначимо, що для адитивно зваженої діаграми Вороного більшому значенню ваги a_i відповідає підмножина меншої площі.



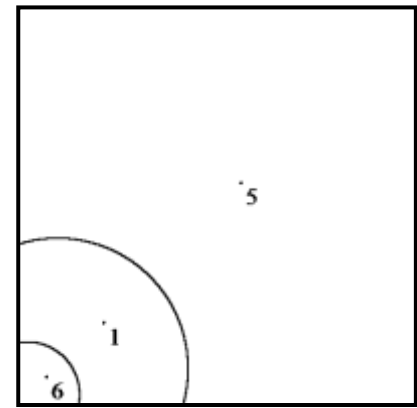
а) стандартна
 $a=(0,0,0,0,0,0,0)$;
 $w=(1,1,1,1,1,1,1)$



б) адитивно зважена
 $a=(1,3,2,2,1,1,2)$;
 $w=(1,1,1,1,1,1,1)$



в) мультиплікативно зважена
 $a=(0,0,0,0,0,0,0)$;
 $w=(2,1,3,1,4,1,2)$



г) адитивно-
 мультиплікативно зважена
 $a=(1,3,2,2,1,1,2)$;
 $w=(2,1,3,1,4,1,2)$

Рис. 5.2. Діаграми Вороного з оптимальним розміщенням 7-ми точок-генераторів

Для мультиплікативно зваженої діаграми Вороного (рис. 5.2 в)) в результаті роботи алгоритму за 84 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F=64,63$; оптимальні координати точок-генераторів

$\tau_1 = (1,97; 3,08)$, $\tau_2 = (3,21; 0,79)$, $\tau_3 = (2,07; 7,52)$, $\tau_4 = (5,09; 1,04)$,
 $\tau_5 = (6,91; 6,21)$, $\tau_6 = (0,96; 0,77)$, $\tau_7 = (8,10; 1,47)$. Відзначимо, що для мультиплікативно зваженої діаграми Вороного більшому значенню ваги w_i відповідає підмножина більшої площі.

Для адитивно-мультиплікативно зваженої діаграми Вороного (рис. 5.2 г)) в результаті роботи алгоритму за 63 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 187,32$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (2,12; 2,07)$, $\tau_3 = (5,85; 5,85)$, $\tau_5 = (5,60; 5,60)$, $\tau_6 = (0,66; 0,70)$, $\tau_7 = (0,63; 1,70)$. Відзначимо, що на рис. 5.2г) підмножини з номерами 2, 3, 4, 7 зникли, тому що числові значення їх ваг a_i більше, ніж для підмножин з номерами 1, 5, 6.

Таким чином, можна зробити висновок, що при відповідному формулюванні неперервної лінійної задачі оптимального розбиття множини з n -вимірною евклідовою простору E_n на підмножини розв'язок цієї задачі призводить до діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині Ω простору E_n .

Модельна задача 5.2. Побудова узагальненої адитивно зваженої діаграми Вороного з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі.

У цій модельній задачі проілюстровано роботу алгоритму, описаному в пункті 5.2, розв'язання модельної неперервної задачі 5.2 оптимального розбиття множини Ω з E_2 на підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ з відшуканням координат центрів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ цих підмножин при нечітких параметрах в цільовому функціоналі на прикладі побудови узагальненої адитивної діаграми Вороного с нечіткими параметрами і з розміщенням $N = 5$ точок генераторів в множині $\Omega = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$.

Відзначимо спочатку, що в результаті розв'язання задачі 5.2 з чіткими параметрами описаним алгоритмом побудовано узагальнену адитивну діаграму Вороного з розміщеними п'ятьма точками-генераторами $\tau^*_1, \tau^*_2, \dots, \tau^*_N$ та заданими чіткими значеннями параметрів $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,1$; $a_3 = 0,38$; $a_4 = 0,2$; $a_5 = 0$. Функція відстані $c(x, \tau_i)$ від точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ до точки-генератора $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$ задається таким чином:

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

В результаті роботи описаного алгоритму за 46 ітерацій були отримані:

- максимальне значення функціонала $G(\tau)$ з (5.17), яке дорівнює 0,26722;
- мінімальне значення цільового функціоналу F задачі 5.2, яке дорівнює 0,26789.

Ця діаграма Вороного представлена на рис. 5.3, де суцільною лінією позначені межі підмножин Ω_i , $i = 1, 2, 4, 5$, а символом «●» – оптимальні координати точок-генераторів: $\tau_1^* = (0,28439; 0,23794)$; $\tau_2^* = (0,19985; 0,76565)$; $\tau_4^* = (0,81255; 0,14963)$; $\tau_5^* = (0,70583; 0,65526)$.

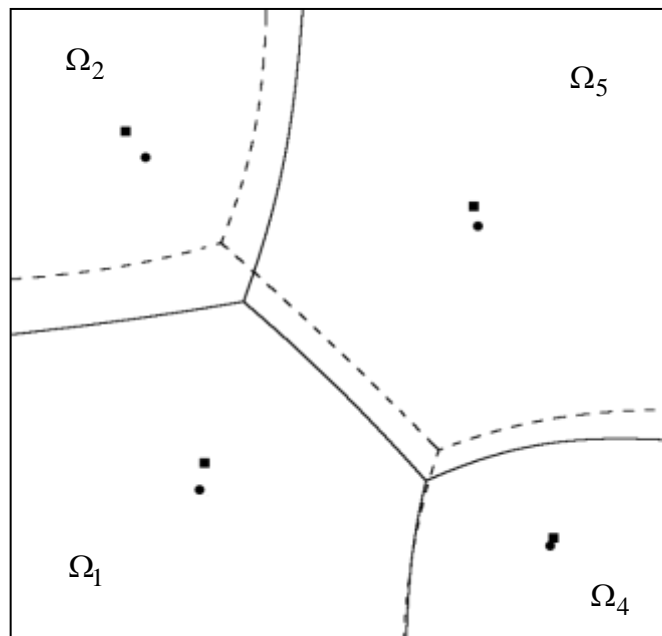


Рис. 5.3. Діаграми Вороного для модельної задачі 5.2

При цьому замість розбиття на $N = 5$ підмножин оптимальним виявилось розбиття на чотири підмножини: підмножина Ω_3 виявилось порожньою, тому що значення a_3 значно більше, ніж a_i , $i=1,2,4,5$. Звертаємо увагу, що межі між різними комірками адитивної діаграми Вороного, представленої на рис. 5.3, є, як доведено в [39], або сегментами гілок гіперболи, якщо $a_i \neq a_j$, або прямими, якщо $a_i = a_j$, $i, j = 1, 2, 4, 5$. У випадку $a_i = a_j$ комірки Вороного є опуклими багатогранниками.

Перейдемо до ілюстрації описаного у пункті 5.2 алгоритму для розв'язання цієї ж задачі, але при наявності нечітких параметрів a_i , $i=1, \dots, 5$, у цільовому функціоналі.

Після застосування методу нейролінгвістичній ідентифікації для відновлення (до настройки) параметрів a_i , $i=1, \dots, 5$, отримуємо наступні їх значення: $a_1 = 0,07493$; $a_2 = 0,19432$; $a_3 = 0,33743$; $a_4 = 0,21138$; $a_5 = 0,04007$. Далі, в результаті застосування описаного алгоритму розв'язання задачі 5.2 з цими відновленими значеннями параметрів a_i , $i=1, \dots, 5$, були отримані за 44 ітерації:

- адитивна діаграма Вороного з оптимально розміщеними в Ω точками-генераторами $\tau^*_1, \tau^*_2, \dots, \tau^*_5$, яка представлена на рис. 5.3, де пунктирною лінією позначені межі підмножин Ω_i , $i=1,2,4,5$, а символом «■» – оптимальні координати відповідних точок-генераторів: $\tau^*_1 = (0,28883; 0,27976)$; $\tau^*_2 = (0,17024; 0,80697)$; $\tau^*_4 = (0,81631; 0,16100)$; $\tau^*_5 = (0,69535; 0,68627)$;

- максимальне значення функціонала $G(\tau)$ з (5.17), яке дорівнює 0,30075;
- мінімальне значення цільового функціоналу F задачі 5.2, яке дорівнює 0,30299.

І нарешті, після відновлення значень параметрів a_i , $i=1, \dots, 5$, за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації і подальшого застосування описаного вище алгоритму до розв'язання задачі 5.2 з відновленими після настройки

значеннями параметрів $a_1 = 0,07000$; $a_2 = 0,10000$; $a_3 = 0,38000$; $a_4 = 0,20000$; $a_5 = 0,00000$, за 46 ітерацій були отримані такі ж результати (в межах заданої точності $\varepsilon = 0,0001$), що і для випадку з чіткими параметрами, а саме:

- відповідна діаграма Вороного (що збігається, в межах заданої точності, з діаграмою Вороного при чітких параметрах), представлена на рис. 2, де суцільною лінією позначені межі отриманих підмножин Ω_i , $i = 1, 2, 4, 5$, а символом «●» – координати точок-генераторів: $\tau_1^* = (0,28439; 0,23794)$; $\tau_2^* = (0,19985; 0,76565)$; $\tau_4^* = (0,81255; 0,14963)$; $\tau_5^* = (0,70583; 0,65526)$;

- максимальне значення функціонала $G(\tau)$ з (5.17), яке дорівнює 0,26722;

- мінімальне значення цільового функціоналу F задачі 5.2, яке дорівнює 0,26789.

Порівнюючи числові та графічні результати розв'язання модельної задачі, отримані для чітких параметрів a_1, \dots, a_5 в цільовому функціоналі та для нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 , відновлених за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації, бачимо, що оптимальні рішення цих задач збігаються з достатнім ступенем точності. Тобто запропонований підхід до побудови узагальненої діаграми Вороного з нечіткими параметрами є обґрунтованим і дає достовірні результати.

Модельна задача 5.3. Побудова адитивно та мультиплікативно зважених діаграми Вороного з нечіткими початковими даними.

На рис. 5.4 і 5.5 представлені адитивно зважена і мультиплікативно зважена діаграми Вороного для семи точок-генераторів, оптимально розміщених в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(i)} \leq 10, i = 1, 2\}$, отримані в результаті розв'язку задачі А описаним алгоритмом з нульових початкових наближень $\tau_i = (0; 0)$.

Для адитивно зваженої діаграми Вороного з нечіткими, відновленими до настройки, значеннями параметрів \hat{a}_i , $i = 1, \dots, N$, (рис. 5.4a)) в результаті роботи алгоритму за 92 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу

прямої задачі $F = 297,23$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (2,49; 7,59)$, $\tau_2 = (0,28; 0,42)$, $\tau_3 = (1,46; 1,32)$, $\tau_4 = (1,72; 4,05)$, $\tau_5 = (7,56; 2,69)$, $\tau_6 = (7,41; 7,58)$, $\tau_7 = (4,06; 1,84)$.

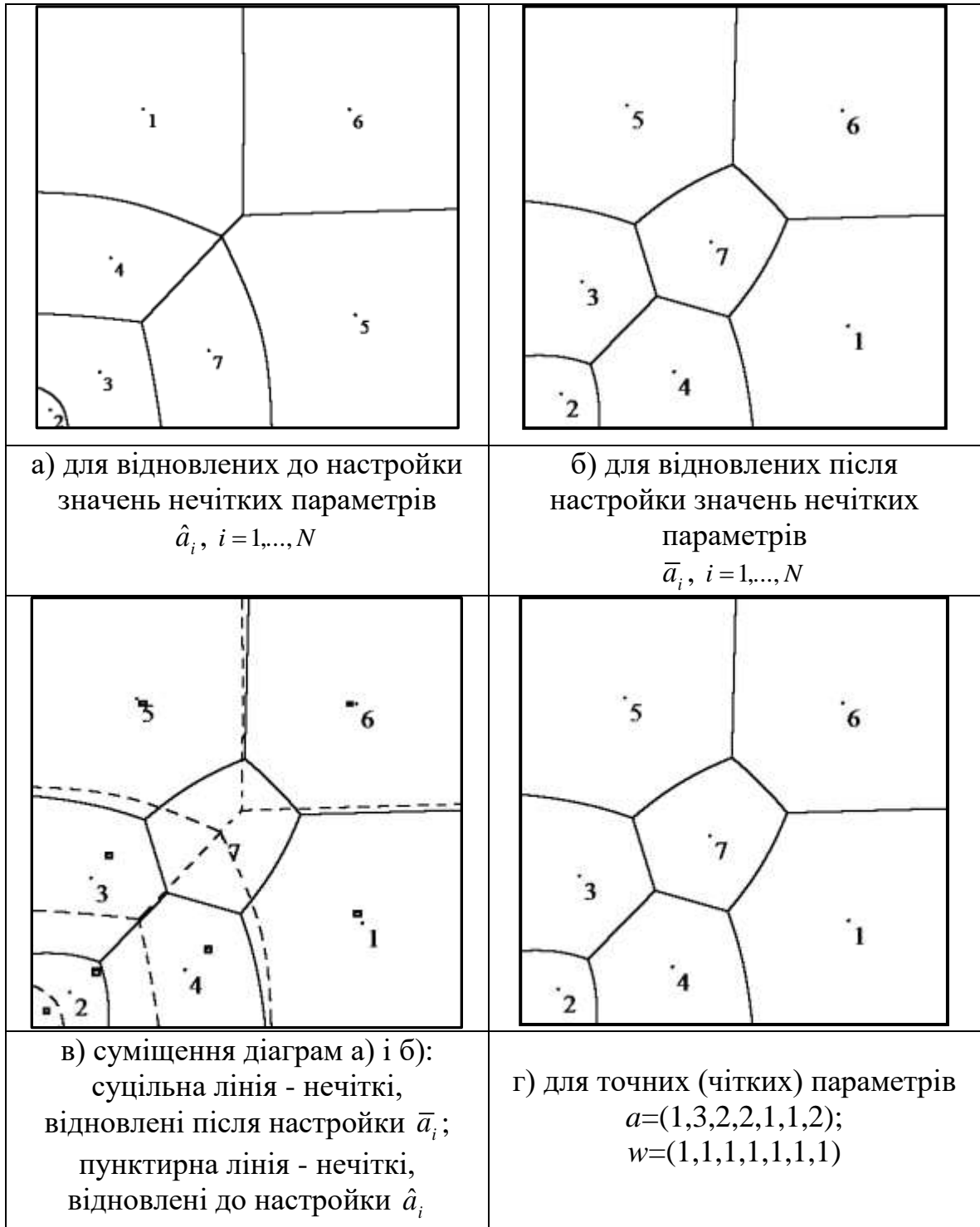


Рис. 5.4. Адитивно зважені діаграми Вороного з оптимальним розміщенням 7-ми точок генераторів

Для адитивно зваженої діаграми Вороного з нечіткими, відновленими після настройки, значеннями параметрів \bar{a}_i , $i=1,\dots,N$, (рис. 5.4б)) в результаті роботи алгоритму за 92 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 295,01$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (7,69; 2,43)$, $\tau_2 = (0,84; 0,81)$, $\tau_3 = (1,34; 3,48)$, $\tau_4 = (3,54; 1,33)$, $\tau_5 = (2,42; 7,68)$, $\tau_6 = (7,55; 7,56)$, $\tau_7 = (4,42; 4,43)$.

Для порівняння результатів на рис. 5.4в) представлено поєднання діаграм Вороного з нечіткими, відновленими до і після настройки, значеннями параметрів, а на рис. 5.4г) - для адитивно зваженої діаграми Вороного з чіткими значеннями параметрів. Для чітких значень параметрів в результаті роботи алгоритму за 92 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 295,01$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (7,69; 2,43)$, $\tau_2 = (0,84; 0,81)$, $\tau_3 = (1,34; 3,48)$, $\tau_4 = (3,54; 1,33)$, $\tau_5 = (2,42; 7,68)$, $\tau_6 = (7,55; 7,56)$, $\tau_7 = (4,42; 4,43)$.

Для мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з нечіткими, відновленими до настройки, значеннями параметрів \hat{w}_i , $i=1,\dots,N$, (рис. 5.5а)) в результаті роботи алгоритму за 84 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 65,63$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (7,96; 1,52)$, $\tau_2 = (3,74; 0,77)$, $\tau_3 = (2,23; 7,35)$, $\tau_4 = (4,67; 2,35)$, $\tau_5 = (7,05; 6,34)$, $\tau_6 = (1,04; 0,72)$, $\tau_7 = (2,02; 2,91)$.

Для мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з нечіткими, відновленими після настройки, значеннями параметрів \bar{w}_i (рис. 5.5б)) в результаті роботи алгоритму за 86 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 64,55$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (2,07; 3,10)$, $\tau_2 = (3,74; 0,79)$, $\tau_3 = (2,07; 7,52)$, $\tau_4 = (5,09; 1,04)$, $\tau_5 = (6,91; 6,21)$, $\tau_6 = (0,96; 0,77)$, $\tau_7 = (8,11; 1,49)$.

Для порівняння результатів на рис. 5.5в) представлено поєднання діаграм Вороного з нечіткими, відновленими до і після настройки, значеннями параметрів, а на рис. 5.5г) - для мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з чіткими значеннями параметрів.

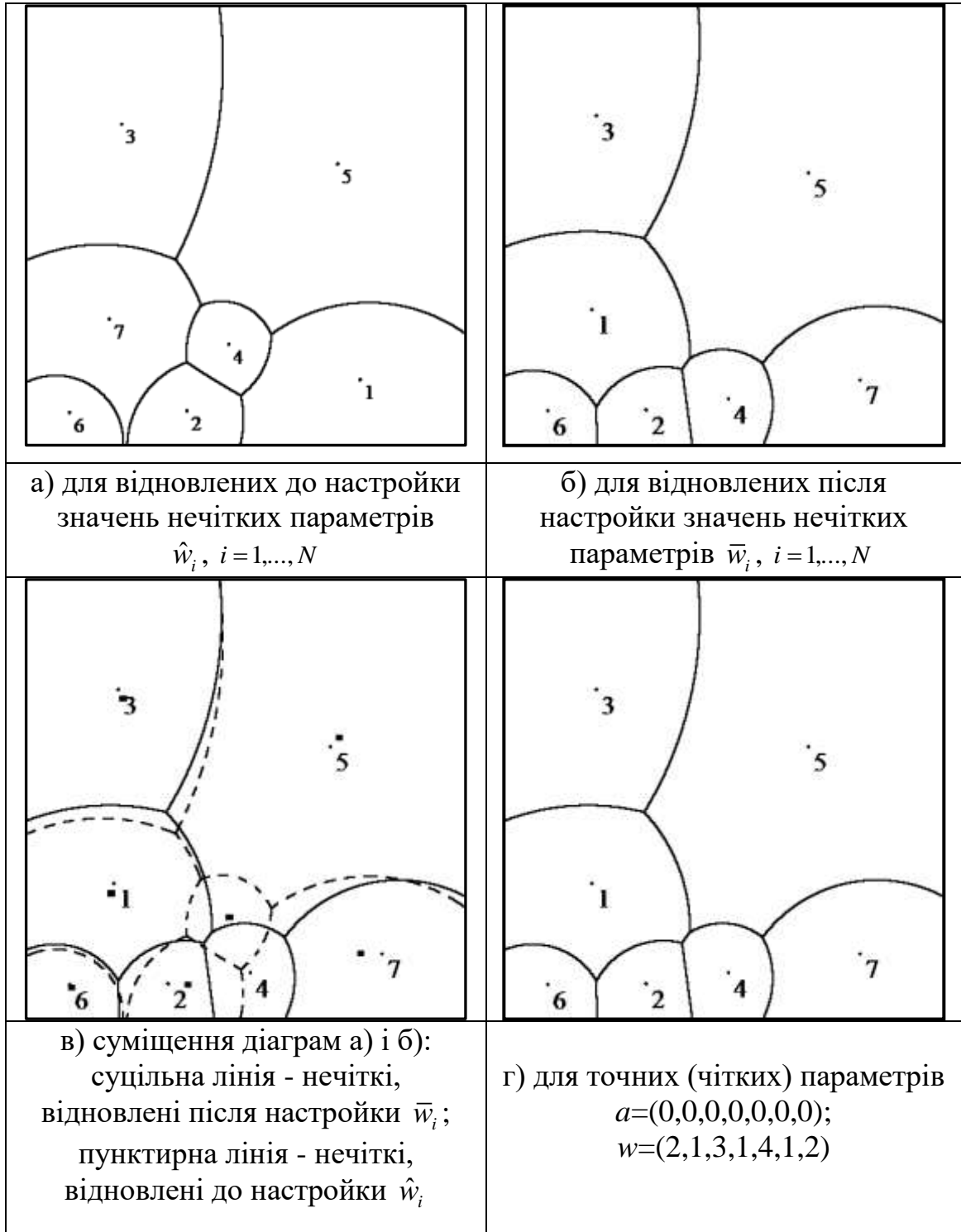


Рис. 5.5. Мультиплікативно зважені діаграми Вороного з оптимальним розміщенням 7-ми точок генераторів

Для чітких значень параметрів в результаті роботи алгоритму за 86 ітерації отримані: мінімальне значення цільового функціоналу прямої задачі $F = 64,55$; оптимальні координати точок-генераторів $\tau_1 = (2,07; 3,10)$, $\tau_2 = (3,74; 0,79)$, $\tau_3 = (2,07; 7,52)$, $\tau_4 = (5,09; 1,04)$, $\tau_5 = (6,91; 6,21)$, $\tau_6 = (0,96; 0,77)$, $\tau_7 = (8,11; 1,49)$.

Порівнюючи числові та графічні результати побудови адитивно і мультиплікативно зважених діаграм Вороного, бачимо (рис. 5.4, 5.5), що отримані оптимальні рішення для чітких параметрів і для нечітких, відновлених за методом нейролінгвістичній ідентифікації після настройки, збігаються з достатнім ступенем точності. Таким чином, можна зробити висновок, що синтез методів оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору на підмножини і нейронечітких технологій дозволяє успішно будувати адитивно і мультиплікативно зважені діаграми Вороного з оптимально розміщеними точками-генераторами в умовах невизначеності.

5.5 Висновки до розділу 5

У розділі розроблено нові алгоритми побудови узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного як в умовах визначеності, так і невизначеності початкових даних задачі, які можуть бути неточними, недостовірними, нечіткими. Для зняття невизначеності у вхідних даних, які мають нечітко-множинну природу, застосовано метод нейролінгвістичній ідентифікації нелінійних залежностей. Розроблені алгоритми побудови діаграм Вороного з нечіткими початковими даними засновані на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин і нейронечітких технологій.

Математичний і алгоритмічний апарат теорії оптимального розбиття множини з n -вимірною евклідовою простору E_n базується на єдиному підході, який полягає в зведенні вхідних нескінченновимірних задач оптимізації певним

чином (наприклад, через функціонал Лагранжа) до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, для числового розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційованої оптимізації – різні варіанти r -алгоритму Шора. Цей же r -алгоритм застосовано на етапі настройки у методі нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення точних значень нечітких параметрів діаграм Вороного.

Запропонований в роботі підхід до побудови різних видів діаграм Вороного має ряд переваг:

- не залежить від розмірності простору E_n , що містить обмежену множину Ω (питання зводиться лише до обчислення багатовимірних інтегралів, що входять до опису методу);
- завдяки високій швидкодії може бути застосований для задач великих розмірностей (100, 200, 300 і більше точок-генераторів);
- можна застосувати не тільки для евклідових метрик, але і для метрик Чебишева, манхеттенської та інших;
- складність реалізації алгоритму побудови діаграми Вороного на основі описаного підходу не збільшується при збільшенні кількості точок-генераторів.

Таким чином, методи оптимального розбиття множин є універсальним математичним апаратом для побудови різних типів діаграм Вороного, в основі якого лежить підхід, заснований на формулюванні неперервних задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору на підмножини з критерієм якості розбиття, що забезпечує відповідні види діаграм Вороного.

Універсальність розробленого підходу до побудови діаграм Вороного дає можливість узагальнити методи розв'язання задач оптимального розбиття множин на випадок нечіткого завдання вхідних параметрів задачі, а також поряд із задачею побудови діаграми Вороного з нечіткими параметрами ставити і

розв'язувати задачу відшукування оптимальних, в якомусь сенсі, координат точок-генераторів цієї діаграми.

Розроблені алгоритми програмно реалізовані, їх робота продемонстрована на прикладах побудови узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з нечіткими параметрами і оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині з n -мірного евклідового простору. На основі аналізу числових та графічних результатів розв'язання модельних задач різних видів діаграм Вороного можна зробити висновок, що синтез методів теорії оптимального розбиття множин і нейронечітких технологій дозволяє успішно будувати узагальнені, адитивно і мультиплікативно зважені діаграми Вороного з оптимально розміщеними точками-генераторами в умовах невизначеності.

Основні результати розділу опубліковані в [13, 15, 23, 24].

Розділ 6. МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

Актуальність задач оптимального розбиття множин пов'язана з широким практичним та теоретичним застосуванням теорії оптимального розбиття множин. Найпоширеними прикладами актуальних практичних задач, що можуть бути зведені до задач ОРМ, виявляються задачі location-allocation problem [171], суть яких полягає в розміщенні підприємств-виробників в деякій області з метою мінімізації сумарних витрат на виробництво та доставку продукції від виробників до споживачів при наявності або відсутності обмежень на обсяги виробництва, при заданих центрах розташування підприємств або при необхідності відшукування оптимальних координат їх розташування. На даний час актуальним є продовження досліджень неперервних задач ОРМ для різних типів додаткових обмежень з метою розробки методів і алгоритмів їх розв'язання.

У розділі розглядається задача ОРМ, де наявні обмеження не тільки на потужності підприємств, а ще накладаються деякі обмеження на розміщення координат центрів підмножин (координат розташування підприємств). Ці додаткові обмеження можуть відповідати географічній потребі при розміщенні центрів підмножин або деяким економіко-транспортним властивостям заданої множини, яка підлягає розбиттю.

Розділ присвячений розробці нових методів і алгоритмів розв'язання неперервних задач ОРМ із обмеженнями на розміщення центрів підмножин як в умовах визначеності, так і в умовах нечітких початкових даних.

6.1. Метод і алгоритм розв'язання задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена, вимірنا за Лебегом множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E^n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, N. \right\}$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx.$$

Тоді під неперервною лінійною задачею оптимального розбиття множини Ω з n -вимірного евклідового простору E_n на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей з відшукуванням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин та обмеженнями на їх розміщення будемо розуміти таку задачу.

Задача 6.1. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$;

A_1, \dots, A_N - множини простої структури, наприклад, n -вимірний невід'ємний октант, n -вимірний паралелепіпед та ін.;

$a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ - задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язання задачі 6.1:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Означення 6.1. Пару $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}\})$ яка є розв'язком задачі 1, будемо називати оптимальною.

Для обґрунтування методу розв'язання поставленої задачі введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \notin \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

підмножини $\Omega_i, i = 1, \dots, N$.

Перепишемо задачу 6.1 у вигляді задачі 6.2, зручному для подальших досліджень.

Задача 6.2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times A^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \text{ м.в. для } x \in \Omega\}$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Тут функції $c(x, \tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна і невід’ємна на Ω ; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які називають центрами цих підмножин, причому координати центрів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ заздалегідь невідомі та потребують свого визначення за умови

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N;$$

$a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ – задані невід’ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Задача 6.2 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$. Сформулюємо теорему, яка визначає вид її оптимального розв’язку.

Теорема 6.1. Оптимальний розв’язок задачі 6.2 $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ для $i = 1, \dots, N$, та майже всіх $x \in \Omega$ визначається за формулами:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (6.1)$$

де у якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$, $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної недиференційовної задачі оптимізації

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in A^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in A^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} \left[c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j \right] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (6.2)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (6.3)$$

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} \left(c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j \right) \rho(x) dx. \quad (6.4)$$

Алгоритм.

Для відшукування розв'язку задачі (6.2)-(6.4) будемо використовувати алгоритм узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, близький до r -алгоритму Шора. Для цього від задачі (6.2)-(6.4) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (4) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$: знайти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in A^N} P(\tau, \psi), \quad (6.5)$$

де

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - s \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i).$$

Тут s – досить велике додатне число (значно більше, ніж максимальний з множників Лагранжа для функції (6.4)). Про можливість переходу від задачі (6.2)-(6.4) до (6.5) див. в [39].

Визначимо i -у компоненту $2N$ -вимірною вектора узагальненого псевдоградієнту

$$g_P(\tau, \psi) = \left(g_P^\tau(\tau, \psi), -g_P^\psi(\tau, \psi) \right) =$$

$$= (g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

функції (6.5) в точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ наступним чином:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + s \max[0, \text{sign}(-\psi_i)], i = p + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6.6)$$

$$g_P^{\tau_i} = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, i = 1, \dots, N, \quad (6.7)$$

де $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$ є i -а компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнту $g_c^{\tau}(\tau, x)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$.

Опишемо алгоритм.

Алгоритм 1

Попередній етап. Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{[0]}, \psi^{[0]})$. Обчислюємо значення характеристичної функції $\lambda^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (6.1) при $\tau = \tau^{[0]}, \psi = \psi^{[0]}$. Обчислюємо компоненти вектору $g_P(\tau, \psi)$ у вузлах сітки за формулами (6.6) та (6.7) при $\tau = \tau^{[0]}, \psi = \psi^{[0]}, \lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r -алгоритму.

Крок 1 алгоритму проводимо за формулами

$$\begin{aligned} \tau^{[1]} &= P_{A^N} \left(\tau^{[0]} - h_0 g_P^{\tau}(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}) \right), \\ \psi^{[1]} &= \psi^{[0]} + h_0 g_P^{\psi}(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}), \end{aligned}$$

де P_{A^N} - оператор проектування кожного з центрів підмножин $\tau_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, N$) на його допустиму множину $A_i \subseteq \Omega$. У випадку, коли $\tau_i \in A_i = \Omega$ замість

оператора проектування P_{A^N} можна використовувати оператор проектування на координатний паралелепіпед P_{Π} .

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після $k, k = 1, 2, \dots$, кроків алгоритму отримані певні значення $\psi^{[k]}, \tau^{[k]}, \lambda^{[k-1]}(x)$ у вузлах сітки.

Крок $[k + 1]$ -й:

- 1) обчислюємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ в узлах сітки за формулою (6.1) при $\tau = \tau^{[k]}, \psi = \psi^{[k]}$;
- 2) обчислюємо значення $g_P(\tau, \psi)$ в узлах сітки за формулам (6.6)-(6.7) при $\tau = \tau^{[k]}, \psi = \psi^{[k]}, \lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$;
- 3) проводимо обчислення за ітераційними формулами

$$\begin{aligned}\tau^{[k+1]} &= P_{A^N} \left(\tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_P^{\tau} \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k]} \right) \right), \\ \psi^{[k+1]} &= \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi} \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k]} \right),\end{aligned}$$

де $B_{k+1}^{\tau}, B_{k+1}^{\psi}$ – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n , причому $B_0^{\tau} = I_N, B_0^{\psi} = I_N, I_N$ – одинична матриця; $\tilde{g}_P \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k]} \right) = B_{k+1}^* g_P \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k]} \right)$; h_k – величина кроку, яка розраховується із умови мінімуму різниці

$$\left[G_1 \left(\tau^{[k-1]}, \psi^{[k]} \right) - G_1 \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k-1]} \right) \right]$$

у напрямку узагальненого антипсевдоградієнта $-g_P(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі [99];

- 4) якщо умова

$$\left(\tau^{[k+1]}, \psi^{[k+1]} \right) - \left(\tau^{[k]}, \psi^{[k]} \right) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.8)$$

не виконується, переходимо до $[k + 2]$ -го кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5;

5) вважаємо $\tau_* = \tau^{[l]}$, $\psi^* = \psi^{[l]}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{[l]}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалась умова (8);

б) обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_1(\tau, \psi)$ за формулою (6.4) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$ та, для контролю правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу задачі 6.2 за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_{*i}) + a_i) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx.$$

Завершення роботи алгоритму 1.

Роботу розробленого алгоритму проілюстровано на двох модельних задачах у пункті 6.3.

6.2 Метод і алгоритм розв'язання нечіткої задачі оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин

Одним із напрямів розвитку теорії оптимального розбиття множин є дослідження задач оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідовою простору E_n в нечітких умовах. Нечіткість є природньою властивістю навколишнього світу, тому урахування у математичній постановці задач ОРМ можливості нечіткості вхідних даних очікувано призведе до підвищення адекватності досліджуваних математичних моделей.

У цьому пункті розглядається нечітка неперервна задача оптимального розбиття множин на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин, математична постановка якої ускладнена наявністю додаткових

обмежень на розміщення центрів підмножин та припущенням, що деякі вхідні дані задачі можуть бути задані нечітко. Неперервна задачі оптимального розбиття множин із додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин у чітких умовах розглянута у попередньому пункті. Задача 6.1 з попереднього пункту є нескінченновимірною задачею оптимального розбиття, при $a_i = 0, i = 1, \dots, N$, - це нескінченновимірна транспортна задача.

Однак, нескінченновимірні задачі оптимального розбиття з цільовим функціоналом (6.9) суттєво ускладнюються в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд параметрів в (6.9) є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

Розроблені метод та алгоритм розв'язання задачі 6.1 є основою для розробки методу та алгоритму розв'язання задачі, що розглядається, в нечітких умова.

Сформулюємо математичну постановку задачі оптимального розбиття множин із додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин та наявністю параметрів, які можуть бути неточними, невідомими, недовизначеними.

Постановка задачі.

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

де $\text{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, через Σ_{Ω}^N , тобто

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \quad (6.9)$$

Розглянемо випадок, коли в (6.1) точні значення параметрів a_1, \dots, a_N можуть бути невідомі, неточні або задані лінгвістично та залежать від деяких кількісних або якісних факторів z_1, \dots, z_q у вигляді: $a_i \equiv a_i(z_1, \dots, z_q)$. Тоді функціонал (6.9) запишемо у такому вигляді.

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i(z_1, \dots, z_q)) \rho(x) dx \quad (6.10)$$

Тоді під неперервною лінійною задачею оптимального розбиття множини Ω з n -вимірного евклідового простору E_n на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, що не перетинаються, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей з відшукуванням координат центрів τ_1, \dots, τ_N цих підмножин та обмеженнями на їх розміщення з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі будемо розуміти таку задачу.

Задача 6.3. Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$;

A_1, \dots, A_N - множини простої структури, наприклад, n -вимірний невід'ємний октант, n -вимірний паралелепіпед та ін.;

$a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язання задачі 6.1:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

цільовий функціонал $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$ має вид (6.10).

Означення 6.2. Пару $(\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}, \{\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}\})$ яка є розв'язком задачі 6.3, будемо називати оптимальною.

Для розв'язання задачі 6.3 з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі пропонується застосувати розроблений у розділі 3 єдиний підхід до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та обчислювального інтелекту. Спочатку для зняття нечіткості у початкових даних застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей, а потім застосовується математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ в умовах визначеності.

Таким чином, для зняття нечіткості параметрів a_1, \dots, a_N застосуємо метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей, розроблений у розділі 2 цієї роботи. Опишемо далі коротко його суть.

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_N позначимо їх відновленні значення як y та розглянемо функціональну залежність виходу y від входів z_1, \dots, z_q об'єкта ідентифікації у виді:

$$y = y(z_1, \dots, z_q), \quad (6.11)$$

тут z_1, \dots, z_q - фактори, що впливають на y . Тобто для кожного з параметрів a_1, \dots, a_N розглядається залежність виду (6.11), де відповідний параметр залежить від кількісних або якісних факторів, які впливають на нього $a_i \equiv a_i(z_1, \dots, z_q)$, $i = 1, \dots, N$. Зауважимо, що залежність (6.11) відповідає залежності (2.4) з розділу 2 дисертації, де викладено метод нейролінгвістичної ідентифікації нелінійних залежностей.

Для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів z_1, \dots, z_q , область зміни виходу y для (6.11), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (6.10) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об'єкта ідентифікації.

Як зазначено у розділі 2, задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності виду (6.11) розглядається як побудова моделі об'єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язки <входи> - <вихід> та вирішується, як правило, в два етапи [5]: структурна ідентифікація та параметрична ідентифікація.

У результаті застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації отримуємо точне (чітке) значення вихідної змінної y , яке розраховується за формулами (2.18)-(2.21).

Зауваження 1. Значення ваг правил нечіткої бази знань у (2.20) та параметрів функції належності (2.21) відмічені зірочкою як оптимальні, тобто такі, що отримані у результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичної ідентифікації, для яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об'єкта (6.10), досягає мінімального значення.

Зауваження 2. Для настройки параметрів нечіткої моделі застосовано r -алгоритм Шора [100].

Таким чином, у функціоналі (6.10) кожний з параметрів a_1, \dots, a_N , позначених раніше як вихід y , що залежить від входів z_1, \dots, z_q , у методі нейролінгвістичної ідентифікації, розраховується за формулами (2.18)-(2.21). Після відновлення точних значень відповідних нечітких параметрів в (6.10) за допомогою описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації, отримуємо їх відновлені значення та позначимо їх: до настройки - $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N$, а після настройки - $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N$.

Далі для розв'язання задачі 6.3. уже з точними, відновленими значеннями нечітких параметрів у цільовому функціоналі застосуємо математичний і алгоритмічний апарат теорії ОРМ в умовах визначеності [39].

Уводячи характеристичну функцію $\lambda_i(x)$ для кожної підмножини Ω_i , $i = 1, \dots, N$,

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \notin \Omega \setminus \Omega_i \end{cases}$$

перепишемо задачу 6.3 в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ у вигляді задачі 6.4, зручному для подальших досліджень.

Задача 6.4. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times A^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

де

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \},$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N \}.$$

Функції $c(x, \tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за аргументом x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх

$i = 1, \dots, N$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ - сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які називають центрами цих підмножин, причому координати центрів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ заздалегідь невідомі та потребують свого визначення за умови $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_N}_{A^N} \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$;

b_1, \dots, b_N - задані невід'ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (6.12)$$

В (6.12) через \bar{a}_i позначені нечіткі параметри a_1, \dots, a_N , значення яких відновлені за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації. Задача 6.4 є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$.

Для задачі 6.4 в роботі [41] доведено теорему, яка визначає вид її оптимального розв'язку $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ для $i = 1, \dots, N$, та майже всіх $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_{*i}) + \bar{a}_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + \bar{a}_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (6.13)$$

де у якості $(\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$ обирається оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної недиференційовної задачі оптимізації

$$G(\psi) = \min_{\tau \in A^N} G_1(\tau, \psi) =$$

$$= \min_{\tau \in A^N} \left[\int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right] \rightarrow \max \quad (6.14)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.15)$$

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} [c(x, \tau_j) + \bar{a}_j + \psi_j] \rho(x) dx. \quad (6.16)$$

Для відшукування розв'язку задачі (6.14)-(6.16) будемо використовувати алгоритм узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, близький до r -алгоритму Шора [27].

Для цього від задачі (6.14)-(6.16) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (6.14) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$: знайти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in A^N} P(\tau, \psi), \quad (6.17)$$

де

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - s \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i). \quad (6.18)$$

Тут s – досить велике додатне число (значно більше, ніж максимальний з множників Лагранжа для функції (6.16)). Про можливість переходу від задачі (6.14)-(6.16) до (6.17) див. в [41].

Визначимо i -у компоненту $2N$ -вимірного вектора узагальненого псевдо градієнту

$$g_p(\tau, \psi) = (g_p^\tau(\tau, \psi), -g_p^\psi(\tau, \psi)) = (g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

функції (6.18) в точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ наступним чином:

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + s \cdot \max[0, \text{sign}(\psi_i)], & i = p+1, \dots, N \end{cases} \quad (6.19)$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.20)$$

де $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$ є i -а компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнта $g_c^\tau(\tau, x)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$.

Опишемо алгоритм.

Алгоритм

Попередній етап. Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{[0]}, \psi^{[0]})$. Обчислюємо значення характеристичної функції $\lambda^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (6.13) при $\tau = \tau^{[0]}$, $\psi = \psi^{[0]}$. Обчислюємо компоненти вектору $g_p(\tau, \psi)$ у вузлах сітки за формулами (6.19) та (6.20) при $\tau = \tau^{[0]}$, $\psi = \psi^{[0]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[0]}(x)$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r -алгоритму.

Крок 1 алгоритму проводимо за формулами

$$\begin{aligned}\tau^{[1]} &= P_{A^N}(\tau^{[0]} - h_0 g_p^\tau(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}), \\ \psi^{[1]} &= \psi^{[0]} + h_0 g_p^\psi(\tau^{[0]}, \psi^{[0]}),\end{aligned}$$

де P_{A^N} - оператор проектування кожного з центрів підмножин $\tau_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, N$) на його допустиму множину $A_i \subseteq \Omega$.

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після k , $k = 1, 2, \dots$ кроків алгоритму отримані певні значення $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k-1]}(x)$ у вузлах сітки.

Крок $[k + 1]$ -й:

- 1) обчислюємо значення $\lambda^{[k]}(x)$ в узлах сітки за формулою (6.13) при $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$;
- 2) обчислюємо значення $g_p(\tau, \psi)$ в узлах сітки за формулам (6.19)-(6.20) при $\tau = \tau^{[k]}$, $\psi = \psi^{[k]}$, $\lambda(x) = \lambda^{[k]}(x)$;

3) проводимо обчислення за ітераційними формулами

$$\begin{aligned}\tau^{[k+1]} &= P_{A^N}(\tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^\tau g_P^\tau(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}), \\ \psi^{[k+1]} &= \psi^{[k]} + h_k B_{k+1}^\psi g_P^\psi(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}),\end{aligned}$$

де $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n , причому $B_0^\tau = I_N, I_N$ – одинична матриця;

$\tilde{g}_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]}) = B_{k+1}^* g_P(\tau^{[k]}, \psi^{[k]})$; h_k – величина кроку, яка розраховується із умови мінімуму різниці

$$[G_1(\tau^{[k-1]}, \psi^{[k-1]}) - G_1(\tau^{[k]}, \psi^{[k-1]})]$$

у напрямку узагальненого антипсевдоградієнта $-g_P(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі [99];

4) якщо умова

$$\|(\tau^{[k+1]}, \psi^{[k+1]}) - (\tau^{[k]}, \psi^{[k]})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.21)$$

не виконується, переходимо до $[k+2]$ -го кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5;

5) вважаємо $\tau_* = \tau^{[l]}, \psi_* = \psi^{[l]}, \lambda_*(x) = \lambda^{[l]}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалась умова (6.21);

б) обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_1(\tau, \psi)$ за формулою (6.16) при $\tau = \tau_*, \psi = \psi_*$ та, для контролю правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціоналу задачі 6.4 за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_{*i}) + \bar{a}_i) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx$$

Завершення роботи алгоритму.

Розроблений алгоритм програмно реалізований мовою програмування Java у середовищі розробки IntelliJ IDEA. Його робота проілюстрована на модельних задачах у підрозділі 6.3.

6.3 Розв'язання модельних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин

У модельних задачах 6.1-6.3 представлені задачі оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності.

Модельна задача 6.1. Задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин в умовах визначеності.

Нехай задана множина $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ споживачів деякої однорідної продукції, яка виробляється чотирма пунктами виробництва. Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i=1, \dots, 9$, пункту виробництва до споживача $(x^{(1)}, x^{(2)})$ має вид

$$c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

$$\text{Попит на продукцію } \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega.$$

Потужність i -го, $i=1, \dots, 4$, пункту виробництва визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i . На потужності пунктів виробництва обмеження не накладені, але існують додаткові обмеження на розміщення четвертого підприємства у вигляді прямокутника: $\tau_4 \in A_4 \subset \Omega$, а саме множина A_4 задана таким чином:

$$A_4 = \{(x, y): 0.55 \leq x \leq 0.65, 0.9 \leq y \leq 0.95\}.$$

Зауваження. Тут і надалі для кожної модельної задачі з додатковими обмеженнями на розміщення центрів підмножин отримані результати будуть порівняні із задачами без додаткових обмежень.

На рисунку 6.1а) зображено оптимальне розбиття для випадку задачі без додаткових обмежень, з урахуванням обмежень на розміщення 4-го підприємства – на рис. 6.1б). Пунктирною лінією на рис. 6.2б) зображена множина A_4 . При розв’язанні використовувалась сітка 100x100.

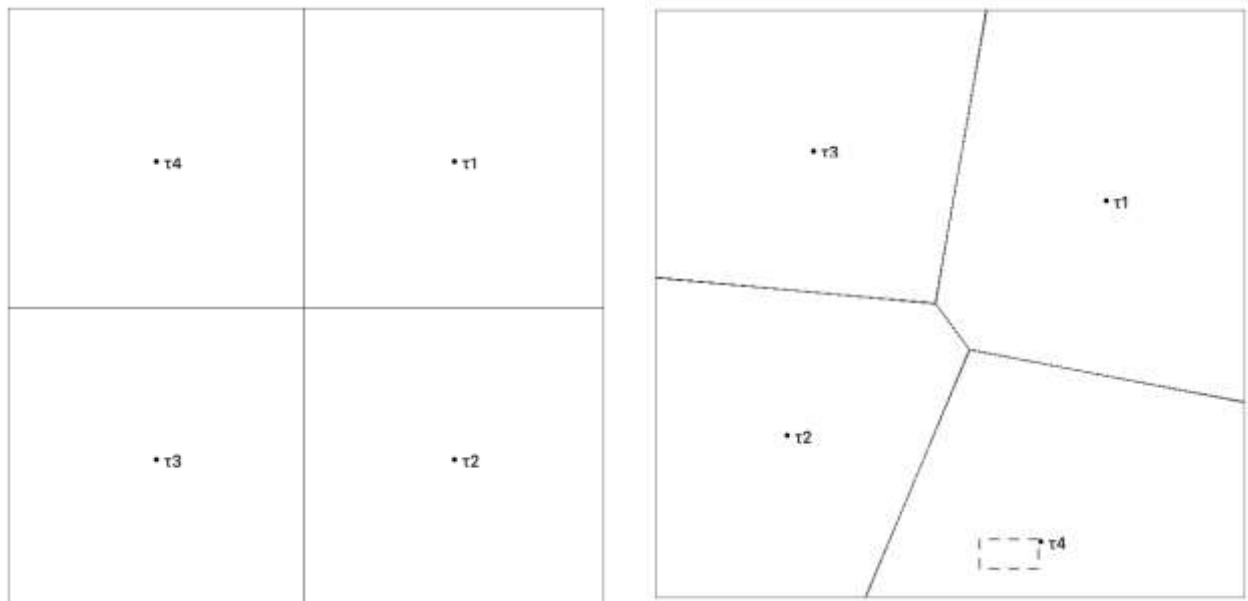
Порівняння отриманих координат центрів наведено у таблиці 6.1 та значень функціоналів для модельної задачі 6.1 наведено у таблиці 6.2.

Таблиця 6.1 – Порівняльна таблиця отриманих центрів підмножин

| | | τ_1 | τ_2 | τ_3 | τ_4 |
|---------------|-----|----------|----------|----------|----------|
| Без обмежень | x | 0.25249 | 0.25251 | 0.75247 | 0.75246 |
| | y | 0.25245 | 0.75254 | 0.25246 | 0.75249 |
| З обмеженнями | x | 0.74247 | 0.20889 | 0.23096 | 0.65 |
| | y | 0.31837 | 0.70855 | 0.26851 | 0.90807 |

Таблиця 6.2 – Порівняльна таблиця значень цільових функціоналів

| | Значення функціоналу | Кількість ітерацій |
|---------------|----------------------|--------------------|
| Без обмежень | 0.19134 | 31 |
| З обмеженнями | 0.20036 | 683 |



а) оптимальне розбиття для модельної задачі 1 без додаткових обмеженнями б) оптимальне розбиття для модельної задачі 1 з додатковими обмеженнями

Рис. 6.1. Оптимальні розбиття для модельної задачі 6.1

Модельна задача 6.2. В якості другої модельної задачі розглядатимемо задачу з такими ж умовами, як і у модельній задачі 6.1, але множину Ω необхідно розбити на 9 підмножин та на усі центри підмножин накладені такі обмеження:

$$A_i = \{z = (x, y): \rho(z, z_0) \leq R\}, i = \overline{1,4},$$

де $z_0 = (0.5, 0.35)$; $R = 0.15$.

$$A_j = \{(x, y): 0.3 \leq x \leq 0.8, 0.65 \leq y \leq 0.95\}, j = \overline{4,9}.$$

На рисунку 6.2а) зображено оптимальне розбиття для випадку задачі без додаткових обмежень, з урахуванням обмежень – на рис. 6.2б).

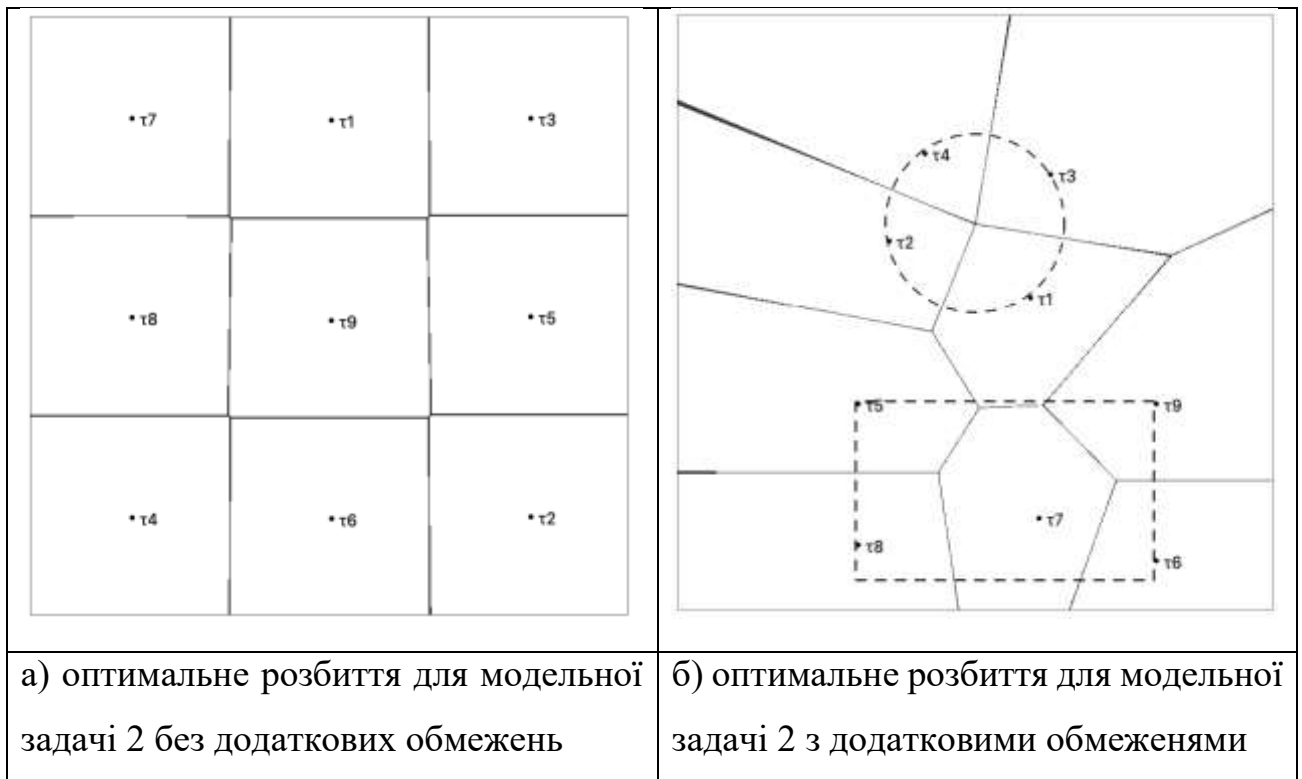


Рис. 6.2. Оптимальні розбиття для модельної задачі 2

Пунктирною лінією на рис. 6.2б) зображена множина A_4 . Пунктирною лінією на рис. 6.2б) зображені множини A_i , $i = 1, \dots, 9$. Порівняння значень функціоналів для модельної задачі 6.2 наведено у таблиці 6.3. При розв'язанні використовувалась сітка 100x100.

Таблиця 6.3 – Порівняльна таблиця значень цільових функціоналів оптимальних розбиттів для модеьної задачі 6.2

| | Значення функціоналу | Кількість ітерацій |
|---------------|----------------------|--------------------|
| Без обмежень | 0.12753 | 55 |
| З обмеженнями | 0.17589 | 982 |

Модельна задача 6.3.

Нехай задана множина Ω споживачів деякої однорідної продукції, яка виробляється дев'ятьма пунктами виробництва. Границя множини Ω , яка міститься у прямокутнику

$$P = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0.0 \leq x^{(1)} \leq 6.0; 0.0 \leq x^{(2)} \leq 20.0\},$$

задана таким рівнянням:

$$\frac{(x^{(1)} - 3)^2}{9} + \frac{(x^{(2)} - 10)^2}{100} = 1.$$

Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i = 1, \dots, 9$, пункту виробництва до споживача $(x^{(1)}, x^{(2)})$ має вид

$$c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$.

Потужність i -го, $i = 1, \dots, 9$, пункту виробництва визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i . На потужності пунктів виробництва накладені такі обмеження:

$$\int_{\Omega_1} \rho(x) dx \leq 15, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq 10, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, \quad \int_{\Omega_5} \rho(x) dx \leq 30, \quad \int_{\Omega_9} \rho(x) dx \leq 19.$$

Не виключається випадок, коли деякі з підмножин Ω_i можуть виявитися порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування Ω_i дев'ятьма пунктами виробництва за умови, що $\bigcup_{i=1}^9 \Omega_i = \Omega$, $mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 9$, та розмістити ці пункти в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на доставку продукції до споживача (задача 6.1).

Задано такі значення вагових коефіцієнтів a_i цільового функціоналу задачі 6.1: $a_1 = 0$, $a_9 = 0$, $a_i = 100$, $i = 2, \dots, 8$. Також на координати τ_i розташування пунктів виробництва накладені додаткові обмеження двох варіантів.

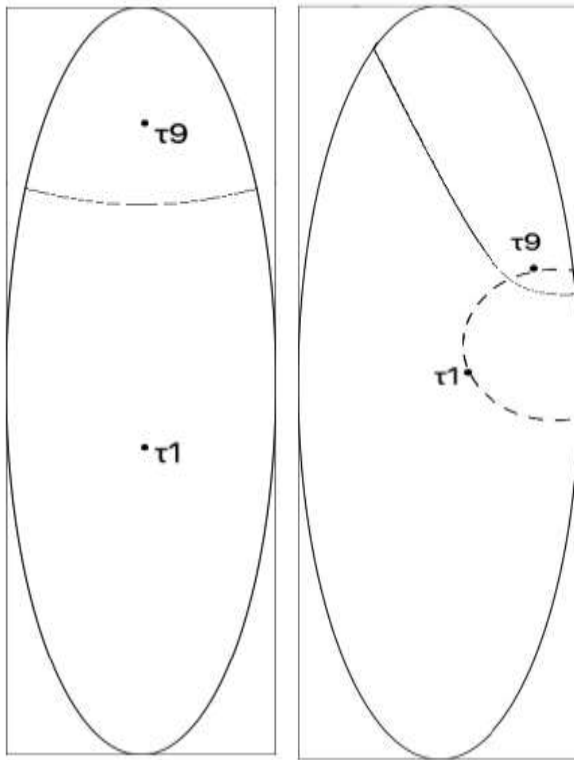
Варіант 3.1. $\tau_i \in A_i = \left\{ \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) : \tau_i - z \leq r \right\}$, $i = 1, 9$, де $z = (0.5; 11)$; $r = 2$.

Варіант 3.2. $\tau_i \in A_i = \left\{ \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) : \tau_i - z \leq r \right\}$, $i = 1, 6, 9$, де $z = (4.0; 10.0)$; $r = 2$.

Для розв'язання модельної задачі 6.3 (обох варіантів) за допомогою описаного алгоритму та його програмної реалізації множина Ω покривалася прямокутною сіткою з вузлами (i, j) , $i = 1, \dots, 60$, $j = 1, \dots, 200$. В якості початкових значень двоїстих змінних задані $\psi^{[0]} = 0$, початкові координати розташування пунктів виробництва $\tau_i^{[0]} = (0; 0)$, $i = 1, \dots, 9$. Для умови припинення обчислень (6.8) задано значення $\varepsilon = 10^{-5}$.

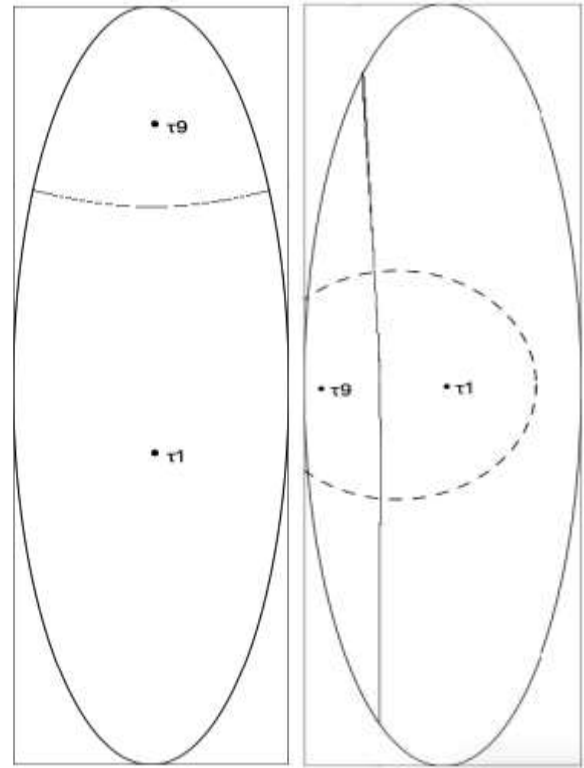
В результаті роботи алгоритму для варіанту 6.3.1: а) за 56 ітерацій отримано значення функціоналу $G = 321.9599$. Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.3а). Зазначимо, що для заданих значень вагових коефіцієнтів a_1, \dots, a_9 найдешевші перевезення відповідають першому та дев'ятому пунктам виробництва, тому у оптимальному розбитті множини Ω залишились саме ці пункти та відповідні їм підмножини Ω_1 та Ω_9 з центрами τ_1 та τ_9 .

В результаті роботи алгоритму для варіанту 6.3.1 б) за 97 ітерацій отримано значення функціоналу $G = 398.5258$. Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.3б), де пунктирною лінією зображені множини A_i , $i = 1, 9$, для додаткових обмежень на розташування координат 1-го та 9-го пунктів виробництва.



а) без додаткових омежень б) з додатковими омеженнями

Рис. 6.3. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для модельної задачі 6.3 (варіант 3.1)



а) без додаткових омежень б) з додатковими омеженнями

Рис. 6.4. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для модельної задачі 6.3 (варіант 3.2)

В результаті роботи алгоритму для варіанту 6.3.2: а) за 56 ітерацій отримано значення функціоналу $G = 303.31182$. Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.4а). Зазначимо, що для заданих значень вагових коефіцієнтів a_1, \dots, a_9 найдешевші перевезення відповідають першому та дев'ятому пунктам виробництва, тому у оптимальному розбитті множини Ω також залишились саме ці пункти та відповідні їм підмножини Ω_1 та Ω_9 з центрами τ_1 та τ_9 .

В результаті роботи алгоритму для варіанту 6.3.2 б) за 616 ітерацій отримано значення функціоналу $G = 424.98537$. Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.4б), де пунктирною лінією зображені множини $A_i, i = 1, 9$, для

додаткових обмежень на розташування координат 1-го та 9-го пунктів виробництва.

Модельна задача 6.3.

Множина Ω має вигляд: $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0.0 \leq x \leq 1.0; 0.0 \leq x^{(2)} \leq 1.0\}$.

Необхідно розбити цю множину на 12 підмножин.

Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i=1, \dots, 12$, пункту виробництва до споживача з координатами $(x^{(1)}, x^{(2)})$ має вигляд:

$$c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i) = |x^{(1)} - \tau_i^{(1)}| + |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}|,$$

попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$,

$$a_i = 0, i=1, \dots, 12; b_i = 1, i=1, \dots, 12.$$

Нехай на розташування координат центрів підмножин Ω_i задані такі обмеження: $\tau_i \in A_i$, де

$$A_i = \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0.05 \leq x^{(1)} \leq 0.3; 0.05 \leq x^{(2)} \leq 0.3 \right\}, \quad i=1, 2;$$

$$A_i = \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}): 0.7 \leq x^{(1)} \leq 0.95; 0.05 \leq x^{(2)} \leq 0.3 \right\}, \quad i=3, 7;$$

$$A_i = \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}): \rho(x, z_0) \leq r \right\}, \quad z_0 = (0.5; 0.5), \quad r = 0.2, \quad i=4, 5, 6, 12;$$

$$A_i = \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}): 0.05 \leq x^{(1)} \leq 0.3; 0.7 \leq x^{(2)} \leq 0.95 \right\}, \quad i=8, 9;$$

$$A_i = \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}): 0.7 \leq x^{(1)} \leq 0.95; 0.7 \leq x^{(2)} \leq 0.95 \right\}, \quad i=10, 11;$$

При розв'язанні задачі використовувалась сітка 100x100.

Розрахунки проводилися для двох випадків: а) без додаткових обмежень на координати розташування пунктів виробництва; б) з додатковими обмеженнями на координати розташування цих пунктів.

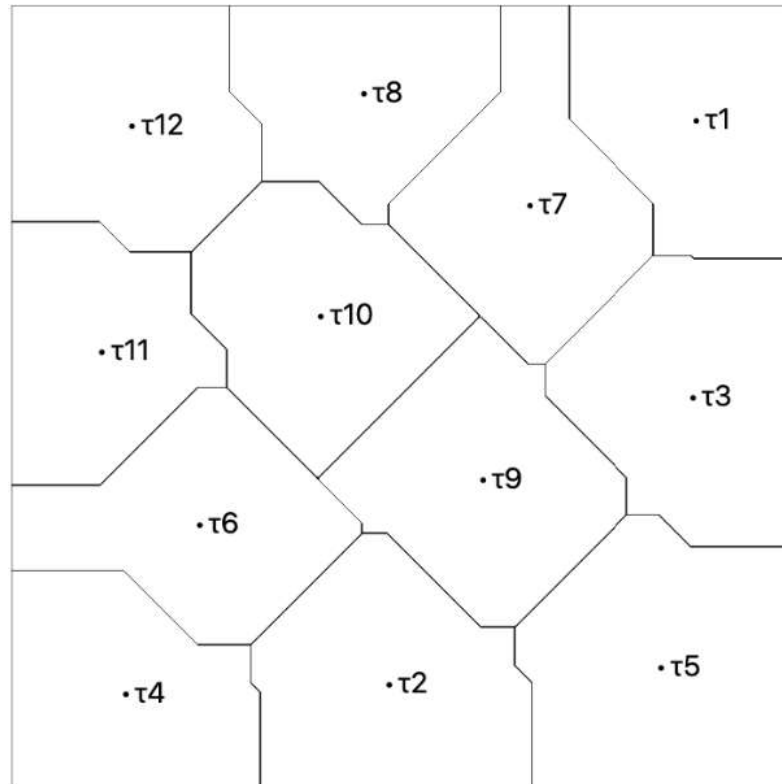


Рис. 6.5. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для модельної задачі 6.3 без додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва

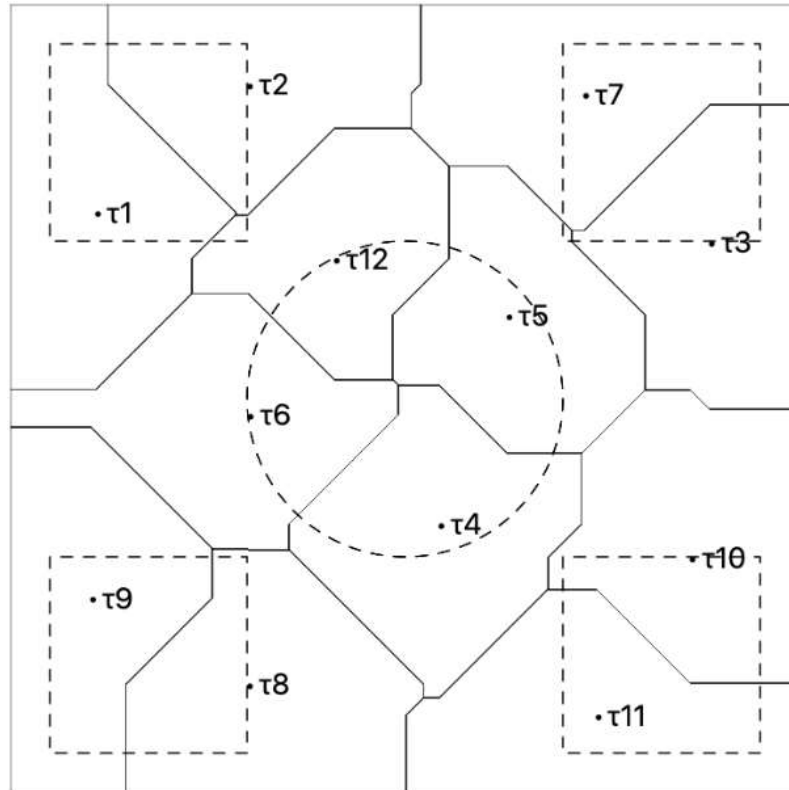


Рис. 6.6. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для модельної задачі 6.3 при наявності додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва

В результаті роботи алгоритму для випадку а) за 21 ітерацію отримано значення функціоналу $G = 0.1437$. Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.5. В результаті роботи алгоритму для випадку б) за 10 ітерацій отримано значення функціоналу $G = 0.1455$.

Знайдене оптимальне розбиття зображено на рис. 6.6, де пунктирною лінією зображені множини $A_i, i = 1,12$, для додаткових обмежень на розташування координат пунктів виробництва.

Аналіз результатів модельних задач 6.1-6.3.

Отримані результати свідчать про те, що в обох модельних задачах було отримано такі очікувані результати:

1. Кожний пункт виробництва був розміщений з урахуванням заданих обмежень на його координати.

2. Для кожної з модельних задач для випадків без додаткових обмежень на розташування центрів підмножин та при наявності таких додаткових обмежень отримані різні оптимальні границі підмножин Ω_{*i} та розташування їх центрів τ_{*i} . Причому, як очікувалося, значення цільових функціоналів для задачі з обмеженнями на розташування центрів не менше, ніж значення цільових функціоналів без таких обмежень.

Модельна задача 4.

У модельній задачі 4 представлена задача оптимального розбиття множини з обмеженнями на розміщення центрів підмножин з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі.

$$\text{Нехай задана множина } \Omega = \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1 \right\}$$

споживачів однорідної продукції, яка може вироблятися п'ятьма пунктами виробництва. Вартість транспортування одиниці продукції з i -го, $i = \overline{1, 5}$, пункту виробництва до споживача $(x^{(1)}, x^{(2)})$ задається наступним чином:

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \equiv 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$. При цьому потужність i -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i , і не перевищує заданих обсягів $b_i = 1, i = 1, \dots, 5$.

Не виключається випадок, коли деякі з підмножин Ω_i можуть виявитися порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування Ω_i п'ятьма пунктами виробництва та розмістити ці пункти в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал (6.1) сумарних витрат на доставку продукції до

споживача. Також на координати τ_i розташування пунктів виробництва накладені додаткові обмеження:

$$1) \text{ варіант 1: } \tau_2 \in A_2, \text{ де } A_2 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0,6 \leq x^{(1)} \leq 0,8; 0,3 \leq x^{(2)} \leq 0,5\};$$

$$2) \text{ варіант 2: } \tau_4 \in A_4, \text{ де } A_4 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : \|x - z_0\| \leq 0,12\}, z_0 = (0,3;0,6).$$

Для розв'язання модельної задачі за допомогою описаного алгоритму та його програмної реалізації множина Ω покривалася прямокутною сіткою з вузлами (i, j) , $i = 1, \dots, 100$, $j = 1, \dots, 100$. В якості початкових значень двоїстих змінних задані $\psi^{[0]} = 0$, початкові координати розташування пунктів виробництва $\tau^{[0]} = (0;0)$, $i = 1, \dots, 5$. Для умови припинення обчислень (6.15) задано значення $\varepsilon = 10^{-4}$.

Наведемо спочатку результати оптимального розбиття множини Ω при точних значення параметрів a_i : $a_1 = 0,07$; $a_2 = 0,1$; $a_3 = 0,38$; $a_4 = 0,2$; $a_5 = 0$. Для випадку відсутності додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 150 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,2679$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,2848;0,2415)$ $\tau_2 = (0,2019;0,7632)$ $\tau_4 = (0,8099;0,1496)$ $\tau_5 = (0,7103;0,6575)$ Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис.6.7 а). Тут замість розбиття на п'ять підмножин оптимальним виявилось розбиття на чотири підмножини, одна підмножина Ω_3 виявилася порожньою тому, що значення a_3 є значно більшим a_i , $i = 1, 2, 4, 5$.

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 8 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,2850$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,1755;0,3981)$ $\tau_2 = (0,6000;0,3000)$ $\tau_4 = (0,8805;0,1861)$

$\tau_5 = (0,6238;0,7402)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис.6.7 б).

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму за 28 ітерацій отримані: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,2792$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,2798;0,2137)$ $\tau_2 = (0,2813;0,8242)$ $\tau_4 = (0,1882;0,5564)$ $\tau_5 = (0,7446;0,5119)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис.6.7 в).

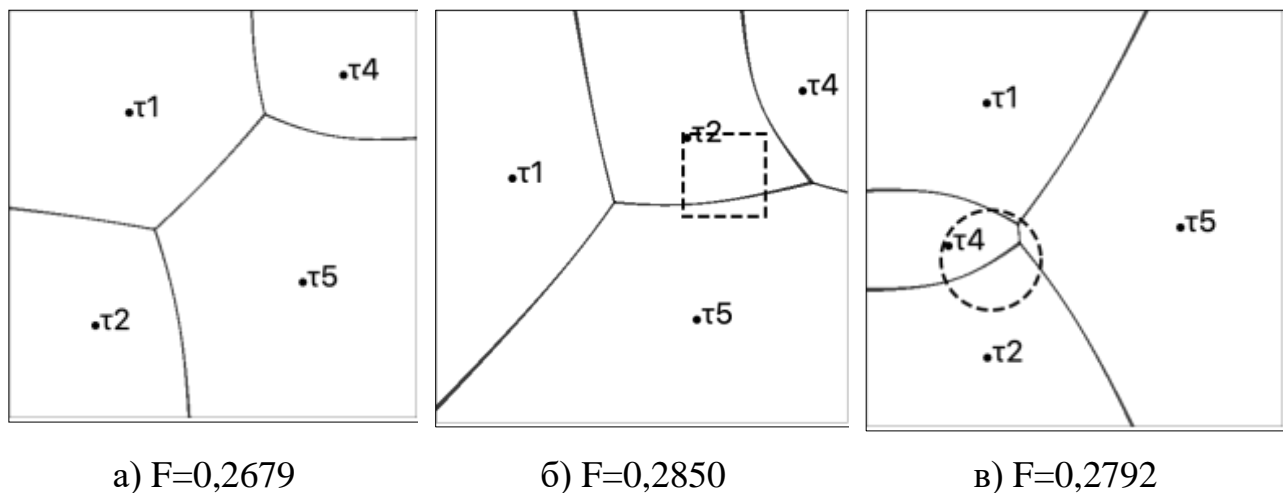


Рис. 6.7. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва для чітких параметрів a_i , $i = 1, 2, 4, 5$:

- а) без додаткових обмежень на розміщення пунктів виробництва;
- б) з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва, варіант 1;
- в) з додатковим обмеженням на розміщення пунктів виробництва, варіант 2.

Для розв'язання модельної задачі з нечіткими параметрами a_1, \dots, a_5 був застосований розроблений алгоритм з тими ж вхідними даними, що і для чітких параметрів a_1, \dots, a_5 .

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 1 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 до настройки отримані за 21 ітерацій: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,3189$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,2198; 0,3275)$ $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$ $\tau_4 = (0,8689; 0,2048)$ $\tau_5 = (0,5792; 0,7479)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис. 6.8а). При відновлених значеннях нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 після настройки отримані за 8 ітерацій: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,2850$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,1755; 0,3981)$ $\tau_2 = (0,6000; 0,3000)$ $\tau_4 = (0,8805; 0,1861)$ $\tau_5 = (0,6234; 0,7402)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис. 6.8б).

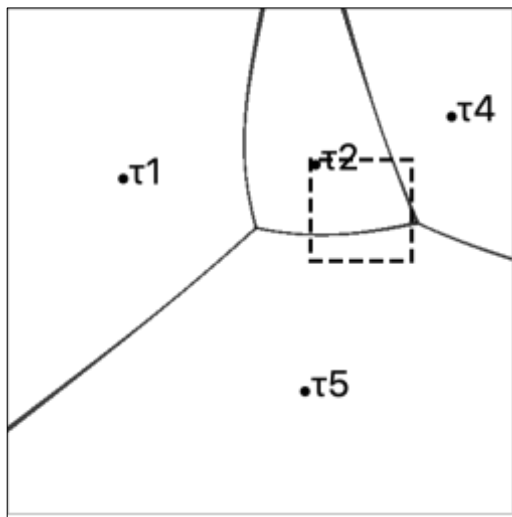
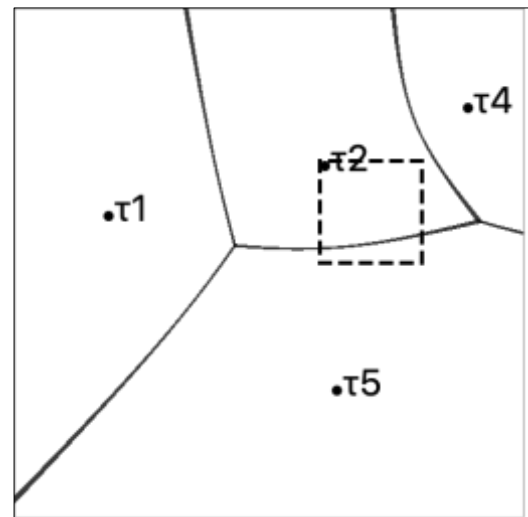
а) $F=0,3189$ б) $F=0,2850$

Рис. 6.8. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 1: а) для відновлених значень нечітких параметрів a_i , $i=1,2,4,5$, до настройки, б) після настройки.

Для випадку наявності додаткових обмежень за варіантом 2 на розміщення пунктів виробництва у результаті роботи алгоритму для відновлених значень нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 до настройки отримані за 10 ітерацій: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,3145$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,2490; 0,2753)$ $\tau_2 = (0,1547; 0,8174)$ $\tau_4 = (0,3801; 0,6893)$ $\tau_5 = (0,7523; 0,4238)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис. 6.9а). При відновлених значеннях нечітких параметрів a_1, \dots, a_5 після настройки отримані за 27 ітерацій: мінімальне значення цільового функціоналу $F=0,2792$, оптимальні координати центрів $\tau_1 = (0,2802; 0,2090)$ $\tau_2 = (0,2845; 0,8230)$ $\tau_4 = (0,1878; 0,5575)$ $\tau_5 = (0,7439; 0,5086)$. Оптимальне розбиття для цього випадку представлено на рис. 6.9б).

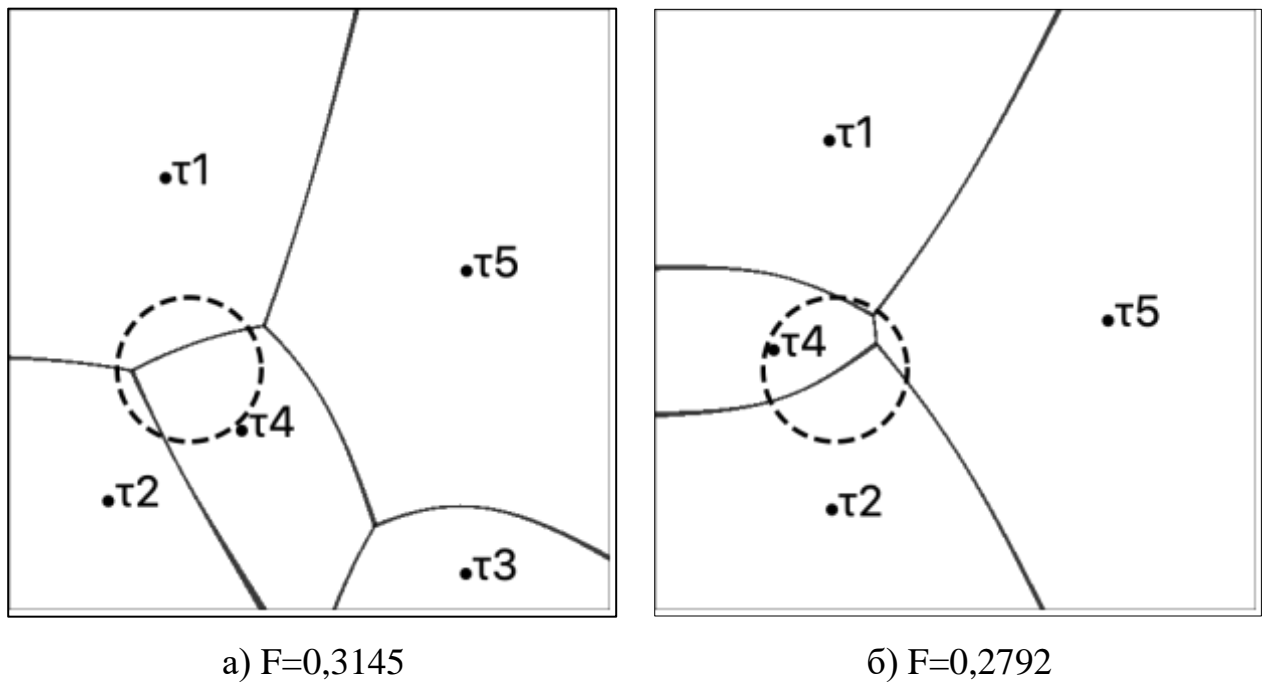


Рис. 6.9. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним пунктом виробництва з додатковими обмеженнями для варіанта 2: а) для відновлених значень нечітких параметрів a_i , $i=1,2,4,5$, до настройки, б) після настройки.

Висновки до результатів розв'язання модельної задачі 6.4.

Порівнюючи результати розв'язання модельної задачі (рис. 6.7, 6.8, 6.9), отримані для чітких параметрів та для нечітких, відновлених за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації після настройки, бачимо, що оптимальні розв'язки збігаються з достатнім ступенем точності.

Таким чином, можна зробити висновок, що метод нейролінгвістичної ідентифікації з достатнім ступенем точності відновлює значення параметрів, які невідомі або неточні. Причому, як очікувалося, значення цільових функціоналів для задачі з обмеженнями на розташування центрів не менше, ніж значення цільових функціоналів без таких обмежень.

6.4 Висновки до розділу 6

Розділ присвячений подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин з n -вимірною евклідового простору E_n на випадок неперервної задачі оптимального розбиття множин при наявності додаткових обмежень на розташування центрів підмножин як в умовах визначеності, так і в умовах нечітких початкових даних.

Розроблено нові метод і алгоритм розв'язання задачі неперервної задачі оптимального розбиття множин при наявності додаткових обмежень на розташування центрів підмножин, які базуються на застосуванні загального підходу, розробленого у теорії оптимального розбиття множин, а саме, зведення неперервної нескінченновимірної задачі оптимального розбиття до негладкої скінченновимірних задач оптимізації, для числового розв'язку якої застосовується модифікація ефективного методу недиференційовної оптимізації g -алгоритму Шора.

Розроблено та обґрунтовано метод розв'язання задачі неперервної задачі оптимального розбиття множин при наявності додаткових обмежень на розташування центрів підмножин та нечітких параметрів у цільовому функціоналі. Розроблено алгоритм для реалізації запропонованого методу. Алгоритм базується на синтезі методів розв'язання нескінченновимірних задач оптимального розбиття множин із n -вимірною евклідовою простору на підмножини з нейронечіткими технологіями та модифікаціями r -алгоритму Н.З. Шора, які засовуються для чисельного розв'язання двоїстих скінченновимірних негладких задач оптимізації.

Розроблені у розділі алгоритми програмно реалізовані. Їх робота проілюстрована на модельних задачах. Аналіз результатів розв'язку модельної задачі показав ефективність роботи розробленого алгоритму. А саме, знайдені алгоритмом координати центрів підмножин були розміщені з урахуванням заданих на них обмежень і, як очікувалося, значення цільових функціоналів для задачі з обмеженнями на розташування центрів не менше, ніж значення цільових функціоналів без таких обмежень.

Основні результати розділу опубліковані в [4, 5, 22]

Розділ 7. МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА НЕЧІТКІ ПІДМНОЖИНИ

Методи та алгоритми розв'язання задач оптимального розбиття множин із n -вимірною евклідовою простору E_n , які є задачами неklasичного нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними, розробляються у рамках теорії оптимального розбиття множин, яка знаходить все більш широке застосування для розв'язання різних як практичних, так і теоретичних задач.

В теорії неперервних задач ОРМ до теперішнього часу сформувався ряд напрямів, обумовлених як різними типами математичних постановок задач розбиття, так і різними сферами її застосувань. Переважна більшість задач цієї теорії досліджувалась в умовах визначеності. Проте ж в реальному житті часто наявні невизначеності: в початкових даних, в умовах і цілях. Тому природним представляється узагальнення моделей розбиття в умовах визначеності на випадок моделей в умовах невизначеності, а саме, нечітких задач оптимального розбиття. Постановка нечітких задач оптимального розбиття множин та деякі підходи до їх розв'язання були започатковані у роботі [39] та продовжені у роботах [24, 61, 150].

У даному розділі розглядається неперервна задача оптимального розбиття чітких множин з n -вимірною евклідовою простору E_n на нечіткі підмножини як із заданими координатами центрів підмножин, так і з відшуканням їх оптимальних координат. Пропонується алгоритм розв'язання поставленої задачі, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та теорії нечітких множин.

7.1 Метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини із заданими координатами центрів підмножин

Класифікація та деякі постановки нечітких задач оптимального розбиття множин наведені у розділі 2 дисертації. Там же наведені основні означення, необхідні для розробки методів і алгоритмів розв'язання нечітких задач ОРМ. Тут наведемо постановку неперервної задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини із заданими координатами центрів підмножин, для якої розробляються і обґрунтовуються метод та алгоритм розв'язання.

Задача 7.1. Нехай заданий фіксований вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\tau_i \in \Omega, \forall i = \overline{1, n}$, який інтерпретуватимемо як вектор центрів n нечітких підмножин деякого нечіткого розбиття з \mathfrak{R}_Ω^n . В термінах нескінченновимірної транспортної задачі це координати пунктів виробництва. Треба знайти таке нечітке розбиття $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, n}\}$ множини Ω з множини розбиттів \mathfrak{R}_Ω^n , яка б в деякому розумінні «мінімізувала» цільовий функціонал:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_n) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \in \mathfrak{R}_\Omega^n}. \quad (7.1)$$

Тут під «мінімізацією» можна розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому розумінні якнайкраще нечітке значення цільового функціонала.

Як відомо, кожна нечітка множина Ω_i (як сукупність точок x з Ω) визначається своєю функцією належності $\mu_i(x)$, тобто $\mu_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$, при цьому значення $\mu_i(x) = 1$ для $x \in \Omega$ означає, що елемент x з Ω цілком певно належить нечіткій множині Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції

$\lambda_{\Omega_i^1}(x) = 1$ для точок ядра Ω_i^1 нечіткої множини Ω_i , а значення $\mu_i(x) = 0$ означає, що елемент x цілком певно не належить до нечіткої множини Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^1}(x) = 0$ для точок ядра Ω_i^1 нечіткої множини Ω_i . Якщо $0 < \mu_i(x) < 1$, то це означає, що елемент x належить до нечіткої множини Ω_i із ступенем приналежності $\mu_i(x)$, причому точки x , для яких $0 < \mu_i(x) < 1$, складатимуть межу нечіткої підмножини Ω_i .

Значить, для того, щоб мати змогу ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ множини Ω , треба знати вектор-функцію належності вигляду:

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)), \quad x \in \Omega.$$

Переформулюємо задачу 7.1 в термінах функцій належності.

Задача 7.2. Знайти вектор-функцію

$$\mu^*(x) = (\mu_1^*(x), \dots, \mu_n^*(x)), \quad x \in \Omega,$$

для:

$$I(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n (\mu_k(x))^m (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx \rightarrow \min_{\mu(\cdot) \in M}, \quad (7.2)$$

де

$$M = \left\{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)) \mid 0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \forall i = \overline{1, n}, \forall x \in \Omega; \sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1, \forall x \in \Omega \right\},$$

m – параметр, що називається *експоненціальною вагою*,

за умов

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \forall i = \overline{1, n}, \forall x \in \Omega, \quad (7.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \mu_k(x) = 1, \forall x \in \Omega. \quad (7.4)$$

Множина оптимальних розв'язків задачі 7.2 повністю визначає оптимальне нечітке розбиття задачі 7.1.

Відмітимо, що якщо необхідно виключити появу порожніх підмножин в шуканому нечіткому розбитті, то до обмежень задачі 7.2 слід додати умову:

$$\int_{\Omega} \mu_k(x) dx > 0, \quad \forall k = \overline{1, n}.$$

Назвемо задачу 7.2 *однопродуктовою задачею оптимального нечіткого розбиття множини без обмежень із заданим положенням центрів*.

Опишемо метод розв'язання задачі розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини із заданими центрами підмножин.

Подальші міркування проведено для експоненціальної ваги $m=2$ [62].

Для формування необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі 7.2 введемо поняття функціонала Лагранжа [5].

Під функціоналом Лагранжа для задачі 7.2 будемо розуміти наступний функціонал:

$$h(\mu(x), \psi_0(x)) = I(\mu(x)) + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k(x) - 1 \right) dx, \quad (7.5)$$

де $\psi_0(x)$ - дійсна функція, визначена на Ω , $\psi_0(x) \in L_{\Omega}^2$;

вектор-функція $\mu(x) \in M_1$,

$$M_1 = \{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)): 0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \quad \forall i = \overline{1, n} \quad \forall x \in \Omega \}.$$

Означення 7.1. Пару $(\mu^*(x), \psi_0^*(x))$ будемо називати сідловою точкою функціонала (7.5) в області $M_1 \times L_{\Omega}^2$, якщо

$$h(\mu^*(x), \psi_0(x)) \leq h(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) \leq h(\mu(x), \psi_0^*(x))$$

для усіх $\mu(x) \in M_1, \psi_0(x) \in L_{\Omega}^2$.

Покажемо, що задача 7.2 може бути зведена до задачі знаходження сідлової точки функціонала (7.5) [5].

Насамперед відмітимо, що задача 7.2 має розв'язок. Дійсно, легко продемонструвати, що множина M – замкнена, обмежена і опукла множина гільбертового простору L_{Ω}^2 , функціонал $I(\mu(x))$ - неперервний і в межах

розглянутого випадку $m=2$ очевидно опуклий на M . Тоді в силу узагальненої теореми Вейерштрасса, функціонал $I(\mu(x))$ досягає на M своєї нижньої межі.

Введемо в розгляд ще одну задачу.

Задача 7.3. Для будь-якої фіксованої функції $\psi_0(x) \in L^2_\Omega$ знайти вектор-функцію $\mu^*(x) \in M_1$, таку, що:

$$h(\mu^*(x), \psi_0(x)) = \min_{\mu(x) \in M_1} h(\mu(x), \psi_0(x)).$$

Аналогічно попередньому можна довести, що задача 7.3 має розв'язок.

Теорема 7.1. Якщо пара $(\mu^*(x), \psi_0^*(x))$ є сідловою точкою функціонала Лагранжа (7.5), то вектор-функція $\mu^*(x)$ є розв'язком задачі 7.2.

Доведення. За умовою точка $(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) \in M_1 \times L^2_\Omega$ - сідлова точка функціонала (7.5), тобто

$$\begin{aligned} I(\mu^*(x)) + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) - 1 \right) dx &\leq I(\mu^*(x)) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) - 1 \right) dx \leq \\ &\leq I(\mu(x)) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k(x) - 1 \right) dx, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\forall \mu(x) \in M_1, \psi_0(x) \in L^2_\Omega.$$

Покажемо, що $\mu^*(x) \in M$. Ліва нерівність (7.6) надає

$$\int_{\Omega} (\psi_0^*(x) - \psi_0(x)) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) - 1 \right) dx \geq 0 \text{ при } \forall \psi_0(x) \in L^2_\Omega,$$

що можливо лише при

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) = 1 \quad (7.7).$$

Таким чином $\mu^*(x) \in M$. З (7.7) випливає

$$\int_{\Omega} \psi_0^*(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) - 1 \right) dx = 0 \quad (7.8).$$

Тоді з урахуванням правої нерівності (7.6) і рівності (7.8), при $\forall \mu(x) \in M$ матимемо:

$$I(\mu^*(x)) \leq I(\mu(x)) + \int_{\Omega} \psi_0^*(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k(x) - 1 \right) dx = I(\mu(x)),$$

тобто $I(\mu^*(x)) = \min_{\mu(x) \in M} I(\mu(x))$.

Доведено.

Лема 7.1. Для того, щоб пара $(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) \in M_1 \times L_{\Omega}^2$ була сідловою точкою функціонала (7.5), необхідно і достатньо існування такої, відмінної від тотожного нуля, функції $\psi_0^*(x)$, щоб:

- 1). $h(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) \leq h(\mu(x), \psi_0^*(x)), \mu(x) \in M_1$;
- 2). $\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) = 1$.

Необхідність умов леми випливає з доведення теореми 7.1 достатність умов є очевидною.

Теорема 7.2. Для того, щоб вектор-функція $\mu^*(x)$ була розв'язком задачі 7.2, необхідно і достатньо існування такої, відмінної від тотожного нуля, функції $\psi_0^*(x)$, щоб:

- 1) вектор-функція $\mu^*(x)$ була розв'язком задачі 7.3;
- 2) $\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) = 1$ для $\forall x \in \Omega$.

Доведення. Достатність умов теореми випливає з теореми 7.1 і леми 7.1.

Необхідність. Нехай $\mu^*(x)$ - оптимальний розв'язок задачі 7.2, тобто

$$I(\mu^*(x)) \leq I(\mu(x)), \forall \mu(x) \in M. \quad (7.9)$$

Припустимо, що $\mu^*(x)$ не є оптимальним розв'язком задачі 7.3 при фіксованому $\psi_0(x) = \psi_0^*(x)$. Тоді, в силу того, що задача 7.3 при кожному фіксованому $\psi_0(x) \in L^2_\Omega$ має розв'язок, знайдеться при $\psi_0(x) = \psi_0^*(x)$ таке $\mu^1(x) \in M_1$, при якому буде виконуватись $\sum_{k=1}^n \mu_k^1(x) = 1$ (тобто $\mu^1(x) \in M$) і

$$h(\mu^1(x), \psi_0^*(x)) < h(\mu^*(x), \psi_0^*(x)).$$

Але тоді $I(\mu^1(x)) \leq I(\mu^*(x))$, що суперечить (7.9).

Доведено.

Очевидним є наступний наслідок з теореми 7.2.

Наслідок. Задача 7.2 еквівалентна задачі 7.3.

Задача 7.4. Знайти вектор-функцію $\mu^*(x) \in M_1$ і функцію $\psi_0^*(x) \in L^2_\Omega$ такі, що:

$$h(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) = \min_{\mu(x) \in M_1} h(\mu(x), \psi_0^*(x)),$$

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^*(x) = 1.$$

Переходимо до розв'язання задачі 7.4.

Перетворимо отриманий функціонал:

$$\begin{aligned} h(\mu(\cdot), \psi_0(x)) &= I(\mu(\cdot)) + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{k=1}^n \mu_k(x) - 1 \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n [\mu_k(x) \psi_0(x) + (\mu_k(x))^m (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x)] dx. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \min_{\mu(\cdot) \in M_1} h(\mu(\cdot), \psi_0(x)) &= - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \\ &+ \min_{\mu(\cdot) \in M_1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n [\mu_k(x) \psi_0(x) + (\mu_k(x))^m (c(x, \tau_k) + a_k) \rho(x)] dx. \end{aligned}$$

Визначимо компоненти вектора градієнта для функціонала $h(\mu(x), \psi_0(x))$ по $\mu(x)$ наступним чином [92]:

$$\text{grad}_{\mu_i}(\mu_i(x)) = \psi_0(x) + m \cdot (\mu_i(x))^{m-1} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x).$$

Розглянемо наступну задачу.

Задача 7.5.

$$h(\mu(x), \psi_0(x)) \rightarrow \min_{\mu(x) \in E},$$

де $E = \{\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)) : \mu_i : R^q \rightarrow R, i = \overline{1, n}\},$

$\psi_0(x) \in L^2_{\Omega}$ - фіксована.

Задача 7.5 є задачею безумовної оптимізації відносно $\mu(x)$, на відміну від задачі 7.4, де пошук оптимуму йде по обмеженій множині M_1 .

Сформулюємо необхідну умову оптимальності для задачі 7.5 [92].

Теорема 7.3. Нехай $\mu^0(x) \in E$ - розв'язок задачі 7.5. Тоді

$$\text{grad}_{\mu}(\mu^0(x)) \equiv 0. \quad (7.10)$$

Доведення. Виберемо довільну вектор-функцію $\mu(x) \in E$ і визначимо $\mu^{\lambda}(x)$ за формулою:

$$\mu^{\lambda}(x) = \mu^0(x) + \lambda(\mu(x) - \mu^0(x)),$$

де λ - дійсне число. Очевидно, що $\mu^{\lambda}(x) \in E$ для будь-якого скінченного λ і $h(\mu^{\lambda}(x), \psi_0(x)) \geq h(\mu^0(x), \psi_0(x))$.

Звідси випливає, що скалярна дійсна функція $v(\lambda) = h(\mu^{\lambda}(x), \psi_0(x))$ досягає свого найменшого значення при $\lambda = 0$. З теорії екстремумів функцій однієї змінної випливає, що

$$v'(0) = \left. \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Вираз для $v'(0)$ має вигляд $v'(0) = \int_{\Omega} [\text{grad}_{\mu}(\mu^0(x)), \mu(x) - \mu^0(x)] dx = 0$, де

[...] - скалярний добуток векторів. Звідси при $\mu(x) = \mu^0(x) + \text{grad}_{\mu}(\mu^0(x))$ отримаємо $v'(0) = \int_{\Omega} [\text{grad}_{\mu}(\mu^0(x)), \text{grad}_{\mu}(\mu^0(x))] dx = 0$. З цього випливає справедливість (7.10).

Доведено.

Очевидно, що якщо задача 7.5 має розв'язок і цей розв'язок єдиний, то умова (7.10) стає достатньою.

При $m=2$ функціонал $h(\mu(x), \psi_0(x))$ стає квадратичним відносно $\mu(x)$, що забезпечує виконання умов існування та єдиності розв'язку на $\mu(x) \in E$.

Знайдемо в явному вигляді вираз для $\mu^0(x)$ з (7.10).

$$\text{grad}_{\mu_i}(\mu_i(x)) = \psi_0(x) + m \cdot (\mu_i(x))^{m-1} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$\mu_i^0(x) = \left(-\frac{\psi_0(x)}{m \rho(x) (c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (7.11)$$

При цьому, якщо $m=2$, то з урахуванням умови $(c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \geq 0$, одержуємо, що вказаний екстремум є мінімумом функціонала.

Таким чином вираз (7.11) дає оптимальний розв'язок задачі 7.5.

Повернемося до задачі 7.4. При фіксованому $\psi_0^*(x) \in L_{\Omega}^2$ очевидно її розв'язок буде розв'язком такої задачі:

$$h(\mu^*(x), \psi_0^*(x)) = \min_{\mu(x) \in M_1} h(\mu(x), \psi_0^*(x)).$$

В свою чергу, розв'язок цієї задачі матиме вигляд:

$$\mu_i^*(x) = \begin{cases} \mu_i^0(x), & \text{якщо } \mu_i^0(x) \in [0, 1]; \\ \frac{1}{2} [1 - \text{sign grad}_{\mu_i}(\mu_i^*(x))], & \text{якщо } \mu_i^0(x) \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Тут вираз

$$\frac{1}{2}[1 - \text{sign grad}_{\mu_i}(\mu_i^*(x))], \quad \text{якщо } \mu_i^0(x) \notin [0,1] \quad (7.12)$$

ілюструє набування оптимального значення функціоналом $h(\mu(x), \psi_0(x))$ на межах гіперкубу M_1 .

Вираз

$$\mu_i^0(x), \quad \text{якщо } \mu_i^0(x) \in [0,1] \quad (7.13)$$

являє собою розв'язок задачі 7.4 при фіксованому $\psi_0^*(x) \in L_\Omega^2$. Відкритою залишається задача пошуку оптимального $\psi_0^*(x) \in L_\Omega^2$. Можна сказати, що розв'язання цієї задачі опосередковано є пошуком серед усіх оптимальних $\mu(x)$, визначених формулою (7.13), такого, яке б задовольняло умові (7.4).

Для розв'язання задачі знаходження $\psi_0^*(x) \in L_\Omega^2$ пропонується застосувати метод градієнтного спуску.

Алгоритм розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини з фіксованим положенням їх центрів

Для розв'язання сформульованої задачі відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа покриємо область Ω сіткою і застосуємо ітераційний градієнтний метод по $\psi_0(x)$. Для цього обчислимо градієнт функціонала Лагранжа по $\psi_0(x)$:

$$\text{grad}_{\psi_0(x)}(\mu(x)) = \sum_{k=1}^n \mu_k(x) - 1.$$

Опишемо алгоритм.

1.Вибираємо нульове наближення $\psi_0^{(0)}(x)$, $\mu^{(0)}(\cdot)$. Вважаємо $k=0$. Для вибраних значень перераховуємо $\mu^{(0)}(\cdot)$ за формулою (7.13).

2.Обчислюємо

$$\mu_i^{(k)}(x) = \begin{cases} \left(-\frac{\psi_0^{(k)}(x)}{m\rho(x)(c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \\ \text{якщо } \left(-\frac{\psi_0^{(k)}(x)}{m\rho(x)(c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \in [0,1]; \\ \frac{1}{2}[1 - \text{sign grad}_{\mu_i}(\mu_i^{(k-1)}(x))], \\ \text{якщо } \left(-\frac{\psi_0^{(k)}(x)}{m\rho(x)(c(x, \tau_i) + a_i)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \notin [0,1] \end{cases} \quad (7.14).$$

3. Обчислюємо значення $\text{grad}_{\psi_0(x)}(\mu^{(k)}(x))$.

4. Вважаємо $\psi_0^{(k+1)}(x) = \psi_0^{(k)}(x) + \lambda_k \cdot \text{grad}_{\psi_0(x)}(\mu^{(k)}(x))$.

5. Якщо умови завершення ітераційного процесу виконані, то приймаємо

$\psi_0^*(x) = \psi_0^{(k+1)}(x)$ і обчислюємо $\mu_i^*(x)$ за формулою (7.14).

6. Вважаємо $k=k+1$ і йдемо на крок 2.

Алгоритм завершений.

Умова завершення. Пропонується наступна умова завершення процесу:

$$\max_{x_i} |\text{grad}_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| \leq \varepsilon, \quad (7.15)$$

де ε - задана точність, x_i - і-й вузол сітки.

Ітераційний процес проводимо по $\psi_0(x)$, а на кожному кроці ми знаходимо оптимальне $\mu(x)$, що відповідає даному $\psi_0(x)$. По суті $\psi_0(x)$ «відповідає» за виконання умови (7.4). З цих позицій умову (7.15) можна інтерпретувати як досягнуте виконання умови (7.4) із потрібною точністю. Ця умова є більш жорсткою, ніж, наприклад, умова рівності норми градієнта нулю з потрібною точністю. Вона забезпечує фактичне виконання умови (7.4) в кожному з вузлів сітки із заданою точністю ε .

Вибір кроку λ_k . В якості кроку λ_k можна обрати константний крок $\lambda_k = const$ такий, щоб виконувалась умова монотонності функції:

$$h(\mu(x), \psi_0^{(k+1)}(x)) \geq h(\mu(x), \psi_0^{(k)}(x)).$$

Ще одним варіантом вибору кроку є вибір кроку апріорно у вигляді розбіжного ряду. Наприклад, це можна зробити так: $\lambda_k = \frac{C}{k+1}$, де C – деяка додатна константа, значення якої можна обрати емпірично для найбільш швидкого та при цьому стійкого процесу збіжності методу.

7.2 Метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини з відшукуванням координат оптимального розміщення центрів цих підмножин

Перед математичним формулюванням нечіткої задачі оптимального розбиття чіткої множини з n -вимірному евклідового простору E_n на нечіткі підмножини із розташуванням їх центрів наведемо тут необхідні у подальшому означення, наведені у першому і другому розділі.

Означення 1.1. Чітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω - обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина, назвемо систему його чітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, для яких виконуються три умови:

$$1) \Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, \dots, N;$$

$$2) \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega;$$

$$3) \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k) = 0, \quad \forall i \neq k; i, k = 1, \dots, N, \text{ де } \text{mes}(\cdot) \text{ – міра Лебега.}$$

Означення 2.1. Нечітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω - обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина, назвемо систему нечітких підмножин $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = 1, \dots, N\}$, для яких виконуються три умови:

1) $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\forall i = 1, \dots, N$, де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$, $\mu_\Omega(x) = 1$, $x \in \Omega$, тобто це чітка множина Ω , що розглядається як окремий випадок нечіткої множини;

$$2) \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k, \quad \forall i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N,$$

де $h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x))$ - висота нечіткої множини C ;

$\mu_C(x)$ функція належності: $\mu_C : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

В даному означенні умови 1) – 3) є нечітким аналогом відповідних умов для означення 1.1 чіткого розбиття множини. Відзначимо, що умова 2) в термінах нескінченновимірної транспортної задачі може розумітися як вимога того, щоб всі потреби кожного споживача були повністю і без надлишків задоволені за рахунок одного або декількох виробників в нечіткому варіанті задачі, на відміну від одного виробника – в чіткому варіанті.

Зауваження. В означеннях 1.1 та 2.1 символом « Ω » позначена чітка множина, символом « Ω » позначена нечітка множина з функцією належності $\mu_\Omega(x)$. Символами « Ω_i » позначені чіткі підмножини, символами « Ω_i » позначені нечіткі підмножини з функціями належності $\mu_{\Omega_i}(x)$. Надалі для спрощення запису позначатимемо $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$.

Позначимо через \mathfrak{R}_Ω^N клас всіх можливих нечітких розбиттів чіткої множини Ω на N нечітких підмножин:

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \sum_{i=1}^N \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega\}.$$

Введемо на множині можливих нечітких розбиттів \mathfrak{R}_Ω^N цільовий функціонал ($F = \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1$) у виді

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \tau) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx, \quad (7.16)$$

де функції $c(x, \tau_i)$ - задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x для будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ - задана обмежена, вимірна на Ω , невід'ємна функція; a_1, \dots, a_N - задані невід'ємні числа.

Також відзначимо, що в (7.16), по-перше, $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, - нечіткі підмножини множини Ω із заданими або такими, що підлягають визначенню, типовими представниками (центрів) τ_i , причому кожний центр τ_i належить Ω ; по-друге, міра множини граничних точок $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, не обов'язково дорівнює нулю.

Тоді під *нечіткою неперервною задачею оптимального розбиття* чіткої множини Ω з n -вимірною евклідовою простору E_n на нечіткі підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ із розміщенням центрів цих підмножин будемо розуміти наступну задачу.

Задача 7.6. Знайти таке розбиття чіткої множини Ω на N нечітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ та координати центрів цих підмножин, які задовольняють умовам

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

та в деякому сенсі «мінімізують» цільовий функціонал (7.16).

Тут під «мінімізацією» можна розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому розумінні найкраще нечітке значення цільового функціонала.

Як відомо, кожна нечітка множина Ω_i (як сукупність точок x з Ω) визначається своєю функцією належності $\mu_i(x)$, тобто $\mu_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$, при цьому

значення $\mu_i(x) = 1$ для $x \in \Omega$ означає, що елемент x з Ω цілком певно належить нечіткій множині Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 1$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i , а значення $\mu_i(x) = 0$ означає, що елемент x цілком певно не належить до нечіткої множини Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 0$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i . Якщо $0 < \mu_i(x) < 1$, то це означає, що елемент x належить до нечіткої множини Ω_i із ступенем належності $\mu_i(x)$.

Це означає, що для того, щоб мати змогу ідентифікувати нечітке розбиття $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ множини Ω , треба знайти вектор-функцію належностей виду:

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad x \in \Omega.$$

Переформулюємо задачу 7.6 в термінах функцій належності у наступному вигляді.

Задача 7.7 (нечітке розбиття множини Ω із розміщенням центрів підмножин).

Знайти пару $(\mu_*(x), \tau_*) \in \Gamma \times \Omega^N$, $x \in \Omega$, таку що:

$$I(\mu(x), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\mu_i(x))^m (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\mu(x), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \quad (7.17)$$

де

$$\Gamma = \{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1, x \in \Omega, \\ 0 \leq \mu_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

У формулі (7.17) m – параметр, який називається *експоненціальною вагою* [62]. Далі в роботі приймаємо $m = 2$.

Відмітимо, якщо необхідно виключити появу порожніх підмножин у шуканому нечіткому розбитті, то до обмежень задачі B слід додати умову:

$$\int_{\Omega} \mu_i(x) dx > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Далі опишемо метод розв'язання задачі 7.7.

Метод розв'язання задачі 7.7.

Перепишемо задачу (7.17) у вигляді

$$\begin{aligned} I(\mu_*(x), \tau_*) &= \min_{(\mu(x), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} I(\mu(\cdot), \tau) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\mu(x) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\mu_i(x))^2 (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \right] \right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\Gamma_1 = \{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x)) :$$

$$\mu(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1, \text{ м.в. (майже всюди) для } x \in \Omega \},$$

$$\Gamma = \{ \mu(x) : 0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{де } \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Введемо функціонал Лагранжа для задачі 7.7 наступним чином

$$h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(x)) = I(\mu(\cdot), \tau) + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i(x) - 1 \right) dx, \quad (7.19)$$

$$\mu(\cdot) \in \Gamma, \quad \tau \in \Omega^N, \quad \psi_0(x) \in L_{\Omega}^2,$$

де $\psi_0(x)$ - дійсна функція, яка визначена на Ω зі значеннями у гільбертовому просторі L_{Ω}^2 .

Уведемо поняття сідлової точки на множині $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times L_{\Omega}^2$, яка, очевидно, для задачі (7.17) існує, та запишемо

$$\begin{aligned} h(\{\mu_*(\cdot), \tau_*\}, \psi_0^*(\cdot)) &= \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) = \\ &= \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) \end{aligned}$$

Перейдемо до розв'язку задачі

$$h(\{\mu_*(\cdot), \tau_*\}, \psi_0^*(\cdot)) = \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)).$$

Позначимо

$$G(\psi_0(\cdot)) = \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)), \psi_0(\cdot) \in L_\Omega^2.$$

Від задачі відшукування $\min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot))$ можна перейти до наступної задачі

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\mu(\cdot) \in \Gamma} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) \text{ при } \psi_0(\cdot) \in L_\Omega^2. \quad (7.20)$$

Підставляємо замість $h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot))$ его вираз з (7.19), проводимо відповідні перетворення та отримуємо внутрішню задачу з (7.20) у виді:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \\ i=1, \dots, N}} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) = & - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \\ i=1, \dots, N}} (\psi_0(x) + (c(x, \tau_i) + a_i) \mu_i(x) \rho(x)) dx. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Розглянемо наступну задачу.

Задача 7.8.

$$h(\{\mu(\cdot), \tau_{fix}\}, \psi_{0fix}(\cdot)) \rightarrow \min_{\mu(x) \in \Gamma_2},$$

де $\Gamma_2 = \{\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x)) : \mu_i(x) : E_n \rightarrow E_1, i = 1, \dots, N\}$;

$\tau_{fix} \in \Omega^N$ - фіксоване; $\psi_{0fix}(\cdot) \in L_\Omega^2$ - фіксоване.

Задача 7.8 є задачею безумовної оптимізації відносно $\mu(x)$. Необхідна умова оптимальності для задачі 7.8 сформулюється у наступній теоремі [92].

Теорема 7.4. Нехай $\mu^0(x) \in \Gamma_2$ - розв'язок задачі 7.8. Тоді

$$\text{grad}_h^\mu(\mu^0(x)) \equiv 0. \quad (7.22)$$

Очевидно, якщо задача 7.8 має розв'язок і він єдиний, то умова (7.21) є і достатньою. Функціонал $h(\{\mu(\cdot), \tau_{fix}\}, \psi_{0fix}(\cdot))$ опуклий відносно $\mu(x) \in \Gamma_2$, що забезпечує виконання умов існування і єдиності розв'язку $\mu^0(x) \in \Gamma_2$.

Таким чином, з (7.20) слідує наступний вираз для $\mu^0(x)$ у явному виді:

$$\mu_i^0(x) = -\frac{\psi_0(x)}{\rho(x)(c(x, \tau_i) + a_i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega.$$

У якості $\mu_{*i}(x)$ приймаємо $\mu_i^0(x)$, якщо $\mu_i^0(x) \in [0; 1]$. У випадку, коли $\mu_i^0(x) \notin [0; 1]$ повернемося до задачі (7.21).

Має місце наступна теорема згідно [19, 92].

Теорема 7.5. Сідлова точка $(\{\mu_*(\cdot), \tau_*\}, \psi_0^*(\cdot))$ функціонала (7.19) на множині $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times L_\Omega^2$ визначається для $i = 1, \dots, N$ та майже всіх $x \in \Omega$ у виді:

$$\mu_{*i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) > 0, \\ 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) = 0, \end{cases} \quad (7.23)$$

$$\text{mes}\{x \in \Omega: (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) < 0\} = 0,$$

$$\psi_0^*(x) = -\min_{i=1, \dots, N} [(c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x)], \quad (7.24)$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв'язок наступної задачі:

$$G_1(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} (c(x, \tau_i) + a_i)\rho(x) dx \rightarrow \min_{\tau \in \Omega^N}. \quad (7.25)$$

Відзначимо, що задача (7.25) є скінченновимірною задачею оптимізації по τ , у той час, як внутрішня задача з (7.20) є нескінченновимірною по $\mu(\cdot)$.

Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі 7.7.

Алгоритм розв'язання задачі 7.7

Наведемо алгоритм розв'язання задачі 7.7, який базується на формулах (7.23)-(7.25) та одному з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Н.З. Шора [100]).

Сутність методів узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору ґрунтується на побудові в процесі послідовних наближень лінійних операторів, що змінюють метрику простору, і виборі напрямку спуску, що відповідає антиґрадієнту в просторі з новою метрикою.

В ітераційній формулі r -алгоритму [100], яка має вигляд

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^\tau [B_{k+1}^\tau]^\top g_{G_1}(\tau^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.26)$$

B_{k+1}^τ – оператор, що відображає перетворений простір в основний простір E_n (причому $B_0^\tau = I$ – одинична матриця); h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму функції G_1 за напрямком $B_{k+1} B_{k+1}^\tau g_{G_1}(\tau^{[k]})$; $g_{G_1}(\tau^{[k]})$ – узагальнений градієнт функції $G_1(\tau)$ в точці $\tau^{[k]}$.

Застосуємо тут r -алгоритм у H -формі [26] (H_k – симетрична матриця, така, що $H_k = B_k B_k^\top$), для якої ітераційна формула (7.26) набуває вигляду

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k \frac{H_{k+1} g_{G_1}(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{G_1}(\tau^{[k]}), g_{G_1}(\tau^{[k]})}}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^\top H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}; \quad \Delta_k = g_{G_1}(\tau^{[k]}) - g_{G_1}(\tau^{[k-1]}).$$

Коефіцієнт розтягу простору α_k приймається рівним 3. Для крокового множника h_k застосовується адаптивний спосіб регулювання, який описано в [100].

Визначимо i -ту компоненту вектора узагальненого градієнту $g_{G_1}^\tau(\tau) = (g_{G_1}^{\tau_1}(\tau), \dots, g_{G_1}^{\tau_i}(\tau), \dots, g_{G_1}^{\tau_N}(\tau))$ функції $G_1(\tau)$ в точці $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ таким чином:

$$g_{G_1}^{\tau_i}(\tau) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \mu_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.27)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ - i -а компонента N -вимірному вектора узагальненого градієнту функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$. У випадку, коли $c(x, \tau_i)$ - евклідова

метрика ($c(x, \tau_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2}$), вираз (7.27) набуває виду

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \frac{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)}) \rho(x) \mu_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2}} dx \\ \dots \\ \int_{\Omega} \frac{(x^{(n)} - \tau_i^{(n)}) \rho(x) \mu_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(n)} - \tau_i^{(n)})^2}} dx \end{pmatrix}.$$

Алгоритм

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\tau = \tau^{[0]}$. Обчислюємо значення $\psi_0^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (7.24) при $\tau = \tau^{[0]}$, обчислюємо значення $\mu_i^{[0]}(x)$, $i = 1, \dots, N$, у вузлах сітки за формулою (7.23) при $\tau = \tau^{[0]}$, обчислюємо значення градієнта $g_{G_i}(\tau^{[0]})$ за формулою (7.27) при $\mu(x) = \mu^{[0]}(x)$, $\tau = \tau^{[0]}$. Обираємо початковий пробний крок r -алгоритму $h_0 > 0$ та обчислюємо

$$\tau^{[1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[0]} - h_0 \frac{H_1 g_{G_1}(\tau^{[0]})}{\sqrt{(H_1 g_{G_1}(\tau^{[0]}), g_{G_1}(\tau^{[0]})}} \right),$$

P_{Π} – оператор проектування на Π .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k ($k = 1, 2, \dots$) кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{[k]}$, $\psi_0^{[k]}(x)$, $\mu_i^{[k]}(x)$, $g_{G_i}(\tau^{[k]})$, $i = 1, \dots, N$, у вузлах сітки.

Опишемо $[k+1]$ -й крок.

4. Проводимо $[k+1]$ -й крок r -алгоритму в H -формі [26] для мінімізації

по τ , ітераційна формула якого має вид

$$\tau^{[k+1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[k]} - h_k \frac{H_1 g_{G_1}(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_1 g_{G_1}(\tau^{[k]}), g_{G_1}(\tau^{[k]})}} \right).$$

5. Обчислюємо значення $\psi_0^{[k+1]}(x)$ у вузлах сітки по формулі (7.24) при $\tau = \tau^{[k+1]}$.

6. Обчислюємо значення $\mu_i^{[k+1]}(x)$, $i=1, \dots, N$, у вузлах сітки по формулі (7.23) при $\tau = \tau^{[k+1]}$.

7. Обчислюємо значення градієнта $g_{G_1}(\tau^{[k+1]})$ за формулою (7.27) при $\mu(x) = \mu^{[k+1]}(x)$, $\tau = \tau^{[k+1]}$.

8. Якщо умова

$$\|\tau^{[k]} - \tau^{[k+1]}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (7.28)$$

не виконується, переходимо до $[k+2]$ -го кроку алгоритму, у протилежному випадку – до п. 6.

9. Приймаємо $\tau_* = \tau^{[l]}$, $\psi_0^*(x) = \psi_0^{[l]}(x)$, $\mu_{*i}(x) = \mu_i^{[l]}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалась умова (7.28).

10. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_1(\tau_*)$ за формулою (7.25) при $\tau = \tau_*$ та для контролю правильності розрахунків за формулою (7.18).

Алгоритм описаний.

У наступному підрозділі проілюструємо роботу розроблених алгоритмів на тестових прикладах.

7.3 Тестові приклади розв'язання задач розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини

Продемонструємо роботу алгоритмів, розроблених у попередніх підрозділах, на тестових задачах нечіткого розбиття одиничного квадрату з E_2 з евклідовою метрикою та сіткою 250 на 250. На рисунках, наведених нижче, позначено: «+» - центр підмножини, сірим кольором – нечітка границя підмножини.

Для інтерпретації отриманих результатів та графічної ілюстрації введено наступне поняття. *Ступінь недовіри* – це мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, при якому дана точка може бути з впевненістю віднесена до даної нечіткої множини (при якому ми вважаємо, що дана точка належить до даної множини). Цей показник можна також інтерпретувати як мінімальний ступінь достовірності факту «дана точка x належить до даної підмножини», достатній для його прийняття. Ступінь недовіри – це наші вимоги щодо чіткості розбиття. Чим більше він буде, тим більш нечітким буде розбиття, тим ширшими будуть області нечіткої межі. Очевидно, що $SN=0$ дає нам чітке розбиття, а $SN=1$ – максимально нечітке розбиття, при якому до певної підмножини будуть віднесені лише її центр та точки ядра, якщо такі з'являться.

Приклад 7.1. Розбиття множини на дві нечіткі підмножини (нульові a_i).

Початкові дані для розбиття на дві підмножини: центри 1-ї підмножини $x = 0,25$, $y = 0,5$; центри 2-ї підмножини $x = 0,75$, $y = 0,5$; вагові коефіцієнти $a_1 = 0$, $a_2 = 0$; точність 0,0001.

Результати розбиття на дві підмножини: кількість ітерацій 951; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00099$; значення цільового функціоналу 0,18855.

На рис. 7.2а), 7.2б) представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрату з E_2 на дві нечіткі підмножини.

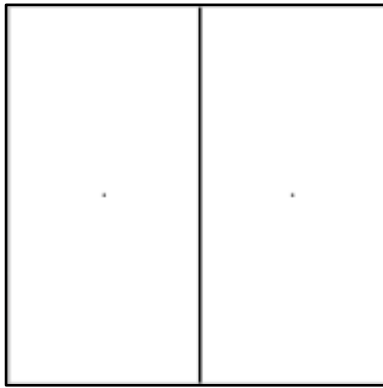
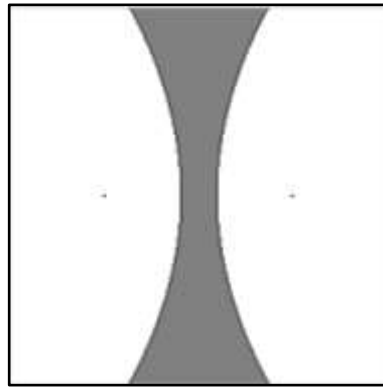
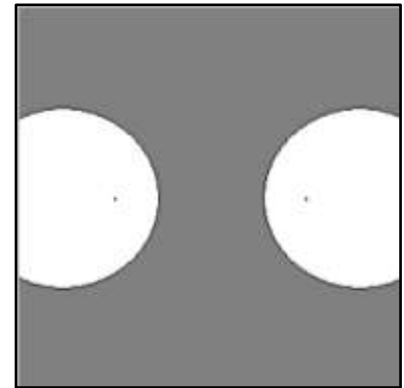


Рис. 7.1. Розбиття на дві чіткі підмножини



а)



б)

Рис. 7.2. Розбиття на дві нечіткі підмножини:
а) $CH=0,55$; б) $CH=0,65$

Аналіз результатів оптимального розбиття: на рис. 7.2а) та 7.2б) бачимо розбиття на дві нечіткі підмножини. Присутньою є нечітка межа. При підвищенні ступеня недовіри рамки нечіткої межі розширюються, форма чітких областей наближається до кола. Це можна пояснити логічно: чим ближче вузол до центра, тим з більшою достовірністю його можна віднести до даної підмножини. Цю думку підтверджує метод, що демонструє знайдені значення функцій належності, які дійсно зростають при наближенні до центра. Множина рівновіддалених від центра точок – коло, що ми і бачимо на графічній ілюстрації. Таким чином результати даного експерименту підтвердили достовірність алгоритму.

Приклад 7.2. Розбиття множини на дві нечіткі підмножини (різні a_i).

Початкові дані для розбиття на дві підмножини: центри 1-ї підмножини $x=0,25$, $y=0,5$; центри 2-ї підмножини $x=0,75$, $y=0,5$; вагові коефіцієнти $a_1=0$, $a_2=0,2$; точність 0,0001.

Результати розбиття на дві підмножини: кількість ітерацій 1137; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00099$; значення цільового функціоналу 0,23488.

На рис. 7.4а), 7.4б) представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрату з E_2 на дві нечіткі підмножини з різними параметрами a_i .

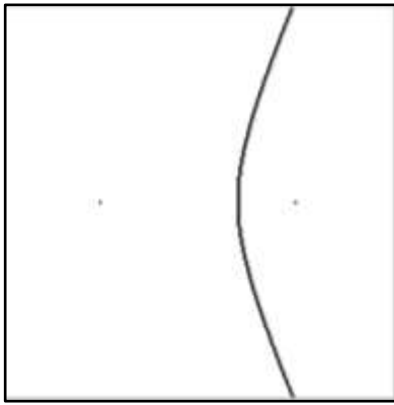
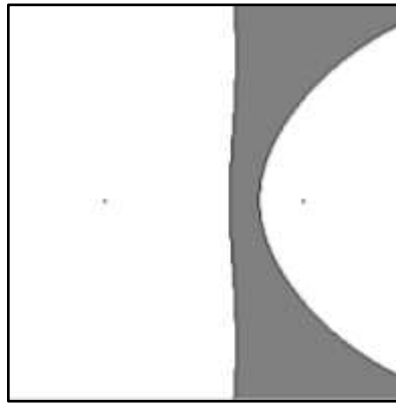
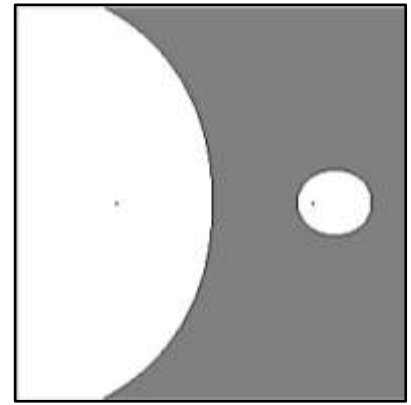


Рис. 7.3. Розбиття на дві чіткі підмножини з різними параметрами a_i



а)



б)

Рис. 7.4. Розбиття на дві нечіткі підмножини з різними параметрами a_i : а) $CH=0,55$; б) $CH=0,65$

Аналіз результатів оптимального розбиття: в даному прикладі було обрано різні a_i . Результати, що отримані для чіткого варіанту розбиття, показують, що в цьому випадку межа між підмножинами повинна утворювати гіперболу. Як бачимо по результатах на рис. 7.3 це положення підтверджується. Цікавими є видозміни форми областей підмножин. Тепер на їх конфігурацію впливають дві криві: коло і гіпербола одночасно. Значення функціоналу при збільшенні значень a_i , зрозуміло, зростає.

Приклад 7.3 Розбиття множини на три нечіткі підмножини (нульові a_i).

Початкові дані для розбиття на три підмножини: центри 1-ї підмножини $x=0,25$, $y=0,5$; центри 2-ї підмножини $x=0,75$, $y=0,5$; центри 3-ї підмножини $x=0,5$, $y=0,5$; вагові коефіцієнти $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$; точність 0,0001.

Результати розбиття на три підмножини: кількість ітерацій 916; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00099$; значення цільового функціоналу 0,12443.

На рис. 7.6а), 7.6б) представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на три нечіткі підмножини.

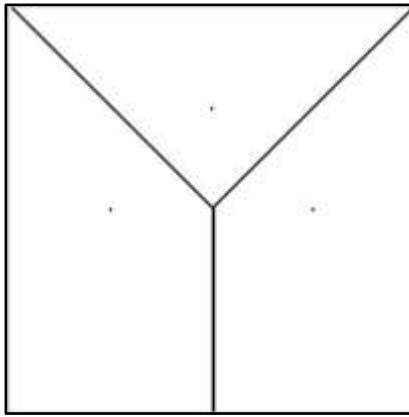
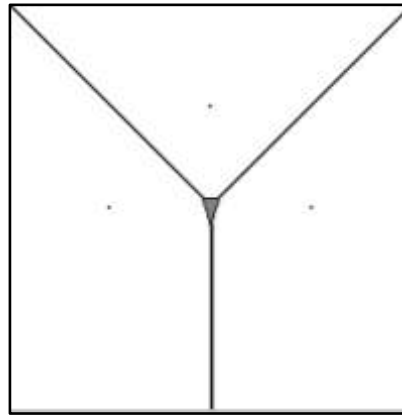
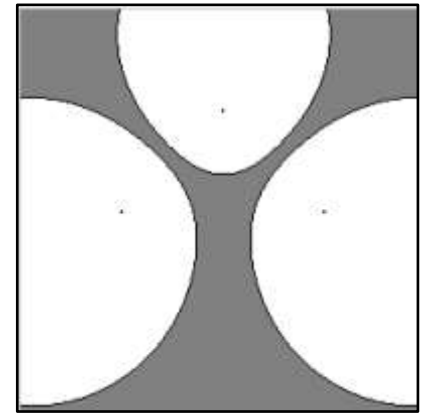


Рис. 7.5. Розбиття на три чіткі підмножини



а)



б)

Рис. 7.6. Розбиття на три нечіткі підмножини:
а) $CH=0,55$; б) $CH=0,65$

Аналіз результатів оптимального розбиття: на рис. 7.5, 7.6 бачимо розбиття на три підмножини. Із низьким ступенем недовіри воно повторює результат, отриманий для випадку чіткого розбиття. Відмітимо, що це досить вагомий результат, адже ані метод розв'язання, ані сам функціонал, що є нелінійним, не повторюють ідейно задачі та методи для чіткого розбиття.

При підвищенні ступеня недовіри області підмножин деформуються. Цікавою представляється деформація третьої множини: вона вже не є чистим колом, а ніби зазнає впливу двох інших підмножин симетрично з двох боків.

Цікаво також те, що на рис. 7.6а), при досить низькому рівні недовіри, першими в область нечіткої межі потрапили точки, що знаходяться між трьома множинами одразу. Це і не дивно: важко визначитися з підмножиною, коли вплив всіх трьох з них досить відчутний, кожна намагається «захопити» точку.

Приклад 7.4. Розбиття множини на сім нечітких підмножин (нульові a_i)

Таблиця 7.1. Початкові дані для розбиття на сім підмножин

| № підмножини | Центри | | a_i | Точність |
|--------------|--------|-----|-------|----------|
| | x | y | | |
| 1 | 0,2 | 0,7 | 0 | 0,0001 |
| 2 | 0,5 | 0,8 | 0 | |
| 3 | 0,8 | 0,7 | 0 | |
| 4 | 0,8 | 0,3 | 0 | |
| 5 | 0,5 | 0,2 | 0 | |
| 6 | 0,2 | 0,3 | 0 | |
| 7 | 0,5 | 0,5 | 0 | |

Результати розбиття на сім підмножин: кількість ітерацій 345; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00098$; значення цільового функціоналу 0,05005.

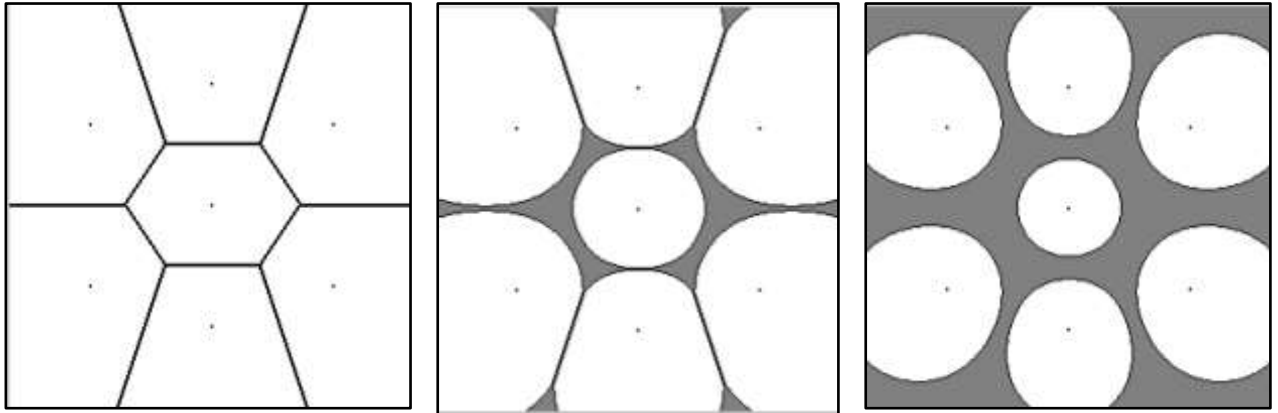


Рис. 7.7. Розбиття на сім чітких підмножин

Рис. 7.8. Розбиття на сім нечітких підмножин:
а) $CH=0,25$; б) $CH=0,3$

Аналіз результатів оптимального розбиття: на рис. 7.7, 7.8 розбиття на сім підмножин знову ж таки повторює результати для чіткого випадку при низькому ступені недовіри. Оскільки всі a_i рівні між собою, то межами між областями підмножин слугують прямі. При підвищенні CH області підмножин починають «скруглятися», деформуючись відповідно впливу сусідів.

Відмітимо, що значення функціоналу при збільшенні кількості підмножин відчутно знижується. Це можна пояснити з позиції функцій належності: у функціоналі фігурує сума їх степенів, а між собою в сумі вони дорівнюють 1. Тоді можна записати:

$$\text{Якщо } \sum_{k=1}^n \mu_k = 1, \quad \text{і } \sum_{k=1}^l \mu_k = 1, \quad \text{і при цьому } n < l, \text{ то } \sum_{k=1}^n \mu_k^m \geq \sum_{k=1}^l \mu_k^m.$$

$$\text{Якщо при цьому } \forall \mu_l \neq 1 (\forall \mu_l \neq 0), \text{ то } \sum_{k=1}^n \mu_k^m > \sum_{k=1}^l \mu_k^m.$$

Приклад 7.5 Розбиття множини на сім нечітких підмножин (різні a_i)

Початкові дані для побудови розбиття представлено у табл. 7.2.

Таблиця 7.2. Початкові дані для розбиття на сім підмножин

| № підмножини | Центри | | a_i | Точність |
|-----------------|--------|-----|-------|----------|
| | x | y | | |
| 1 | 0,2 | 0,7 | 0,2 | 0,001 |
| 2 | 0,5 | 0,8 | 0,2 | |
| 3 | 0,8 | 0,7 | 0,1 | |
| 4 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | |
| 5 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | |
| 6 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | |
| 7 | 0,5 | 0,5 | 0 | |

Результати розбиття на сім підмножин: кількість ітерацій 318; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00099$; значення цільового функціоналу 0,06979.

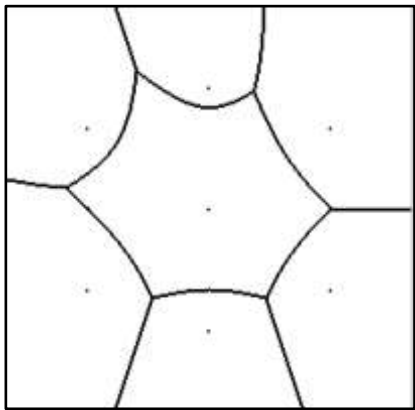
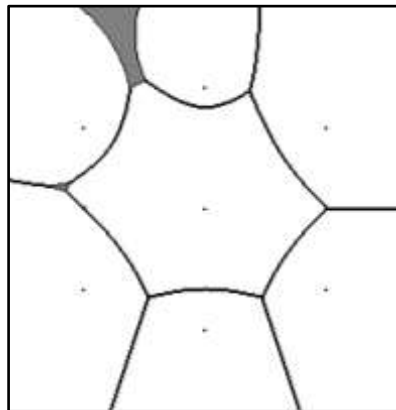
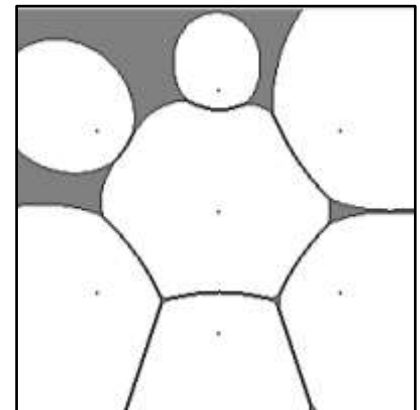


Рис. 7.9. Розбиття на сім чітких підмножин з різними параметрами a_i



а)



б)

Рис. 7.10. Розбиття на сім нечітких підмножин з різними параметрами a_i : а) $CH=0,20$; б) $CH=0,22$

Аналіз результатів оптимального розбиття: розбиття на сім підмножин із різними a_i демонструє нам за відсутністю нечіткої межі (при чіткому розбитті, рис. 7.9) гіперболічні межі між підмножинами із різними a_i і прямі межі між підмножинами із рівними a_i . Зауважимо, що на прикладі межі між підмножиною 7 і підмножиною 2 і межі між підмножиною 7 і підмножиною 3 ми бачимо, що кривизна гіперболи залежить від значення a_i : ці межі мають різні значення кривизни.

При збільшенні ступеня недовіри ми бачимо появу нечіткої межі (рис. 7.10а). І насамперед ця нечітка область з'являється між підмножинами 1

та 2. Їх високі a_i знижують міру «довіри» до них, а тому саме точки між ними першими викликають сумнів, який при збільшенні СН збільшується (рис. 7.10б)).

Приклад 7.6. Розбиття множини на сім нечітких підмножин
(симетричні значення a_i)

Початкові дані для розбиття на сім підмножини: центри підмножин задані у табл.7.2; вагові коефіцієнти $a_i = 0,2$ для $i = 1, \dots, 6$, $a_7 = 0$; точність 0,0001.

Результати розбиття на сім підмножин: кількість ітерацій 444; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00098$; значення цільового функціоналу 0,07850.

На рис. 7.6а), 7.6б) представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на три нечіткі підмножини.

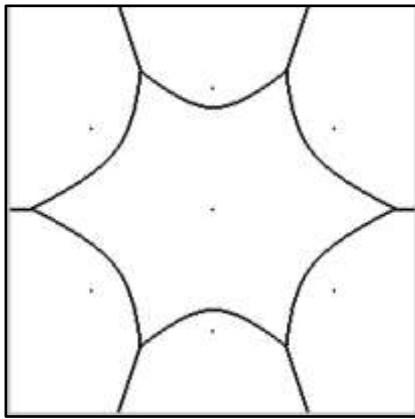
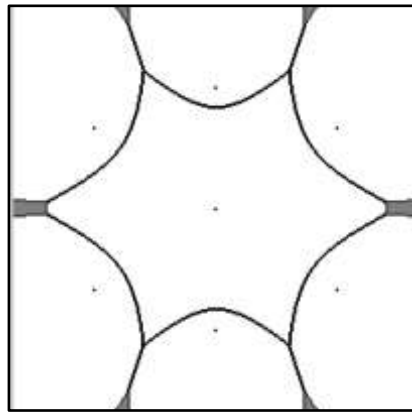
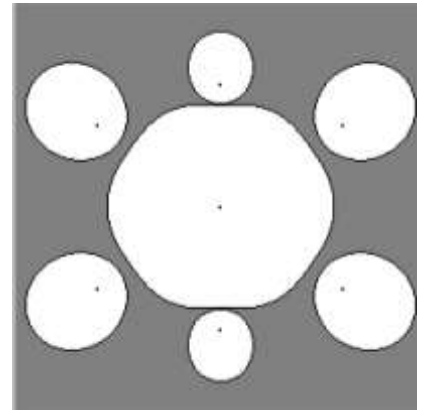


Рис. 7.11. Розбиття на сім чітких підмножин із симетричними параметрами a_i



а)



б)

Рис. 7.12. Розбиття на сім нечітких підмножин із симетричними параметрами a_i :
а) СН=0,20; б) СН=0,25

Аналіз результатів оптимального розбиття: у даному прикладі виконується розбиття на сім підмножин із різними a_i , причому всі a_i рівні між собою крім одного. Результат демонструє симетричність і рівність кривизни меж-гіпербол, а також будує коректні межі-прямі між підмножинами із рівними a_i (рис. 7.11). При підвищенні ступеня недовіри поява області нечіткості відбувається симетрично, рівноправно відносно зовнішніх підмножин (рис. 7.12а), 7.12б)). Це узгоджується із рівністю a_i для них. Досить цікавим стає процес деформування областей підмножин при подальшому збільшенні ступеня недовіри. Деформації

зовнішніх областей досить автономні, в той час, як внутрішня область зазнає впливу від всіх інших.

Приклад 7.7. Розбиття множини на 41 нечітку підмножину

Результати розбиття на 41 підмножину: кількість ітерацій 65; значення $\max_{x_i} |grad_{\psi_0}(\mu^{(k)}(x_i))| = 0,00087$; значення цільового функціоналу 0,00831.

На рис. 7.13-7.15 представлено графічну ілюстрацію оптимального розбиття одиничного квадрата з E_2 на 41 нечітку підмножину.

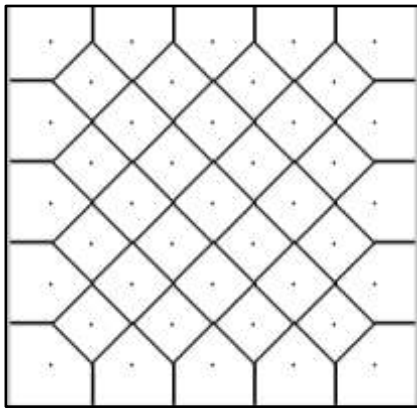


Рис. 7.13.

Розбиття на 41 чітку підмножину

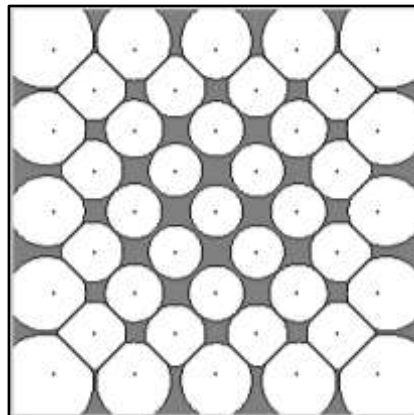


Рис. 7.14.

Розбиття на 41 нечітку підмножину $CH=0,1$

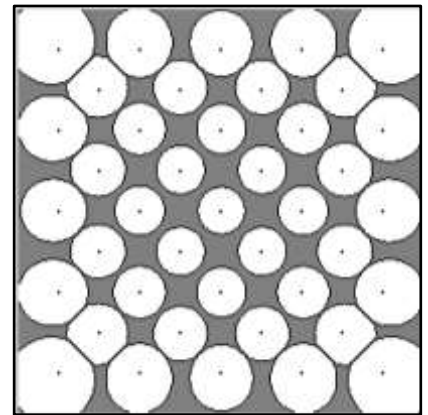


Рис. 7.15.

Розбиття на 41 нечітку підмножину $CH=0,11$

Аналіз результатів оптимального розбиття: на даному прикладі демонструється розбиття на велику кількість множин. Цікавим є факт зменшення числа ітерацій при збільшенні кількості підмножин.

Приклад 7.8. Розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини з відшуканням оптимальних координат їх центрів.

На рис. 7.16, 7.17 графічно представлені розбиття чіткої множини (одиничного квадрата) на нечіткі підмножини з відшуканням оптимальних координат їх центрів для трьох та чотирьох підмножин. Графічна ілюстрація розроблена без застосування параметра CH – ступеня недовіри. Належність точки

відповідній нечіткій підмножини (тобто значення функцій належності точки) зображено інтенсивністю відповідного кольору.

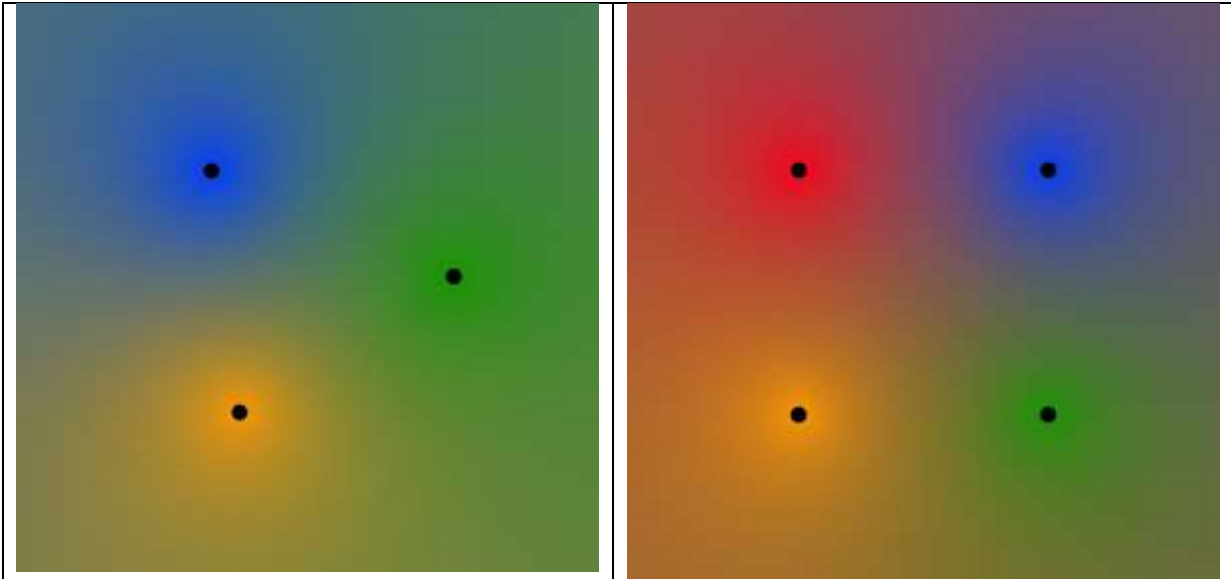


Рис. 7.16.

Розбиття на 3 нечіткі підмножини, знайдені оптимальні координати їх центрів: зелений – (7.51; 5.19), синій – (3.35; 7.05), жовтий – (3.84; 2.81).

Рис. 7.17.

Розбиття на 4 нечіткі підмножини, знайдені оптимальні координати їх центрів: червоний – (2.90; 7.11), синій – (7.10, 7.11), жовтий – (2.90; 2.89), зелений – (7.10; 2.89):

7.4 Висновки до розділу 7

У цьому розділі досліджені задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини, є нечіткими задачами нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними.

У підрозділі 7.1 розроблено і обґрунтовано метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини із заданими координатами центрів підмножин. У підрозділі 7.2 розроблено і обґрунтовано метод і алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множини на нечіткі підмножини з відшукуванням координат оптимального розміщення центрів цих

підмножин. Доведені теореми про існування та вигляд оптимального розв'язку кожної з поставлених задач.

Розроблені алгоритми базуються на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та теорії нечітких множин. Нечіткі задачі оптимального розбиття чіткої множини на її нечіткі підмножини формалізуються за рахунок введення до цільового функціоналу задачі функцій належності нечітких підмножин.

У підрозділі 7.3 ефективність методів і алгоритмів, розроблених у цьому розділі, продемонстровано на модельних задачах. Для інтерпретації отриманих результатів введено показник ступеня недовіри - це мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, при якому дана точка множини, що підлягає розбиттю на нечіткі підмножини, може бути з певністю віднесена до даної нечіткої підмножини.

За результатами числових експериментів для тестових задач відзначено наступні відмінності між задачами чіткого та нечіткого розбиття чіткої множини:

1. Для ідентифікації чіткої підмножини використовують поняття характеристичної функції, яка набуває дискретних значень 0 або 1. Для ідентифікації нечіткої підмножини використовуються функції належності, які є неперервними і приймають значення з відрізка $[0; 1]$.

2. Цільовий функціонал, який будується відносно шуканих функцій належності, є нелінійним відносно аргументу, що значно ускладнює побудову умов оптимальності і оптимального розв'язку задачі.

3. Нечітка задача має додаткову підзадачу віднесення (ідентифікації) точок множини відносно підмножин після того, як отримано оптимальне нечітке рішення поставленої задачі. Ця процедура виділяє області підмножин (точки цих областей напевне віднесено до даної підмножини) і область нечіткої межі.

Основні результати розділу опубліковані в [5, 6, 21].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено нову актуальну науково-прикладну проблему, яка полягає у розробці та обґрунтуванні методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач оптимального розбиття множин, що представляють новий розділ нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними, у яких для розкриття невизначеності застосовуються методи обчислювального інтелекту: апарат теорії нечітких множин та нечіткі нейронні мережі.

Основні наукові результати дисертації полягають у наступному.

1. Сформульовано математичні постановки нечітких задач оптимального розбиття множин та розроблено підходи щодо їх розв'язання на основі методів обчислювального інтелекту. Запропоновано класифікацію нечітких задач оптимального розбиття множин у відповідності до того, у яких елементах задачі наявна нечіткість. Виділено два основні класи: задачі оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних та задачі оптимального розбиття з нечіткістю в елементах задачі, які підлягають оптимізації.

2. Розроблено єдиний підхід до розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та обчислювального інтелекту. Спочатку для зняття нечіткості у початкових даних застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації залежностей, а потім – математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ в умовах визначеності. Єдиний підхід продемонстровано при розробці методів та алгоритмів розв'язання таких нечітких задач ОРМ, а саме: задач з функцією у цільовому функціоналі, явний вид якої невідомий; задач з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі та обмеженнях задачі; нескінченновимірної задачі розміщення-розбиття з нечіткими параметрами.

3. Розроблено та теоретично обґрунтовано методи і алгоритми розв'язання двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу для

випадків із заданим положенням центрів підмножин та з відшукуванням оптимальних координат розташування центрів підмножин, на які розбивається задана множина з n -вимірною евклідовою простору. Для розв'язання двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами застосовується розроблений єдиний підхід розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних.

4. Розроблено алгоритми побудови узагальнених, адитивно та мультиплікативно зважених діаграм Вороного з оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині з n -вимірною евклідовою простору E_n . Ці алгоритми засновані на формулюванні відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множин з E_n на підмножини з критерієм якості розбиття, який забезпечує відповідний вид діаграми Вороного, і застосуванні математичного і алгоритмічного апаратів теорії ОРМ, складовою частиною яких є r -алгоритм Шора. Для побудови названих діаграм Вороного з нечіткими параметрами застосовано розроблений єдиний підхід розв'язання задач оптимального розбиття в умовах нечітких початкових даних.

5. Розроблено і теоретично обґрунтовано методи і алгоритми розв'язання задач оптимального розбиття множин з обмеженнями на розміщення центрів підмножин як в умовах визначеності, так і з нечіткими початковими даними.

6. Розроблено та теоретично обґрунтовано метод і алгоритм розв'язання задачі розбиття чіткої множини на нечіткі підмножини з оптимальним розміщення центрів цих підмножин, у яких для інтерпретації отриманих результатів введено показник ступеня недовіри - мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, при якому дана точка множини, що підлягає розбиттю на нечіткі підмножини, може бути з впевненістю віднесена до даної нечіткої множини.

7. Розроблено комплекси комп'ютерних програм, які реалізують створені алгоритми розв'язання названих класів нечітких задач оптимального розбиття множин.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бейко И.В., Киселева Е.М. Условие оптимальности границы разделения зон территориального обслуживания. *Применение математических методов к решению производственно-экономических задач.* – Днепропетровск : ДГУ, 1973. С. 53-55.
2. Блюмин С.Л. Математическое моделирование. Некоторые современные подходы. Липецк : Изд-во ЛГТУ, 2018. 83 с.
3. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. Москва : Горячая линия-Телеком, 2015. 284 с.
4. Бублик Б. Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. Київ : Вища школа, 1975. 327 с.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва : Факториал Пресс, 2002. 824 с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1988. 552 с.
7. Гимади Э.Х. Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи. *Дискретный анализ и исследование операций*, 1995. 2(4). С. 13-31.
8. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. Москва : Наука, 1971. 351 с.
9. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. Москва : Наука, 1969. 382 с.
10. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / перев. с франц. Москва : Радио и связь, 1990. 288 с.
11. Зак Ю.А. Принятие решений в нечетких и размытых данных: Fuzzy-технологии. Москва : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 352 с.

12. Згуровский М.З. Зайченко Ю.П. Основы вычислительного интеллекта. Киев: Изд. «Наукова думка», 2013. 406 с.
13. Згуровский М.З. Зайченко Ю.П. Системный анализ направлений вычислительного интеллекта. *International Journal "Information Content and Processing"*, 2014. Vol. 1, N 3. P. 220-238.
14. Згуровский М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях. Киев : Наукова думка, 2011. 288 с.
15. Івохін Є.В. Про підхід до розв'язання транспортної задачі з нечіткими ресурсами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика*, 2014. 14 (1). С. 16-21.
16. Канторович Л.В. О перемещении масс. *Докл. АН СССР*, 1942. № 7-8 (37). С. 227-229.
17. Капустян В.Е., Киселева Е.М., Кроха Л.С. Решение некоторых задач стартового управления методом оптимального разбиения множеств. *Международный научно технический журнал «Проблемы управления и информатики»*, 1995. № 5. С. 80-88.
18. Киселева Е.М. Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями. *Кибернетика*, 1983. № 1. С.115-120.
19. Киселева Е.М. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения. Днепропетровск : ДГУ, 1982. 108 с.
20. Киселева Е.М. Решение обобщенной задачи Неймана-Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств. *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*, 1992. Т.31, № 1. С.167-173.
21. Киселева Е.М. Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства. Теоретические и практические приложения. *Проблемы управления и информатики*, 2018. № 5. С. 114-135.

22. Киселева Е.М., Бейко И.В. Свойства оптимальных решений для одной задачи орошения. *Краевые задачи фильтрации*. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973. С. 255-261.
23. Киселева Е.М., Гарт Л.Л., Притоманова О.М. Алгоритм построения диаграмм Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов на основе теории оптимального разбиения множеств. *Проблемы управления и информатики*, 2020. №2. С. 5-15.
24. Киселева Е.М., Жильцова А.А. Непрерывная задача оптимального нечеткого разбиения множеств без ограничений с заданным положением центров подмножеств. *Питання прикладної математики та математичного моделювання*. Днепропетровск : ДНУ, 2005. С. 121-136.
25. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические. Киев : Наукова думка, 2013. 606 с.
26. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и τ -алгоритмы. Киев : Наукова думка, 2015. 400 с.
27. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А.А. Оптимальное многократное шаровое покрытие невыпуклых областей. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. – Днепропетровск : ДНУ, 2015. С.72-87.
28. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Ус С.А. Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем. Днепропетровск : НГУ, 2015. 270 с.
29. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Алгоритм решения непрерывной задачи оптимального разбиения с нейролингвистической идентификацией функций, входящих в целевой функционал. *Проблемы управления и информатики*, 2018. № 2. С. 15-32.

30. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Оценка инвестиционной привлекательности стартапов на основе нейронечетких технологий. *Проблемы управления и информатики*, 2016. № 5. С. 123-143.
31. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ*, 2020. №1. С. 3-15.
32. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Умови існування розв'язку багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з додатковими обмеженнями. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ : ДНУ, 2016. С. 89-90.
33. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В., Журавель С.В. Объектно-ориентированный подход к программной реализации алгоритма решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. – Дніпро : Ліра. ДНУ, 2017. Вип. 17. С. 87-95.
34. Киселева Е.М., Шор Н.З. Исследование алгоритмов решения одного класса непрерывных задач разбиения. *Кибернетика и системный анализ*, 1994. № 1. С. 84-96.
35. Киселева Е.М., Степанчук Т.Ф. О выборе оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурных формул для функциональных классов, заданных квазиметриками. *Проблемы управления и информатики*, 2002. №3. С. 138-153.
36. Киселева Е.М., Степанчук Т.Ф. Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств. *Проблемы управления и информатики*, 2002. №2. С. 45-60.

37. Киселева Е.М., Строева В.А. Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств. *Проблемы управления и информатики*, 2012. № 1. С. 40-53.
38. Киселева Е.М., Ус С.А., Станина О.Д. О задачах оптимального разбиения множеств с дополнительными связями. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро : ДНУ, 2016. С. 67-78.
39. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. Киев : Наукова думка, 2005. 564 с.
40. Киселева Е.М., Притоманова О.М. К решению непрерывных задач оптимального разбиения множеств с нечеткими параметрами. Материалы 5-й Международной конференции «*Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*» Том II. Кишинэу, 2016. С. 188-193.
41. Киселева О.М., Притоманова О.М., Вороніна С.В. Нейронечіткі технології для розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з нечіткими параметрами. Збірка наукових праць за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «Наукові підсумки 2014 р. Фізико-математичні науки. Системний аналіз і теорія оптимальних рішень». Київ, 2015. С. 7-8.
42. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Использование нейронечетких технологий при управлении проектами по методу РМВОК РМІ. Тези доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ, 2016. С. 85-86.

43. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. О решении задачи «location-allocation» методами оптимального разбиения множеств. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали 18-ї міжнародної науково-практичної конференції SAIT 2016. Київ : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2016. С. 94-95.
44. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Применение методов недифференцируемой оптимизации для параметрической идентификации нечетких моделей. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ : ДНУ, 2015. С. 92-93.
45. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Примерение нейро-нечетких технологий для решения непрерывных задач оптимального разбиения при ограничениях с нечеткими параметрами. Тезисы докладов 5-й Международной конференции «*Космические технологии: настоящее и будущее*». Днепропетровск, 2015. С. 59.
46. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Сравнение двух подходов к решению нелинейных задач оптимального размещения-разбиения. Тези доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ : ДНУ, 2016. С. 87.
47. Кісельова О.М., Притоманова О.М. Нейронечіткі технології як перспективний підхід до представлення знань у системах штучного інтелекту. Материалы пятой международной научно-практической конференции «*Наука и бизнес. Экономика знаний*». Днепропетровск, 2015. С. 131-135.
48. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Оптимізація параметрів нечіткої моделі Мамдані із використанням γ -алгоритму Шора. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції

«Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем».
Дніпро : ДНУ, 2018. С. 102-103.

49. Кісельова О.М, Притоманова О.М., Гринченко В.О., Сергєєв О.С. Про двоетапну неперервно-дискретну задачу розбиття-розподілення з розміщенням центрів у множинах простої структури. Міжнародний науковий симпозиум «Інтелектуальні рішення». Матеріали ІХ міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень». Ужгород, 2019. С. 89-90.
50. Кісельова О.М, Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Побудова мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2019. Вип. 19. С. 117-126.
51. Кісельова О.М, Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2019. Вип. 19. С. 106-116.
52. Кісельова О.М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія. Дніпро : Ліра. ДНУ, 2018. 532 с.
53. Кісельова О.М., Притоманова О.М. Нечітка задача оптимального розбиття множин із обмеженнями на розміщення центрів підмножин. *Системні дослідження та інформаційні технології*, 2020. №1. С. 78-89.
54. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2018. Вип. 18. С. 85-98.
55. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і*

- математичного моделювання*, 2018. Вип. 18. С. 99-109.
56. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про алгоритм побудови адитивної і мультиплікативної діаграм Вороного в умовах невизначеності. *Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – ISDMCI'2020*: матеріали міжнар. наук. конф. Херсон, 2020. С. 71.
 57. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про оптимізацію параметрів нейронечіткої моделі експортних відносин між Україною та Китаєм. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали 20-ї науково-технічної конференції SAIT 2018. К.:ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2018. С. 68.
 58. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про залежність розв'язку задачі оптимального розбиття множин від коефіцієнта негладкої штрафної функції. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро, 2019. С. 126-127.
 59. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про розв'язання багатокритеріальної задачі оптимального розбиття множин із відшукуванням координат центрів підмножин. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро, 2019. С. 124-125.
 60. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Ус С.А., Матяш В.В. Про розв'язок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілення. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро : ДНУ, 2018. С. 99-101.

61. Кісельова О.М., Сьомчина П.В. Неперервна нечітка задача оптимального розбиття неопуклої множини. *Питання прикладної математики та математичного моделювання*, 2013. С. 190-196.
62. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб : БХВ-Петербург, 2003. 736 с.
63. Лысенко И.В. Нечеткая оптимизация: новый подход к постановке и решению задач. *Труды СПИИРАН*, 2004 Том 1, Вып. 2. С. 90-118. <https://doi.org/10.15622/sp.2.6>
64. Люгер Ф. Искусственный интеллект. Пер. с англ. Москва : Изд. Дом «Вильямс», 2006. 342 с.
65. Математическое обеспечение задач размещения производства. / Под ред. Албегова М.М. Москва : Наука, 1974. 128 с.
66. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 264 с.
67. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика. / Под ред. Н.Г. Ярушкиной. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 208 с.
68. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. Москва : Наука, 1981. 208 с.
69. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. Москва : Бином, 2009. 800 с.
70. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение / Под редакцией Ю.М. Банковского. М. Шеймос. Москва : Мир, 1989. 478 с.
71. Притоманова О.М. Застосування інтелектуальних технологій у моделюванні економічних і фінансових процесів. I Міжнародна науково-методична конференція «*Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці*». Чернівці: ЧНУ, 2009. С.118-121.

72. Притоманова О.М. Применние методологии системного анализа к управлению банковскими проблемными кредитами. *Питання прикладної математики і математичного аналізу*, 2015. С. 166-181.
73. Притоманова О.М. Про одну неперервну задачу оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМС-2019». Львів, 2019. С 147-150.
74. Притоманова О.М. Розв'язання задачі оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. *Вісник Львівського національного університету. Серія прикладна математика та інформатика*, 2019. Вип. 27. С. 97-107.
75. Притоманова О.М., Білай О.С. Багаторівневі нечіткі системи аналізу ризиків проблемного кредиту. Матеріали IV міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем». Харків, 2013. С. 265-267.
76. Притоманова О.М., Білай О.С. Нейронечітка модель оцінки рівня проблемності кредиту. *Нейро-нечіткі технології моделювання в економіці*, 2013. №2. С. 135-160.
77. Притоманова О.М., Булавка О.С. Засоби візуалізації у програмній реалізації алгоритму оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2016. С. 120-127.
78. Притоманова О.М., Журавель С.В. Застосування r-алгоритму до оптимізації параметрів нечіткої моделі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2017. Вип. 17. С. 188-198.
79. Притоманова О.М., Селищев В.Л., Кісельов М.Я. Порівняння ефективності традиційних алгоритмів побудови діаграм Вороного з методом оптимального розбиття множин. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення

- інтелектуальних систем*». Дніпро : ДНУ, 2018. С. 179-181.
80. Притоманова О.М., Селищев В.В. Застосування модифікованого принципу узагальнення Заде до задач аналітико-лінгвістичної апроксимації. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем - 2017*». Дніпро: ДНУ, 2017. С. 156-157.
81. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множин з додатковими центрами доставки. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ, 2017. С. 159-160.
82. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Об'єктно-орієнтований підхід до програмної реалізації алгоритму розв'язання деякого класу багатопродуктових задач оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, 2016. С. 128-143.
83. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход (AIMA-2). 2-е издание.: Пер. с англ. Москва : Изд. Дом «Вильямс», 2019. 1408 с.
84. Ротштейн О.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. Винница : «Універсум-Вінниця», 1999. 320 с.
85. Рубинштейн Г.Ш. Конечномерные модели оптимизации. Новосибирск : НГУ, 1970. 228 с.
86. Русяк И.Г., Нефедов Д.Г. Решение задачи оптимизации схемы размещения производства древесных видов топлива по критерию себестоимости тепловой энергии. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2012. Т. 4, № 3. С. 651-659.

87. Самойленко Н.И., Кобец А.А. Транспортные системы большой размерности. Харьков : НТМТ, 2010. 212 с.
88. Сеньо П.С. Методи локалізації функціональних невизначеностей для аналізу систем: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.05.04 Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2019. 36 с.
89. Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований *Кибернетика и системный анализ*, 2009. №2. С. 26-49.
90. Стецюк П.И. Теория и программные реализации г-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*, 2017. № 5. С. 43–57.
91. Стецюк П.И., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки*, 2018. Т. 1. С. 14–20.
92. Трухаев Р.И., Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач. ЛГУ, 1971. 168 с.
93. Трухаев Р.Н. Модели принятия решений в условиях неопределенности. Москва : Наука, 1981 257 с.
94. Туев С. В. Оптимизация сбора и переработки распределенного ресурса *Оптимизация и устойчивость*. Москва : ВЦ АН СССР, 1980. С. 23-31.
95. Туев С. В. Размещение на прямой пунктов сбора распределенного ресурса. *Техническая кибернетика*, 1980. № 2. С. 172-174.
96. Ус С.А., Станина О.Д. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ : ДНУ, 2014. С.258-268.
97. Хайкин С. Нейронные сети. 2-е изд. Пер. с англ. Москва : Издательский дом "Вильямс", 2006. 1104 с.

98. Хачатуров В.Р., Злотов А.В. Соломатин А.Н. Математические методы, алгоритмы и программные средства для планирования и проектирования нефтегазодобывающих регионов и месторождений. *Экспозиция Нефть Газ*, 2012. № 5 (23). С. 100-106.
99. Хокинс Д., Блейкли С. Об интеллекте. Пер. с англ. Москва : ООО «ИД Вильямс», 2007. 240 с.
100. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. Киев : Наук. думка, 1979. 200 с.
101. Шор Н.З., Журбенко А.П., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения. *Кибернетика и системный анализ*, 2003. № 4. С. 80-94.
102. *Advances in Data Analysis with Computational Intelligence Methods* / Janusz Kasprzyk (ed.). Springer Nature, 2018. 412 p.
103. Ahmad, T., Khan, I. U., Khan M., Maan. N. Fully Fuzzy Linear Programming with a Special Ranking Function for Selection of Substitute Activities in Project Management. *International Journal of Applied Science and Technology* Vol. 1. No. 6; November 2011. P. 234-246.
104. Alefeld G. *Interval Analysis: Theory and Applications* / G. Alefeld, G. Mayer (eds). *Journal of Computational Applied Mathematics*, 2000. №121. P. 421-464.
105. Anwar Z., Ahsan A., Catal C. Neuro-Fuzzy Modeling for Multi-Objective Test Suite Optimization. *J. Intell. Syst*, 2016. 25(2). P. 123–146. DOI 10.1515/jisys-2014-0152.
106. *Applied Mathematics and Computational Intelligence* / Anna M. Gil-Lafuente (ed.). Springer Nature, 2018. 428 p.
107. Atamtürk A., Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P. A Combined Lagrangian, Linear Programming and Implication Heuristic for Large-Scale Set Partitioning Problems. *Journal of Heuristics*, 1995. Vol. 1. P. 247-259.

108. Aurenhammer F., Klein R., Lee D.-T. Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. World Scientific Pub Co Inc, 2013. 337 p.
109. Babuska R., Verbruggen H. Neuro-fuzzy methods for nonlinear system identification. *Annual Reviews in Control*, 2003. Vol. 27(1). P. 73-85.
110. Bansal J., Deep K., Nagar A. Advances in Computational Intelligence Techniques. Springer Nature Singapore Pte Ltd? 2020. 267 p.
<https://doi.org/10.1007/978-981-15-2620-6>.
111. Bezdek J.C. “What is computational intelligence?” in Computational Intelligence Imitating Life., Zurada, J. M., R. J. M. II, and C. J. Robinson, Eds., *IEEE Press*, New York, 1994. P. 1-12.
112. Blyuss O., Zaikin A., Cherepanova V., Munblit D., Kiseleva E., Prytomanova O., Duffy S., Crnogorac-Jurcevic T. Development of PancRISK, a urine biomarker-based risk score for stratified screening of pancreatic cancer patients. *British Journal of Cancer*, 2020. Vol. 122(6). P. 692–696.
113. Blyuss O., Zaikin A., Kiseleva E., Prytomanova O., Crnogorac-Jurcevic T. On the development of a urine biomarker-based risk score for the early detection of pancreatic cancer. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро, 2019. С. 26.*
114. Bollabas B. The optimal arrangement of producers. *J. London Math. Soc.*, 1973. Vol. 6., N 4. P. 605-613.
115. Buckley, J. On the equivalence of neural nets and fuzzy expert systems / J. Buckley, Y. Hayashi, E. Czogala. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999. Vol. 100. P. 323-330.
116. Chen Shi-Jay, Chen Shyi-Ming. Fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003. Vol. 11, № 1. С. 45–56.

117. Computational Intelligence and Optimization. Blondin M., Pardalos P., Sáez J. (eds.). Springer Optimization and Its Applications 150, 2019. 355 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25446-9_1.
118. Computing with Words in Information / Intelligent Systems 2. Applications. / Zadeh L.A., Kacprzyk J. (eds.) Springer-Verlag, 1999. 610 p.
119. Corley H.W., Roberts S.D. A partitioning problem with applications in regional design. *Operations Research*, 1972. 20(5). P. 1010-1019.
120. Corley H.W., Roberts S.D. Duality Relationships a Partitioning Problem. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1972. 23(4). P. 490-494.
121. Drezner Z., Hamacher H.W. Facility Location: Application and Theory. – Berlin: Springer, 2001. 476 p.
122. Fengqi You, Grossmann I.E. Mixed-integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2008. 47(2). P. 7802-7817.
123. Fogel D. Review of “Computational intelligence: imitating life,” *IEEE Trans. Neural Networks*, 1995. N6. P. 1562–1565.
124. Francis R. L. Sufficient conditions for some optimum-property facility design. *Oper. Res*, 1967. Vol. 15, N 3. P. 448-466.
125. Fuling T. Applying interactive fuzzy multi-objective Linear programming to transportation planning decisions. *Journal of information and optimization sciences*, 2006. Vol. 27., №1. P. 107-126.
126. Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems / Bezdek J., Dubois D., Prade H. (eds.). Springer, 1999. 525 p.
127. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Their Applications / Special Issue Editor Michael Gr. Voskoglou. MDPI, Basel, Switzerland, 2020. 368 p. URL: http://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues.

128. Fuzzy Sets: Where do We Stand? Where do We Go? *Fuzzy Sets and Systems: Special Issue.* / Eds.: H.-J. Zimmermann (Ed. in Chief), D. Dubois and A. Sandri (Guest Eds.), 1997. Vol. 90, № 2. 160 p.
129. Garanzha V.A., Kamenski L., Si H. (Eds.) Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering 131). Springer, 2019. 322 p.
130. Generalized Voronoi Diagram: A Geometry-Based Approach to Computational Intelligence / Marina L.Gavrilova (Ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 304 p. DOI 10.1007/978-3-540-85126-4.
131. Hanne T., Dornberger R. Computational Intelligence in Logistics and Supply Chain Management. Springer Nature, 2017. 176 p.
DOI 10.1007/978-3-319-40722-7.
132. Jang J.-S. Roger, Sun C. T., Mizutani E. Neuro-Fuzzy and Soft Computing. A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. Prentice-Hall International, 1997. 640 p.
133. Kazarian A., Blyuss O., Metodieva G., Gentry-Maharaj A., Ryan A., Kiseleva E., Prytomanova O. Testing breast cancer serum biomarkers for early detection and prognosis in pre-diagnosis samples. *British Journal of Cancer*, 2017. №116. C. 501-508.
134. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An Algorithm to Construct Generalized Voronoi Diagrams with Fuzzy Parameters Based on the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies. *Modern Machine Learning Technologies and Data Science. Workshop. Proc. 1st International Workshop MoML&T&DS 2019. Shatsk (Ukraine). CEUR-WS.org, online., 2019. P. 148-162.*
135. Kiseleva E., Prytomanova O. An algorithm for solving fuzzy optimal partitioning of set problem with location of centers of the subsets. *Znanstvena misel journal.* Ljubljana (Slovenia), 2020. Vol. 1, No 40. P. 19-26.

136. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a Two-stage Continuous-discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with the Subsets Centers Placement. *Open Computer Science*. De Gruyter, 2020. Vol 10. P. 124-136.
137. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L., Zhuravel S. A definition of the generalized Voronoi diagrams with the optimal placement of generator points with the employment of the optimal set partitioning method. *Sixth International conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*. Kyiv, 2018. 4 p.
138. Kiseleva E., Prytomanova O., Zhuravel S. An algorithm for solving location-allocation problem with fuzzy parameters. *Scientific discussion*. Praha (Czech Republic), 2020. Vol. 1, No 40. P. 11-18.
139. Kiseleva E.M. Solution of the problem of optimal partitioning including allocation of the centres of gravity of the Subsets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989. 29 (3). P. 47-56.
140. Kiseleva E.M., Hart L.L., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning. *Matematychni Studii*, 2020. Vol. 53, №1. P. 109-112.
141. Kiseleva E.M., Kadochnikova Ya.E. Solving a continuous single-product problem of optimal partitioning with additional conditions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2009. 41 (7). P. 48-63.
142. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. A continuous problem of optimal partition with a nondifferentiable functional. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2000. Vol. 36, № 6. P.570-578.
143. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. On solving and properties of the simplest dynamical problem of optimal set partition problem. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013. 45(6). P. 1-12.
144. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi

- diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2015. Vol. 51, № 3. P. 325-335.
DOI 10.1007/s10559-015-9725-x.
145. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2015. Vol. 51, № 4. P. 489-499.
DOI: 10.1007/s10559-015-9740-y.
146. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A. On dynamical problem of optimal set partition with integral constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013. 45 (7). P. 41-53.
147. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A. Solving the Dynamic Optimal Set Partitioning Problem with Arrangement of Centers of Subsets. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2014. 50 (6). P. 842-853.
148. Kiseleva E.M., Kuznetsov K.A. On application of the method of potential functions to the stochastic problem of the optimal partitioning of sets. *Journal of Automation and Information Sciences*, 1999. N31(1-3). P. 108-112.
149. Kiseleva E.M., Kuznetsov K.A. On solution of continuous stochastic problem of optimal partitioning with objective functional recovery. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2000. N32 (3). P. 60-66.
150. Kiseleva E.M., Lebedj O. Yu. Classification of Fuzzy Problems of Optimal Sets Partition and Some Approaches to Their Solution. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2009. Vol. 41, N 1. P.15-26.
151. Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2009. 45 (3). P. 421-437.

152. Kiseleva E.M., Pritomanova O.M., Zhuravel S.V. Mathematical aspects of neuro-fuzzy technology application in project management. *European Cooperation – Scientific Approaches and Applied Technologies*. Warsaw (Poland), 2017. №12. P. 61-70.
153. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Padalko V.H. Application of the theory of optimal set partitioning before building multiplicatively weighted Voronoi diagram with fuzzy parameters. *Eurasian Science Journal*, 2020. No 2(71), Vol. 6. P. 30-35.
154. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Blyuss O.B. Neuro-fuzzy technologies in candidate biomarkers testing in breast cancer. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем». Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. С. 91.
155. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Us S.A. Solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with a given position of the subsets centers. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2020. Vol. 56(1). P. 3-15.
156. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018. Vol. 50, Issue 3. P. 1-20.
DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
157. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016. Vol. 48, Issue 9, P. 1-22.
DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
158. Kiseleva E.M., Shor N.Z. An algorithm of solution of a multiproduct problem of optimal partitioning with constraints. *Cybernetics*. 1985, 21 (1). P. 90-99.

159. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Analysis of algorithms for a class of continuous partition problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, Vol. 30 (1). P. 64-74.
160. Kiseleva E.M., Shor N.Z. The solution of the continuous optimal decomposition problem with incomplete initial data. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991. Vol. 31(6). P. 13-20.
161. Kiseleva E.M., Stepanchuk T. On the Efficiency of a Global Non-differentiable Optimization Algorithm Based on the Method of Optimal Set Partitioning. *Journal of Global Optimization*, 2003. Vol. 25. P. 209-235.
162. Kiseleva E.M., Zhiltsova A.A. The Necessary Optimality Conditions for Continuous Problems of Set Partitioning in Terms of the Theory of Set Functions. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2008. Vol. 40., N 12. P.14-26.
163. Kiseleva E.M., Zhiltsova A.A., Stroyeva V.A. General scheme to obtain necessary optimality conditions for continuous optimal set partitioning problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2012. Vol. 44 (9). P. 51-65.
164. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O. On constructing generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. «*Problems of Decision Making under Uncertainties*»: Abstracts of XXXIII International Conference. Hurgada (Egypt), 2019. P. 50-51.
165. Kiselyova O.M., Dunaichuk M.S. Solving a Continuous Nonlinear Problem of Optimal set Partition with Arrangement of Subset Centers in the Case of a Convex Objective Functional. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2008. Vol.44, N 2. P. 261-275.
166. Kochetov Yu. Bilevel facility location: discrete models and computational methods. *Proceedings of XXXVII Symposium on Operations Research*, 2010. P. 12-16.
167. Kosko B. Fuzzy Systems as Universal Approximators. *IEEE Transaction on Computers*, 1994. N.11. P. 1329-1333.

168. Lai Y.J., Hawng C.L. Fuzzy Mathematical Programming. Lecture notes in Economics and Mathematical systems. Springer-Verlag, 1992. 495 p.
169. Liu, B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process. *Journal of Uncertain Systems*, 2008. Vol. 2(1). P. 3-16.
170. Marks R. Intelligence: computational versus artificial. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1993. Vol. 4, P. 737-739.
171. Murat A., Verter V., Laporte G. A. Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand. *Computers and Operations Research*, 2010. Vol. 37(1). P. 123-136.
172. Okabe A., Boots B, Sugihara K., Chiu S.N. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000. 696 p.
173. Palm R., Driankov D. Fuzzy Switched Hybrid Systems – Modeling and Identification. *Proc. of the IEEE ISIC Joint Conference*. – Gaithersburg, 1998. P. 130-135.
174. Preparata F., Sheimos M. Computational geometry: an introduction. Springer. First Edition edition, 1993. 390 p.
175. Reeb J., Leavengood S. Transportation Problem: A Special Case for Linear Programming Problems. Performance Excellence in the Wood Products Industry. *Operations Research*, 2002. EM 8779. P. 1-36.
176. Shevchenko T., Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. The Features of Solving of the Set Partitioning Problems with Moving Boundaries between Subsets. *Operations Research Proceedings*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. P. 533-538.
177. Shor N.Z. Minimization methods for non-differentiable functions. Springer series Computational mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1985. Vol. 3. 162 p.
178. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 412 p.

179. Siddique N. Intelligent Control: A Hybrid Approach Based on Fuzzy Logic, Neural Networks and Genetic Algorithms. Springer, 2013. 282 p.
180. Springer Handbook of Computational Intelligence / Janusz Kacprzyk (ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. 1633 p.
DOI 10.1007/978-3-662-43505-2.
181. Stetsyuk P.I. Shor's r-Algorithms: Theory and Practice. In: Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. Ed. by Butenko S., Pardalos P.M, Shylo V. Springer, 2017. P. 495-520.
182. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2018. V. 54, № 5. P. 716-726.
183. Sumathi S., Surekha P. Computational Intelligence Paradigms. Theory and Applications using MATLAB. CRC Press. Taylor & Francis Group, 2010. 834 p.
184. Us S.A., Stanina O.D. On some mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry. New Developments in Mining Engineering 2015. *Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Mining*. CRC Press. Balkema-Taylor & Francis Group. London, 2015. P. 419–424.
185. Wang F. Neural Networks Genetic Algorithms, and Fuzzy Logic for Forecasting. Proceedings *International Conference on Advanced Trading Technologies*. New York, 1992, P. 504-532.
186. Yakovlev S.V. Formalization of spatial configuration optimization problems with a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019. V. 55, № 4. P. 512-523.
187. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018. V. 50, № 9. P. 38-50.
188. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2017. 53 (5). P. 725-731.

189. Yang H. Tracking Control for a Class of Switched Fuzzy Systems. *Advanced Materials Research*, 2014. Vol. 945-949. P. 2547-2550.
190. Yang W., Tong S. Output feedback robust stabilization of switched fuzzy systems with time-delay and actuator saturation. *Neurocomputing*. 2015. Vol. 164. P. 173-181.
191. Zadeh L.A. Fuzzy Logic = Computing With Words. *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, 1996. Vol. 4. P. 103-111.
192. Zadeh L.A. Fuzzy Logic, Neural Network and Soft Computing. *Communication of the ACM*. 1994. Vol. 37, № 3. P. 77-84.
193. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965. Vol. 8. P. 338–353.
194. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I. *Information Sciences*, 1975. Vol. 8(3). P. 199-249.
195. Zadeh L.A. Theory of commonsense knowledge: aspects of vagueness. Dordrecht: D.Reidel, 1984. P. 257-296.
196. Zgurovsky M., Zaychenko Y. The Fundamentals of Computational Intelligence: System Approach. Springer International Publishing Switzerland, 2016. 375 p. DOI 10.1007/978-3-319-35162-9
197. Zhbanova N.Yu. Neuro-Fuzzy Modeling and Control of Multistage Dynamic Processes That Depend on Inputs with Uncertainty Elements / N.Yu. Zhbanova and etc. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 2015. Vol. 80(1). P. 2-12.
198. Zimmerman H.-J. Fuzzy Sets Theory and Its Applications. 4th ed. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001. 514 p.

Додаток А

**ОПИС ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ
АЛГОРИТМІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
РОЗБИТТЯ МНОЖИН У ЗАГАЛЬНІЙ ПОСТАНОВЦІ**

Розроблений програмний продукт дозволяє розв’язувати неперервні задачі оптимального розбиття множин різних класів:

- однопродуктові та багатопродутові;
- лінійні та нелінійні;
- задачі з фіксованими координатами центрів підмножин та задачі з відшукуванням оптимальних координат центрів підмножин;
- задачі з обмеженнями у формі рівностей та нерівностей;
- задачі з додатковими обмеженнями на пропускні здатності комунікацій.

Опис програмної реалізації

Для розробки програмного забезпечення було обрано мову програмування C# та середовище розробки Microsoft Visual Studio 2013. При розробці використовувався об’єктно-орієнтований підхід до програмування. Переваги використаного підходу були освячені у роботі [12]. В проекті використовується бібліотека DynamicExpresso для інтерпретації команд мовою C#, введених у вигляді тексту, що дозволило забезпечити механізм введення до програми довільних математичних функцій без перекомпіляції програми. Основні модулі програми:

Vector.cs

В модулі описано клас Vector – клас, що моделює вектор, а саме має переважані оператори, що реалізують операції додавання векторів, множення вектору на число, скалярний добуток векторів.

Matrix.cs

В модулі описано клас Matrix – клас, що моделює матрицю, а саме має переважані оператори, що реалізують операції додавання і множення матриць, множення матриці на число, а також метод для транспонування.

Діаграма основних класів зображена на рис. А.1 і А.2.

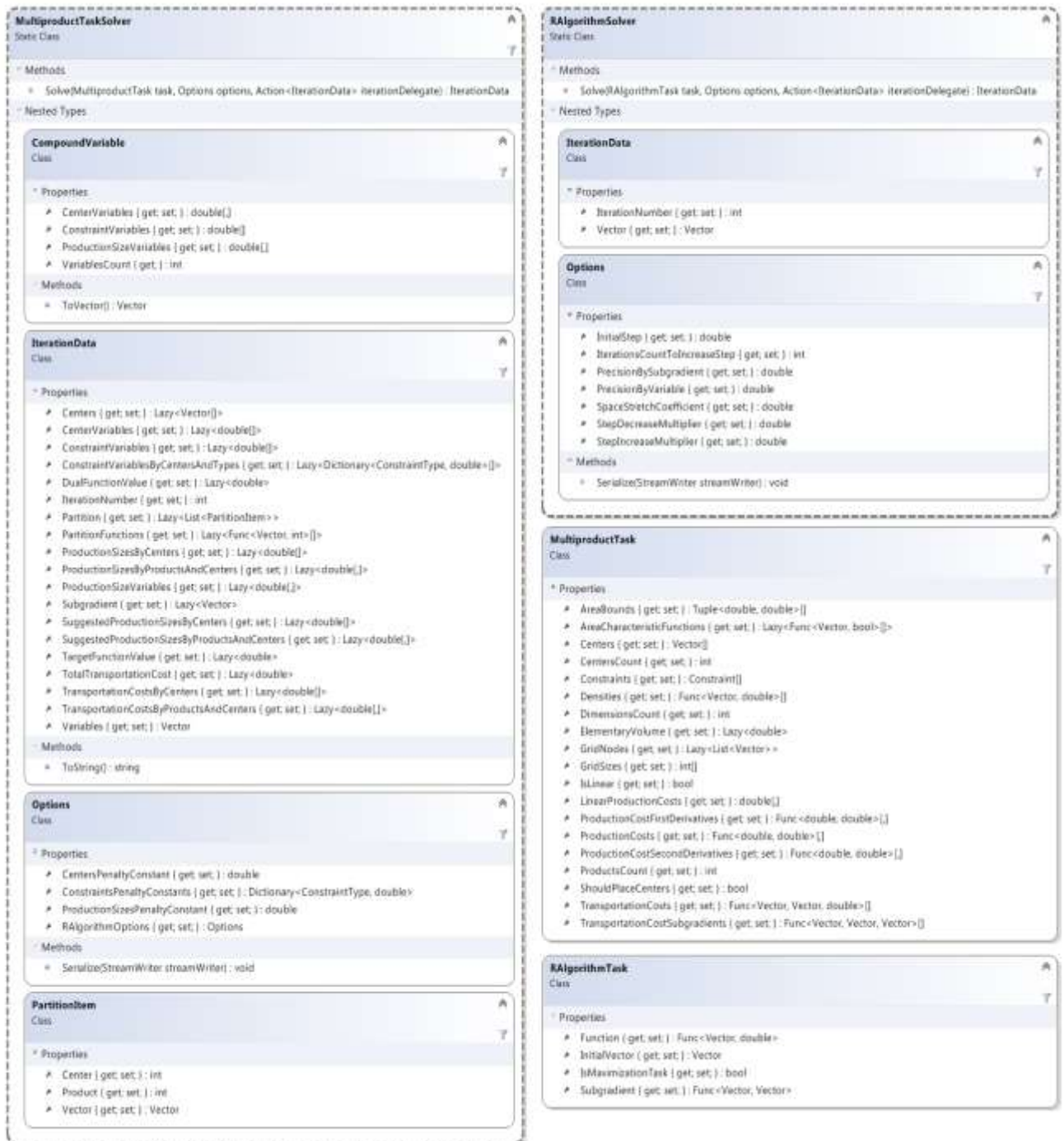


Рис. А.1 – Діаграма класів (частина 1)

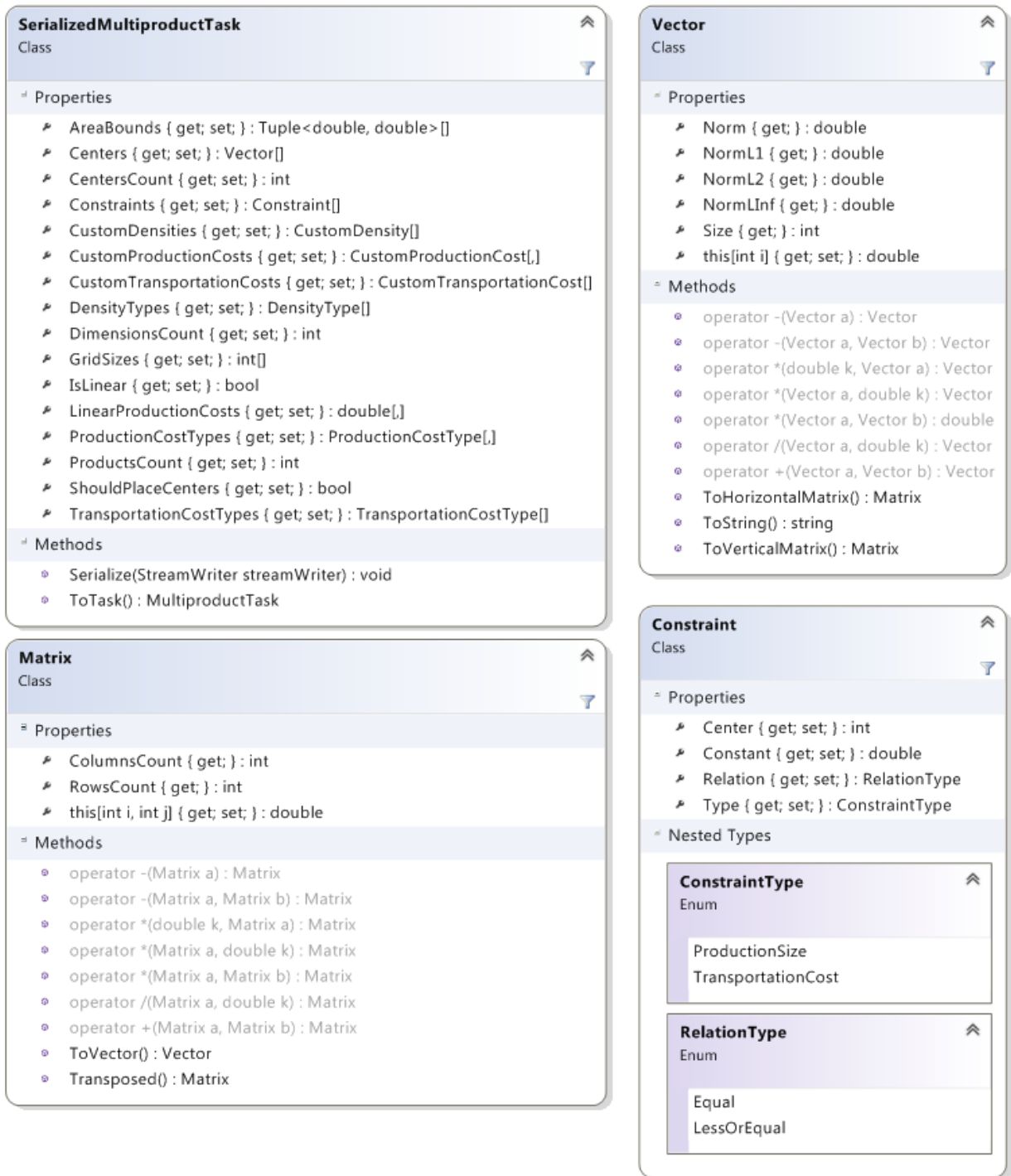


Рисунок А.2 – Діаграма класів (частина 2)

RAlgorithmTask.cs

В модулі описано клас `RAlgorithm.Task` – клас, що у загальному вигляді зберігає інформацію про задачу оптимізації, яка може бути розв’язана r -алгоритмом. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- `public Vector InitialVector { get; set; }` – початкове наближення;
- `public Func<Vector, double> Function { get; set; }` – функція, значення якої оптимізується;
- `public Func<Vector, Vector> Subgradient { get; set; }` – субградієнт функції, значення якої оптимізується;
- `public bool IsMaximizationTask { get; set; }` – показник, максимізувати чи мінімізувати значення функції.

RAlgorithmSolverOptions.cs

В модулі описано клас `RAlgorithm.Solver.Options` – клас, що зберігає інформацію про параметри r -алгоритму. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- `public double InitialStep { get; set; }` – початковий крок r -алгоритму;
- `public int IterationsCountToIncreaseStep { get; set; }` – кількість кроків одновимірного спуску (підйому), після якої крок r -алгоритму необхідно збільшити;
- `public double StepDecreaseMultiplier { get; set; }` – коефіцієнт зменшення кроку r -алгоритму у випадку, якщо умова зупинки одновимірного спуску (підйому) виконалася після першого ж кроку;
- `public double StepIncreaseMultiplier { get; set; }` – коефіцієнт збільшення кроку r -алгоритму у випадку, якщо кількість кроків одновимірного спуску (підйому) перевищила встановлену величину;
- `public double PrecisionByVariable { get; set; }` – точність за змінними, яка вважається умовою зупинки r -алгоритму;

- public double PrecisionBySubgradient { get; set; } – точність за субградієнтом, яка вважається умовою зупинки r-алгоритму;
- public double SpaceStretchCoefficient { get; set; } – коефіцієнт розтягу простору λ ;
- public int MaximumIterationsCount { get; set; } – максимально допустима кількість ітерацій r-алгоритму.

RAlgorithmSolverIterationData.cs

В модулі описано клас `RAlgorithm.Solver.IterationData` – клас, що зберігає інформацію про ітерацію r-алгоритму:

- public int IterationNumber { get; set; } – номер ітерації;
- public Vector Vector { get; set; } – поточне наближення.

RAlgorithmSolver.cs

В модулі описано клас `RAlgorithm.Solver` – клас, що реалізує r-алгоритм Шора з адаптивним вибором крокового множника.

Публічний інтерфейс включає єдиний метод `Solve`, який розв’язує задачу максимізації чи мінімізації функції за допомогою r-алгоритму:

```
public static IterationData Solve(Task task, Options options,
Action<IterationData> iterationDelegate)
```

Параметри метода:

- `RAlgorithm.Task task` – задача, яку необхідно розв’язати;
- `RAlgorithm.Solver.Options options` – параметри r-алгоритму;
- `Action<RAlgorithm.Solver.IterationData> iterationDelegate` – callback-функція, яка буде викликана після кожної ітерації r-алгоритму.

MultiproductTask.cs

В модулі описано клас `MultiproductTask.Task` – клас, що зберігає інформацію про параметри задачі оптимального розбиття множини. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- public int DimensionsCount { get; set; } – розмірність простору n ;

- public Tuple<double, double>[] AreaBounds { get; set; } – границі області для кожного виміру;
- public int[] GridSizes { get; set; } – кількість інтервалів сітки для кожного виміру;
- public int ProductsCount { get; set; } – кількість продуктів M ;
- public Func<Vector, double>[] Densities { get; set; } – масив функцій $\rho^j(x)$, $j = 1, \dots, M$;
- public Func<Vector, Vector, double>[] TransportationCosts { get; set; } – масив функцій $c^j(x, \tau)$, $j = 1, \dots, M$;
- public Func<Vector, Vector, Vector>[] TransportationCostSubgradients { get; set; } – масив субградієнтів функцій $c^j(x, \tau)$, $j = 1, \dots, M$;
- public bool ShouldPlaceCenters { get; set; } – показник, чи потрібно розміщувати центри підмножин;
- public int CentersCount { get; set; } – кількість підмножин N ;
- public Vector[] Centers { get; set; } – масив векторів τ_i , $i = 1, \dots, N$, що є центрами підмножин; якщо задача потребує розміщенням центрів, то вказані вектори вважаються початковим наближенням для координат центрів;
- public bool IsLinear { get; set; } – показник, чи є задача лінійною;
- public double[,] LinearProductionCosts { get; set; } – матриця a_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ (у випадку лінійної задачі);
- public Func<Double, Double>[,] ProductionCosts { get; set; } – масив функцій $\varphi_i^j(x)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$;
- public Func<Double, Double>[,] ProductionCostFirstDerivatives { get; set; } – масив похідних функцій $\varphi_i^j(x)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$;
- public Func<Double, Double>[,] ProductionCostSecondDerivatives { get; set; } – масив других похідних функцій $\varphi_i^j(x)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$;
- public Constraint[] Constraints { get; set; } – масив обмежень.

SerializedMultiproductTask.cs

В модулі описано клас MultiproductTask.SerializedTask – клас, що відповідає за збереження параметрів задачі оптимального розбиття множини у файлу та їх завантаження з файлу.

MultiproductTaskConstraint.cs

В модулі описано клас MultiproductTask.Constraint – клас, що зберігає інформацію про обмеження задачі. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- public int Center { get; set; } – номер центру, якому відповідає обмеження;
- public ConstraintType Type { get; set; } – тип обмеження: ProductionSize – обмеження у формі рівностей або нерівностей, TransportationCost – обмеження на пропускні здатності комунікацій;
- public RelationType Relation { get; set; } – тип обмеження: Equal – рівність, LessOrEqual – нерівність;
- public double Constant { get; set; } – величина обмеження (величина b_i або l_i відповідно).

MultiproductTaskSolverOptions.cs

В модулі описано клас MultiproductTask.Solver.Options – клас, що зберігає інформацію про параметри алгоритму. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- public Dictionary<MultiproductTask.Constraint.ConstraintType, double> ConstraintsPenaltyConstants { get; set; } – словник, в якому містяться штрафні коефіцієнти S_1 , S_2 , що відповідають обмеженням у формі нерівностей та обмеженням на пропускні здатності комунікацій;
- public double CentersPenaltyConstant { get; set; } – штрафний коефіцієнт за вихід центрів за межі області;
- public double ProductionSizesPenaltyConstant { get; set; } – значення штрафного коефіцієнта S_3 ;

- public RAlgorithm.Solver.Options RAlgorithmOptions { get; set; } – параметри r-алгоритму.

MultiproductTaskSolverPartitionItem.cs

В модулі описано клас MultiproductTask.Solver.PartitionItem – клас, що зберігає інформацію про координати вузла сітки та приналежність цього вузла до однієї з підмножин. Публічний інтерфейс класу включає наступні властивості:

- public Vector Vector { get; set; } – координати вузла сітки;
- public int Product { get; set; } – номер продукту;
- public int Center { get; set; } – номер центру, якому відповідає вузол у розбитті за вказаним вище продуктом.

MultiproductTaskSolverIterationData.cs

В модулі описано клас MultiproductTask.Solver.IterationData – клас, що зберігає інформацію про ітерацію алгоритму:

- public int IterationNumber { get; set; } – номер ітерації;
- public Vector Variables { get; set; } – вектор змінних на поточній ітерації;
- public Lazy<double[]> ConstraintVariables { get; set; } – значення змінних ψ_i та ξ_i , $i = 1, \dots, N$ на поточній ітерації;
- public Lazy<Vector[]> Centers { get; set; } – центри τ_i , $i = 1, \dots, N$ підмножин на поточній ітерації;
- public Lazy<double[,]> ProductionSizeVariables { get; set; } – значення змінних Y_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ на поточній ітерації;
- public Lazy<Vector> Subgradient { get; set; } – вектор субградієнта на поточній ітерації;
- public Lazy<double> TargetFunctionValue { get; set; } – значення цільового функціоналу початкової задачі на поточній ітерації;
- public Lazy<double> DualFunctionValue { get; set; } – значення функціоналу двоїстої задачі на поточній ітерації;

- `public Lazy<double[,]> ProductionSizesByProductsAndCenters { get; set; }` – значення величин $\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx$, $i = 1, \dots, N$ на поточній ітерації;
- `public Lazy<double[,]> TransportationCostsByProductsAndCenters { get; set; }` – значення величин $\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx$, $i = 1, \dots, N$ на поточній ітерації;
- `public Lazy<List<PartitionItem>> Partition { get; set; }` – розбиття на поточній ітерації;
- інші допоміжні властивості.

MultiproductTaskSolver.cs

В модулі описано клас `MultiproductTask.Solver` – клас, що реалізує алгоритм розв’язку поставленої задачі. Публічний інтерфейс включає єдиний метод `Solve`:

```
public static IterationData Solve(Task task, Options options,
Action<IterationData> iterationDelegate)
```

Параметри метода:

- `MultiproductTask.Task task` – задача, яку необхідно розв’язати;
- `MultiproductTask.Solver.Options options` – параметри r -алгоритму;
- `Action<MultiproductTask.Solver.IterationData> iterationDelegate` – callback-функція, яка буде викликана після кожної ітерації алгоритму.

В ході виконання даного методу на базі параметрів задачі створюються функції, що відповідають цільовому функціоналу та його градієнту, і передаються до класу `RAlgorithm.Solver`.

FormInput.cs

В модулі описано клас `FormInput` – клас, що відповідає за інтерфейс користувача для введення даних задачі.

FormOutput.cs

В модулі описано клас FormOutput – клас, що відповідає за інтерфейс користувача для відображення результатів розв’язання задачі.

PartitionControl.cs

В модулі описано клас PartitionControl – клас, що являє собою допоміжний елемент користувацького інтерфейсу (контроль), який використовується для графічного відображення розбиття за окремим продуктом.

Інструкція користувача

Після запуску програми користувач побачить вікно для введення даних, інтерфейс якого наведений на рис. А.3 і А.4.

The screenshot shows a window titled "Введення даних" (Data Entry) with the following sections:

- Ліва границя області** (Left boundary of the region): Input field with value 0.
- Права границя області** (Right boundary of the region): Input field with value 1.
- Нижня границя області** (Bottom boundary of the region): Input field with value 0.
- Верхня границя області** (Top boundary of the region): Input field with value 1.
- Кількість інтервалів по X** (Number of intervals along X): Input field with value 30.
- Кількість інтервалів по Y** (Number of intervals along Y): Input field with value 30.
- Кількість продуктів** (Number of products): Input field with value 2.
- Кількість підмоделей** (Number of submodels): Input field with value 2.
- Функції попиту** (Demand functions): A table with columns "Шаблон" (Template) and "Функція p(x,y)" (Function p(x,y)). It contains two rows for "Продукт 1" and "Продукт 2".
- Функції вартості доставки** (Delivery cost functions): A table with columns "Шаблон" (Template), "Функція c(x,y,xc,yc)" (Function c(x,y,xc,yc)), "Похідна по xc" (Derivative w.r.t xc), and "Похідна по yc" (Derivative w.r.t yc). It contains two rows for "Продукт 1" and "Продукт 2".
- Координати центрів** (Coordinates of centers): A table with columns "X" and "Y". It contains two rows for "Центр 1" and "Центр 2".
- Лнійна задача** (Linear problem): A section with a checked checkbox "Лнійна задача".
- Важкі коефіцієнти** (Important coefficients): A table with columns "Центр 1" and "Центр 2". It contains two rows for "Продукт 1" and "Продукт 2".
- Обмеження** (Constraints): A table with columns "Номер центру" (Center number), "Тип" (Type), "Відношення" (Ratio), and "Значення" (Value). It contains one row for "Продукт 1".
- Штрафи коефіцієнтів** (Penalty coefficients): A section with several input fields for penalty values, all set to 10000.

Рис. А.3 – Інтерфейс користувача для введення даних (частина 1)

Дане вікно містить наступні елементи (в порядку згори вниз і зліва направо):

- 4 текстових поля для введення границь області (лівої, правої, нижньої та верхньої відповідно);
- 2 текстових поля для введення кількості інтервалів сітки (за кожним виміром окремо);

Рис. А.4 – Інтерфейс користувача для введення даних (частина 2)

- текстове поле для введення кількості продуктів; зміна значення цього поля автоматично змінює кількість рядків або стовпчиків у подальших таблицях;
- текстове поле для введення кількості підмножин; зміна значення цього поля автоматично змінює кількість рядків або стовпчиків у подальших таблицях;
- таблицю для введення функцій $\rho^j(x)$, $x \in E_2$, $j = 1, \dots, M$; для того, щоб задати функцію, необхідно у стовпчику “Шаблон” з випадного списку обрати або одну з наперед заданих функцій, або (у випадку, якщо необхідна функція відсутня) пункт “Інша”; у випадку вибору пункту “Інша” у стовпчик “Функція”

необхідно ввести формулу у вигляді тексту мовою C#; аргументи x та y – це координати точки; приклад синтаксису коректної функції: $\text{Math.Pow}(x, 2) + \text{Math.Pow}(y, 2)$ – відповідає функції $\rho^j(x, y) = x^2 + y^2$, $x, y \in E_1$;

- таблицю для введення функцій $c^j(x, \tau)$, $x \in E_2$, $\tau \in E_2$, $j = 1, \dots, M$; поведінка аналогічна до поведінки таблиці функцій $\rho^j(x)$; аргументи: x , y – координати точки, x_c , y_c – координати центра підмножини;

- перемикач, який вказує, чи потрібно розміщувати центри підмножин;

- таблицю для введення координат центрів підмножин (у випадку фіксованих центрів) або таблицю для введення початкових координат центрів підмножин (у випадку розміщення центрів);

- перемикач, який вказує, чи є задача лінійною;

- таблицю для введення значень вагових коефіцієнтів a_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ (у випадку лінійної задачі);

- таблицю для введення функцій $\varphi_i^j(x)$, $x \in E_1$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ (у випадку нелінійної задачі) (див. рис. 4.5); поведінка аналогічна до поведінки таблиці функцій $\rho^j(x)$; аргументи: x – величина Y_i^j ;

- таблицю для введення обмежень; центри нумеруються, починаючи з 1; значення у стовпчиках “Тип” та “Відношення” обираються з випадних списків;

- текстове поле для введення штрафного коефіцієнта S_1 ;

- текстове поле для введення штрафного коефіцієнта S_2 ;

- текстове поле для введення штрафного коефіцієнта за вихід центрів за межі області;

- текстове поле для введення штрафного коефіцієнта S_3 ;

- текстове поле для введення початкового кроку r -алгоритму;

- текстове поле для введення кількості кроків одновимірного спуску (підйому), після якої крок r -алгоритму необхідно збільшити;

- текстове поле для введення коефіцієнта зменшення кроку r -алгоритму у випадку, якщо умова зупинки одновимірного спуску (підйому) виконалася після першого ж кроку;
- текстове поле для введення коефіцієнта збільшення кроку r -алгоритму у випадку, якщо кількість кроків одновимірного спуску (підйому) перевищила встановлену величину;

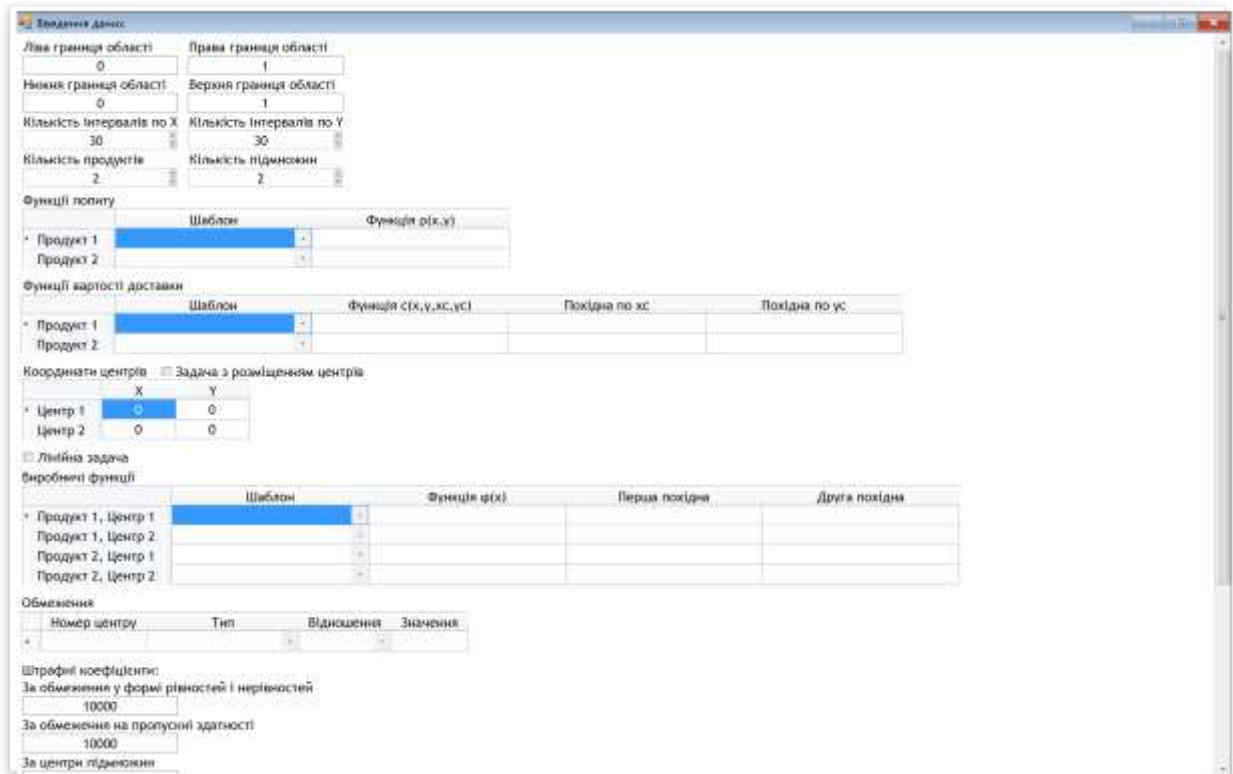


Рис. А.5 – Інтерфейс користувача для введення даних у випадку нелінійної задачі

- текстове поле для введення кількості кроків одновимірного спуску (підйому), після якої крок r -алгоритму необхідно збільшити;
- текстове поле для введення точності за змінними;
- текстове поле для введення точності за субградієнтом;
- текстове поле для введення коефіцієнта розтягу простору λ ;
- текстове поле для введення максимальної кількості ітерацій;
- кнопку «Готово», після натискання на яку введені параметри перевіряються на коректність; в разі некоректності параметрів користувачу буде запропоновано виправити некоректність; в разі коректності параметрів буде

розпочато процедуру пошуку розв'язку введеної задачі, по завершенні якої відкриється вікно з результатами.

- кнопку «Зберегти», після натискання на яку відкриється діалогове вікно зберігання файлу; у збереженому файлі міститимуться всі введені користувачем параметри задачі;

- кнопку «Завантажити», після натискання на яку відкриється діалогове вікно відкриття файлу; завантажені параметри автоматично будуть введені у відповідні поля.

Приклад збереженого файлу наведено на рис. А.6.

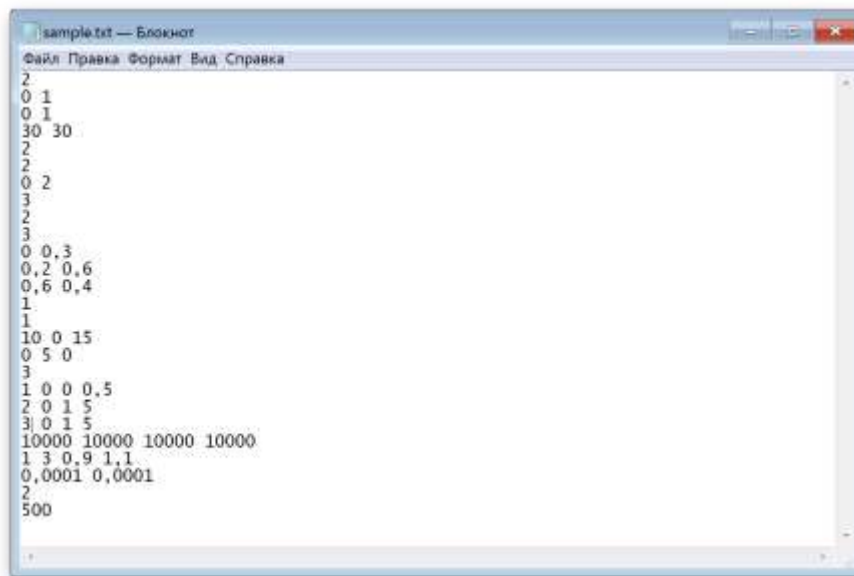


Рис. А.6 – Приклад збереженого файлу з параметрами задачі

Файл має наступну структуру:

- перший рядок – розмірність простору n ;
- n рядків по два числа у кожному – мінімальна і максимальна границя області за відповідним виміром;
- наступний рядок містить n чисел – кількості інтервалів сітки за кожним виміром;
- наступний рядок – кількість продуктів;
- M рядків, що описують функції $\rho^j(x)$: якщо була обрана одна з наперед заданих функцій, то рядок містить ідентифікатор цієї функції (натуральне число); якщо ж було обрано власну функцію, то рядок міститиме число 0, а через пробіл – формулу, введену користувачем;

- M рядків, що описують функції $c^j(x, \tau)$: якщо була обрана одна з наперед заданих функцій, то рядок містить ідентифікатор цієї функції (натуральне число); якщо ж було обрано власну функцію, то рядок міститиме число 0, формули функції та її похідних, розділені пробілами;
 - наступний рядок – кількість підмножин;
 - N рядків, в кожному з яких вказані координати відповідного центра τ_i через пробіл;
 - наступний рядок містить 0, якщо центри фіксовані, і 1, якщо оптимальні координати центрів потрібно відшукати;
 - наступний рядок містить 1, якщо задача лінійна, і 0, якщо задача нелінійна;
 - якщо задача лінійна, то далі йдуть M рядків по N чисел в кожному – коефіцієнти a_i^j ;
 - якщо задача нелінійна, то далі йдуть $M \cdot N$ рядків, що описують функції $\varphi_i^j(x)$: якщо була обрана одна з наперед заданих функцій, то рядок містить ідентифікатор цієї функції (натуральне число); якщо ж було обрано власну функцію, то рядок міститиме число 0, формули функції та двох її похідних, розділені пробілами;
 - наступний рядок – кількість обмежень у задачі T ;
 - T рядків по 4 числа у кожному – номер підмножини, ідентифікатор типу обмеження (0 – обмеження у формі рівностей та нерівностей, 1 – обмеження на пропускні здатності комунікацій), ідентифікатор відношення (0 – рівність, 1 – нерівність типу \leq), величина обмеження;
 - наступний рядок – 4 числа через пробіл – штрафні коефіцієнти;
 - наступний рядок – 4 числа через пробіл – початковий крок γ -алгоритму, кількість ітерацій для збільшення кроку, коефіцієнт зменшення кроку та коефіцієнт збільшення кроку;
 - наступний рядок – 2 числа через пробіл – точність за змінними та точність за субградієнтом;
 - наступний рядок – коефіцієнт розтягу простору λ ;
 - останній рядок – максимальна кількість ітерацій.
- Інтерфейс вікна результатів наведений на рис. А.7.

Додаток Б

ОПИС ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ
АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКИХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Програмне забезпечення розроблено за допомогою мови C# на платформі WPF та з використанням 3D движку Unity Engine. Для прискорення розрахунків використана технологія обчислень на графічному прискорювачі (GPGPU) за допомогою Compute Shaders мовою HLSL. Це виявилось можливим та вигідним з точки зору часу роботи алгоритму, оскільки алгоритм обчислення нечіткого розбиття потребує на кожній ітерації обчислювати значення функції $\mu(x)$ у всіх вузлах сітки, при цьому ці розрахунки не залежать один від одного, та можуть обчислюватись у будь-якому порядку, тобто ідеально підходять для паралельних обчислень. При цьому, оскільки задача нечіткого розбиття з фіксованими центрами є внутрішньою задачею для задачі нечіткого розбиття з розміщенням, тобто виконується на кожній ітерації, то прискорення її розрахунків є виправданим. Насправді, порівняно з розрахунками на процесорі, час роботи відрізняється у десятки разів, та дозволяє будувати зображення розбиттів майже у реальному часі. Для розрахунків на графічному прискорювачі, середовище має підтримувати Shader Model 5.

Програма складається з двох вікон. Перше вікно – з налаштуваннями. У ньому користувач задає налаштування простору та його підмножини, на якій буде виконуватись розбиття, налаштування нечіткого розбиття з фіксованими центрами підмножин, нечіткого розбиття з оптимальним розміщення центрів підмножин, налаштування градієнтного спуску.

Друге вікно – безпосередньо вікно, де виконується розбиття, виводиться зображення розбиття та оптимальні позиції центрів. Користувач має змогу

зберегти зображення розбиття, переглянути, які були результати роботи алгоритму на кожній з ітерацій, інтерактивно переглянути інформацію про центри підмножин на розбитті.

Налаштування алгоритму побудови нечіткого розбиття

Налаштування простору, на якому буде проводитись розбиття:

Введіть меншу границю за X: Введіть більшу границю за X: Введіть кількість сегментів за X:

Введіть меншу границю за Y: Введіть більшу границю за Y: Введіть кількість сегментів за Y:

Функція щільності (попиту) $p(x,y)$:

Функція вартості транспортування (метрика) $c(x,y, t)$:

Налаштування центрів (точок-генераторів):

Кількість центрів:

Задача із оптимальним розміщенням центрів

Координати центрів (точок-генераторів):

| Номер центру | Координата X | Координата Y | Аддитивний коефіцієнт a | Мультіплікативний коефіцієнт w | Фіксований центр? |
|--------------|--------------|--------------|---------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 3.33 | 3.33 | 0 | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 2 | 6.66 | 6.66 | 0 | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> |

Налаштування нечіткого розбиття з розміщенням центрів:

Кількість коефіцієнтів Гауса-Лежандра для рахування інтеграла:

Параметри τ -алгоритму:

Максимальна кількість ітерацій:

Початковий крок H_0 :

Коефіцієнт розтягу простору:

Налаштування нечіткого розбиття з закріпленими центрами:

Крок градієнтного спуску:

Мінімальне граничне значення градієнту для закінчення ітерацій:

Максимальна кількість ітерацій:

Рис Б.1 – Вікно налаштувань розбиття

Програма має можливість зберігати налаштування розбиття та змінювати мову інтерфейсу користувача, що робить її більш зручною та збільшує кількість потенціальних користувачів.

Додаток В. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Притоманова О.М. Применение методологии системного анализа к управлению банковскими проблемными кредитами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2015. С. 166-181.
2. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Оценка инвестиционной привлекательности стартапов на основе нейронечетких технологий. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 5. С. 123-143. [Scopus, IF=0.8]
3. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Об'єктно-орієнтований підхід до програмної реалізації алгоритму розв'язання деякого класу багатопродуктових задач оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2016. С. 128-143.
4. Притоманова О.М., Журавель С.В. Застосування r -алгоритму до оптимізації параметрів нечіткої моделі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 188-198.
5. Kiseleva E.M., Pritomanova O.M., Zhuravel S.V. Mathematical aspects of neuro-fuzzy technology application in project management. *European Cooperation – Scientific Approaches and Applied Technologies*. Warsaw (Poland). 2017. №12. P. 61-70.
6. Kazarian A., Blyuss O., Metodieva G., Gentry-Maharaj A., Ryan A., Kiseleva E., Prytomanova O. Testing breast cancer serum biomarkers for early detection and prognosis in pre-diagnosis samples. *British Journal of Cancer*, 2017. №116. С.501-508. [Scopus, IF=10]
7. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Алгоритм решения непрерывной задачи оптимального разбиения с нейролингвистической идентификацией функций, входящих в целевой функционал. *Проблемы управления и информатики*. 2018. №2. С. 15-32. [Scopus, IF=0.8]

8. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2018. Вип. 18. С. 85-98.
9. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An Algorithm to Construct Generalized Voronoi Diagrams with Fuzzy Parameters Based on the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies. *Modern Machine Learning Technologies and Data Science Workshop*. Proc. 1st International Workshop MoMLeT&DS 2019. Shatsk (Ukraine). 2019, CEUR-WS.org, online. P. 148-162. [Scopus]
10. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 106-116.
11. Притоманова О.М. Розв'язання задачі оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. *Вісник Львівського національного університету*. Серія прикладна математика та інформатика. 2019. Вип. 27. С. 97-107.
12. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. №1. С. 3-15. [Scopus, IF=1.4]
13. Blyuss O., Zaikin A., Cherepanova V., Munblit D., Kiseleva E., Prytomanova O., Duffy S., Crnogorac-Jurcevic T. Development of PancRISK, a urine biomarker-based risk score for stratified screening of pancreatic cancer patients. *British Journal of Cancer*, 2020, Vol. 122(6). P. 692–696. [Scopus, IF=10]

14. Kiseleva E., Prytomanova O., Zhuravel S. An algorithm for solving location-allocation problem with fuzzy parameters. *Scientific discussion*. – Praha (Czech Republic). 2020. Vol. 1, No 40. P. 11-18.
15. Kiseleva E.M., Hart L.L., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Construction of a generalized Voronoi diagram with optimal placement of generator points based on the theory of optimal set partitioning. *Matematychni Studii*. Vol. 53. №1. 2020. P. 109-112. [Scopus, IF=0.5]
16. Kiseleva E., Prytomanova O. An algorithm for solving fuzzy optimal partitioning of set problem with location of centers of the subsets. *Znanstvena misel journal*. Ljubljana (Slovenia). 2020. Vol. 1. No 40. P. 19-26.
17. Кісельова О.М., Притоманова О.М. Нечітка задача оптимального розбиття множин із обмеженнями на розміщення центрів підмножин. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2020. №1. С. 78-89.
18. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Padalko V.H. Application of the theory of optimal set partitioning before building multiplicatively weighted Voronoi diagram with fuzzy parameters. *Eurasian Science Journal*. 2020. No 2(71), Vol. 6. P. 30-35.
19. Киселева Е.М., Гарт Л.Л., Притоманова О.М. Алгоритм построения диаграмм Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов на основе теории оптимального разбиения множеств. *Проблемы управления и информатики*. 2020. №2. С. 5-15. [Scopus, IF=0.8]
20. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a Two-stage Continuous-discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with the Subsets Centers Placement. *Open Computer Science*. De Gruyter. 2020. Vol 10. P. 124-136. [Scopus, IF=1.4]

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

21. Притоманова О.М. Застосування інтелектуальних технологій у моделюванні економічних і фінансових процесів. I Міжнародна науково-методична конференція «*Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці*». Чернівці: ЧНУ. 2009. С.118-121.

22. Притоманова О.М., Білай О.С. Багаторівневі нечіткі системи аналізу ризиків проблемного кредиту. Матеріали IV міжнародної науково-практичної конференції *«Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем»*. Харків. 2013. С. 265-267.
23. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Примерение нейро-нечетких технологий для решения непрерывных задач оптимального разбиения при ограничениях с нечеткими параметрами. Тезисы докладов 5-й Международной конференции *«Космические технологии: настоящее и будущее»*. Днепропетровск, 2015. С. 59.
24. Киселева О.М., Притоманова О.М., Вороніна С.В. Нейронечіткі технології для розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з нечіткими параметрами. Збірка наукових праць за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції *«Наукові підсумки 2014 р. Фізико-математичні науки. Системний аналіз і теорія оптимальних рішень»*. К. 2015. С. 7-8.
25. Киселева О.М., Притоманова О.М., Нейронечіткі технології як перспективний підхід до представлення знань у системах штучного інтелекту. Матеріали п'ятої міжнародної науково-практичної конференції *«Наука и бизнес. Экономика знаний»*. Днепропетровск. 2015. С. 131-135.
26. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Применение методов недифференцируемой оптимизации для параметрической идентификации нечетких моделей. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції *«Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем»*. Дніпропетровськ: ДНУ. 2015. С. 92-93.
27. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Blyuss O.V. Neuro-fuzzy technologies in candidate biomarkers testing in breast cancer. Тези доповідей доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції *«Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем»*. Дніпропетровськ: ДНУ. 2015. С. 91.

28. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. О решении задачи «location-allocation» методами оптимального разбиения множеств. *Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 18-ї міжнародної науково-практичної конференції SAIT 2016*. К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ». 2016. С. 94-95.
29. Киселева О.М., Притоманова О.М. К решению непрерывных задач оптимального разбиения множеств с нечеткими параметрами. Материалы 5-й Международной конференции «*Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*» Том II, Кишинэу. 2016. С. 188-193.
30. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Использование нейронечетких технологий при управлении проектами по методу РМВОК РМІ. Тези доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 85-86.
31. Киселева О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В. Сравнение двух подходов к решению нелинейных задач оптимального размещения-разбиения. Тези доповідей доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 87.
32. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Умови існування розв'язку багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з додатковими обмеженнями. Тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпропетровськ: ДНУ. 2016. С. 89-90.
33. Притоманова О.М., Селіщев В.В. Застосування модифікованого принципу узагальнення Заде до задач аналітико-лінгвістичної апроксимації. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2017. С. 156-157.

34. Притоманова О.М., Шаравара В.В. Алгоритм розв'язання задачі оптимального розбиття множин з додатковими центрами доставки. Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2017. С. 159-160.
35. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про оптимізацію параметрів нейронечіткої моделі експортних відносин між Україною та Китаєм. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали 20-ї науково-технічної конференції SAIT 2018. К.:ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ». 2018. С. 68.
36. Кіселева О.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В. Оптимізація параметрів нечіткої моделі Мамдані із використанням r -алгоритму Шора. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 102-103.
37. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L., Zhuravel S. A definition of the generalized Voronoi diagrams with the optimal placement of generatorpoints with the employment of the optimal set partitioning method. *Sixth International conference on Analitic Number Theory and Spatial Tessellations*. Kyiv. 2018. 4 p.
38. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Ус С.А., Матяш В.В. Про розв'язок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілення. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 99-101.
39. Притоманова О.М., Селищев В.Л., Кісельов М.Я. Порівняння ефективності традиційних алгоритмів побудови діаграм Вороного з методом оптимального розбиття множин. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції «*Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*». Дніпро: ДНУ. 2018. С. 179-181.

40. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O. On constructing generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. *«Problems of Decision Making under Uncertainties»*: Abstracts of XXXIII International Conference. Hurgada (Egypt). 2019. P. 50-51.
41. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Гринченко В.О., Сергєєв О.С. Про двоетапну неперервно-дискретну задачу розбиття-розподілення з розміщенням центрів у множинах простої структури. Міжнародний науковий симпозиум *«Інтелектуальні рішення»*. Матеріали ІХ міжнародної школи-семінару *«Теорія прийняття рішень»*. Ужгород. 2019. – С. 89-90.
42. Blyuss O., Zaikin A., Kiseleva E., Prytomanova O., Crnogorac-Jurcevic T. On the development of a urine biomarker-based risk score for the early detection of pancreatic cancer. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 26.
43. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про залежність розв'язку задачі оптимального розбиття множин від коефіцієнта негладкої штрафної функції. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 126-127.
44. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Сергєєв О.С. Про розв'язання багатокритеріальної задачі оптимального розбиття множин із відшукуванням координат центрів підмножин. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем*. Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Дніпро. 2019. С. 124-125.
45. Притоманова О.М. Про одну неперервну задачу оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях. Матеріали міжнародної

наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» - АРАМС-2019. Львів. 2019. С 147-150.

46. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Падалко В.Г. Про алгоритм побудови адитивної і мультиплікативної діаграм Вороного в умовах невизначеності. *Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту – ISDMCI'2020*: матеріали міжнар. наук. конф. Херсон. 2020. С. 71.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації:

47. Притоманова О.М., Білай О.С. Нейронечітка модель оцінки рівня проблемності кредиту. *Нейро-нечіткі технології моделювання в економіці*. 2013. №2. С. 135-160.
48. Притоманова О.М., Булавка О.С. Засоби візуалізації у програмній реалізації алгоритму оптимального розбиття множин. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2016. С. 120-127.
49. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В., Журавель С.В. Объектно-ориентированный подход к программной реализации алгоритма решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 87-95.
50. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Журавель С.В., Шаравара В.В. Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2018. Вип. 18. С. 99-109.
51. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Побудова мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 117-126.