НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

ЖУРАВЛЬОВА ЗІНАЇДА ЮРІЇВНА

УДК 539.3

ТРИВИМІРНІ КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНИХ СТРУКТУР З ПЛОСКИМИ ТА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 2026

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Говоруха Володимир Борисович,
Дніпровський державний аграрно-економічний університет,
завідувач кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Матус Валерій Володимирович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України,
завідувач відділу обчислювальної механіки деформівних систем

доктор фізико-математичних наук, професор
Піскозуб Йосиф Збігнєвич,
Інститут прикладної математики і фундаментальних наук Національного Університету "Львівська політехніка",
професор кафедри прикладної математики

Захист відбудеться «19» червня 2026 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д35.195.01 у Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б та на Інтернет сторінці ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України http://iapmm.lviv.ua/zakhyst.html.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01,
д.ф.–м.н., с.н.с. Богдан ДРОБЕНКО

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поропружні середовища є поширеним класом матеріалів, що поєднують властивості пружних твердих тіл і пористих структур, насичених рідиною, та відіграють важливу роль у природних і техногенних процесах. Їх механічна поведінка визначає перебіг багатьох явищ у геомеханіці, енергетиці, матеріалознавстві та біомеханіці, що зумовлює підвищений інтерес до побудови адекватних математичних моделей напружено-деформованого стану таких середовищ. Особливої складності набувають задачі для багатошарових поропружних структур і конструкцій з тонкими прошарками, де виникають істотні градієнти полів напружень і флюїдного тиску.

Незважаючи на широке застосування числових методів аналізу, отримання надійних результатів у крайових задачах поропружності залишається проблематичним в областях з геометричними та фізичними неоднорідностями. У цих умовах аналітичні розв'язки мають принципове значення, оскільки дозволяють глибше дослідити фізичні механізми процесів і слугують базою для верифікації числових моделей. Водночас існуючі аналітичні підходи обмежуються переважно спрощеними постановками та не охоплюють широкого класу задач для тіл канонічної форми з урахуванням шаруватої структури.

У зв'язку з цим актуальною є наукова проблема розв'язання нового класу крайових задач теорії поропружності у декартовій та циліндричній системах координат, а також побудови умов сполучення для шаруватих поропружних структур з тонкими прошарками, що й визначає актуальність даного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних тем Одеського національного університету імені І.І. Мечникова «Статичні та динамічні задачі для тіл канонічної форми з дефектами» (2021-2024 рр., реєстраційний номер 0121U111664), «Динамічні та статичні задачі теорії пружності, поропружності та термопружності» (2025-2029 рр., реєстраційний номер 0125U002818), в рамках стипендії Кабінету Міністрів України для молодих вчених (постанова президії Комітету з державних премій України в галузі науки і техніки від 04 листопада 2022 р. №6).

Частину наукових результатів отримано під час реалізації міжнародного наукового проєкту Європейський проєкт, що фінансується у рамках програми з досліджень та інновацій «Horizon 2020» (H2020-MSCA-RISE-2020) Номер грантової угоди 101008140 EffectFact "Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications" (2022-2026 рр.).

Мета дисертаційної роботи полягає у розв'язанні наукової проблеми побудови та дослідження нового класу крайових задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями, за допомогою нового аналітичного методу.

Досягнення мети роботи передбачає:

- зведення вихідних задач поропружності до одновимірних крайових задач за допомогою застосування матричного методу інтегральних перетворень;
- розв’язання одновимірних векторних крайових задач поропружності методами матричного диференціального числення;
- розв’язання задач поропружності для шаруватих тіл;
- виведення умов сполучення шарів поропружного тіла за наявності тонких поропружних прошарків;
- визначення частот пікового амплітудного відгуку поропружних тіл;
- виконання числових розрахунків та побудови графіків зміни поропружного стану тіл.

Об’єкт дослідження: поропружні структури з плоскими та циліндричними поверхнями, у тому числі з тонкими прошарками.

Предмет дослідження: поля переміщень, напружень та порового тиску усередині та на межі поропружних структур з плоскими та циліндричними поверхнями.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано загальні положення теорії крайових задач математичної фізики. Для зведення вихідних крайових задач теорії поропружності до одновимірних крайових задач застосовано метод матричних інтегральних перетворень. Побудову загального векторного розв’язку одновимірних крайових задач у просторі трансформант здійснено із залученням апарату матричного диференціального числення. Для виведення умов сполучення в шаруватих поропружних тілах з тонкими поропружними прошарками використано асимптотичний метод, який дав змогу замінити міжфазну поверхню відповідними умовамінедосконалого контакту.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у:

- вирішенні проблеми розв’язання нових крайових задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями;
- розробці нового аналітичного методу основаного на узагальненні методів інтегральних перетворень та матричного диференціального числення, що дозволило отримати замкнуті аналітичні розв’язки крайових задач теорії поропружності;
- виведенні умов сполучення для шаруватих поропружних структур з тонкими поропружними прошарками шляхом заміни міжфазної поверхні специфічними умовами недосконалого контакту;
- визначенні частот пікового амплітудного відгуку для поропружних тіл під дією різного типу навантажень;
- дослідженні зміни напружень та інтенсивності порового тиску усередині та на межі поропружних структур в залежності від співвідношень геометричних параметрів, зміни поропружних матеріалів, типу та частоти прикладеного навантаження, врахування умов сполучення для шаруватих поропружних тіл з тонкими прошарками в залежності від порядків їх поропружних характеристик.

Достовірність основних наукових положень та отриманих результатів забезпечується: коректністю та строгістю математичних постановок задач теорії поропружності; використанням класичних апробованих математичних методів з теорії пружності; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач;

верифікацією шляхом порівняння з відомими у літературі розв'язками відповідних задач теорії пружності.

Практичне значення отриманих результатів полягає у забезпеченні ефективного моделювання напружено-деформованого стану поропружних середовищ в задачах геомеханіки, будівельної механіки, матеріалознавства, біомеханіки, енергетики та екологічної безпеки. Результати можуть бути використані для прогнозування напружень і деформацій у гірських породах і ґрунтах, аналізу стійкості багатошарових конструкцій, дослідження поведінки поропружних матеріалів і біологічних тканин, а також для оцінювання фільтраційно-деформаційних процесів у пористих середовищах.

Отримані аналітичні розв'язки слугують еталонними для верифікації числових методів та є основою для розвитку аналітико-числових гібридних підходів і розв'язання задач з ускладненими крайовими умовами. Практичне використання результатів сприяє підвищенню точності прогнозів і зменшенню обчислювальних витрат у прикладних інженерних і наукових дослідженнях.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались і обговорювались на: 7-ій міжнародній конференції «Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity» (Львів, 2026);V-VIII міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2019, 2021, 2023, 2025); «4th International Workshop on Plasticity, Damage and Fracture of Engineering Materials» (Стамбул, 2025); «International young scientists conference on material science and surface engineering» (Львів, 2023, 2025); «International conference of young mathematics» (Київ, 2023, 2025); конференції молодих учених «Підстригачівські читання 2025» (Львів, 2025); науково-практичній конференції «Mathematical modeling and experimental studies of civil and mechanical engineering problems» (Братислава, 2025); міжнародній науковій конференції «Механіка: сучасність і перспективи» (Київ, 2024); 11-ій міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024); X Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених «Інформаційні технології – 2023» (Київ, 2023); XI Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених «Інформаційні технології – 2024» (Київ, 2024); Всеукраїнській науково-практичній конференції «Співпраця науки, бізнесу та влади: розвиток євроінтеграційних ідей та професійної спільноти в Україні» (Одеса, 2023); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики 2023» (Львів, 2023); 5-ій міжнародній конференції «Optimization and Analysis of Structures»(Тарту, 2023); міжнародній міждисциплінарній науково-практичній конференції «Відкрита наука України: візійний дискус в умовах воєнного стану» (Ужгород, 2023); «Recent trends in wave mechanics and vibrations» (2023); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми термомеханіки 2021» (Львів, 2021); 16-ій міжнародній конференції "Dynamical Systems Theory and Applications" (2021); «4th International Conference on Numerical Modelling in Engineering» (Сингапур, 2021); «ECOMAS MSF 2019» (Сараєво, 2019); семінарі Cardiff University (Кардіфф, 2026); «3rd International Seminar on Modelling, Simulation and Machine Learning for the Rapid Development of Porous Materials» (Кіл, 2025); «Keele Applied Mathematics seminar» (Кіл, 2024);

семінарі King’s College London (Лондон, 2024); семінарі Aberystwyth University (Абериствїт, 2024).

У повному обсязі робота доповідалась на розширеному семінарі кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, об’єднаному науковому семінарі відділів механіки деформівного твердого тіла та обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України В. В. Михаськіва, загальноінститутському проблемному семінарі «Механіка взаємозв'язаних полів» Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом академіка НАН України Р. М. Кушніра, науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом члена-кореспондента НАН України Я. О. Жука, науковому семінарі кафедри теоретичної і комп’ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара під керівництвом д.ф.-м.н., професора В. В. Лободи.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертації опубліковані у 48 наукових роботах. Серед них 20 статей [1-5, 7, 8, 10-13, 15-22, 25] (в тому числі, 3 статті конференційного типу [16, 18, 22] та 3 розділи книг [8, 11, 15]) прорефероване у міжнародних наукометричних базах Scopus та Web of Science. Опубліковано також 5 статей [6, 9, 14, 23-24] у журналах і збірках, які відповідають вимогам ДАК України до фахових видань. З урахуванням квартильності видань відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank на рік опублікування (статті [2, 25] входять до квартилю Q1, [4, 5, 19, 20] – до квартилю Q2, [3, 7, 13, 17, 21] – до квартилю Q3, [1, 10, 12] – без квартилю) кількість наукових публікацій, що розкривають основний зміст дисертації, становить 36.

Основні результати роботи отримані автором самостійно. Праці [20-24, 31-37, 43-48] опубліковано без співавторів. У працях [3, 4, 6-19, 26-30, 39-42], опублікованих у співавторстві, здобувачу належить участь у постановці задач, аналітичне розв'язання та його числова реалізація, побудова графіків та участь в їхньому аналізі. У працях [1, 5, 38] автору належить аналітичне розв'язання та його числова реалізація, побудова графіків та участь в їхньому аналізі. У статтях [2, 25] автору належить участь у розв'язанні, числова реалізація, побудова графіків та участь в їхньому аналізі.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, які містять 163 рисунки та 20 таблиць, висновків, списку використаних джерел із 380 найменувань, 5 додатків. Загальний обсяг роботи становить 472 сторінки. Обсяг основного тексту – 303 сторінки.

Подяка. Автор висловлює глибоку подяку своєму першому вчителеві професору Г. Я. Попову, який сприяв виникненню його інтересу до математичних проблем механіки. Автор висловлює щиру вдячність д.ф.-м.н., проф. Вайсфельд Наталі Данилівні за цінні наукові поради та натхнення до наукових звершень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету та завдання дослідження; вказано методи розв'язання поставлених задач; висвітлено новизну і достовірність одержаних результатів, їх практичне значення; надано відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок в них здобувача.

У **першому розділі** проведено огляд наукових робіт за темою дослідження.

Зародження теорії поропружності відбулось у першій половині минулого сторіччя в роботах K. Terzaghi та M.A. Biot. З того часу задачі поропружності розглядались багатьма авторами, зокрема I. Abbas, Y. Abousleiman, Zh.Y. Ai, L. Auton, S.I. Barry, L. Bociu, E. Chaplya, A.H.-D. Cheng, S.C. Cowin, A. Eldeeb, H. Gohari, B. Gurevich, S. Jourine, M. Kachmaryk, F. Karpfinger, S. Keawsawasvong, N. Khomasuridze, J. Kubik, J.M. Kumar, H. Kümpel, Ch.W. MacMinn, G.N. Mercer, C. Nageswaranath, T. Nahirnyj, T. Senjuntichai, M. Serpilli, I. Sevostianov, S.A. Shah, M. Tajuddin, R. Talebitooti, K. Tchervinka, D.D. Theodorakopoulos, P.P. Valko, A. Verruijt, H. Wang тощо. Проаналізовано загальні підходи до розв’язання задач поропружності, що використовувались в їх роботах.

Також проведено аналіз методів розв’язання задач теорії пружності та термопружності, що використовувались у роботах О.Є. Андрейківа, В.Л. Богданова, Я.Й. Бурака, Н.Д. Вайсфельд, В.М. Вігака, О.Р. Гачкевича, В.Б. Говорухи, В.Т. Грінченка, О.Я. Григоренка, Я.М. Григоренка, Д.В. Гриліцького, О.М. Гузя, М.В. Дудика, Я.О. Жука, Б.М. Калиняка, В.Г. Карнаухова, Г.С. Кіта, А.Д. Коваленка, Ю.М. Коляна, О.Ф. Кривого, В.Д. Кубенка, Я.І. Кунця, Р.М. Кушніра, В.В. Лободи, О.В. Максимука, Р.М. Мартиняка, В.В. Матуса, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, В.М. Назаренка, Ю.М. Неміша, М.М. Николишина, О.Г. Ніколаєва, В.І. Острика, В.В. Панасюка, Я.М. Пастернака, Я.С. Підстригача, Й.З. Піскозуба, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, В.Л. Рвачова, Я.Я. Рущицького, М.П. Саврука, І.Т. Селєзова, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, Ю.В. Токового, А.Ф. Улітка, В.Ф. Чекуріна, М.В. Хая, Ю.М. Швайка, А.Є. Шевельової, М.О. Шульги, І.В. Янчевський, Є.Г. Янютіна, A.S. Alifov, R. Duduchava, A. Gupta, V.N. Hakobyan, J. Kaplunov, O. Menshykov, G. Mishuris, S. Mkhitaryan, W. Nowacki, D. Prikazchikov, J. Wiener тощо. Математичні засади, запропоновані в цих роботах, можуть знайти застосування при розв’язанні задач поропружності.

З аналізу літератури можна побачити відсутність системного підходу до розв’язання задач теорії поропружності, який би базувався на формулюванні їх шляхом використання апарату граничних задач.

У **другому розділі** викладено теоретичні засади, на яких базується розв’язання поставлених у роботі задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями.

У *підрозділі 2.1* сформульовано загальну постановку крайових задач теорії поропружності на прикладі тривимірного тіла у декартовій системі координат. Система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} (\lambda+G)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}+G\nabla^2 u_x-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial x}-f_x=0, \\ (\lambda+G)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y}+G\nabla^2 u_y-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial y}-f_y=0, \\ (\lambda+G)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z}+G\nabla^2 u_z-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial z}-f_z=0, \\ \alpha\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}+S_p\dfrac{\partial p}{\partial t}=\nabla\cdot(k\nabla p) \end{cases} \quad (1)$$

де $\varepsilon=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}$ – об'ємне розширення, u_x,u_y,u_z – переміщення твердого каркасу, $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, G – модуль зсуву, λ – стала Ламе, α – стала Біо, p – тиск рідини у порах (поровий тиск), k – коефіцієнт проникності, S_p – ємність простору пор.

Крайові умови на грані $x=0$ подано в одному з наступних виглядів:

- коли грань поропружного тіла є навантаженою $\sigma_x^F\big|_{x=0}=L(y,z),\tau_{xy}^F\big|_{x=0}=Y(y,z),$ $\tau_{xz}^F\big|_{x=0}=Z(y,z),p\big|_{x=0}=P(y,z)\Rightarrow\sigma_x\big|_{x=0}=L(y,z)-\alpha P(y,z),\tau_{xy}\big|_{x=0}=Y(y,z),\tau_{xz}\big|_{x=0}=Z(y,z),$ $p\big|_{x=0}=P(y,z)$;
- коли грань поропружного тіла не знаходиться в контакті ні з яким іншим тілом $\sigma_x\big|_{x=0}=0,\tau_{xy}\big|_{x=0}=0,\tau_{xz}\big|_{x=0}=0,p\big|_{x=0}=0$
- коли грань поропружного тіла знаходиться у контакті з іншим тілом, то виконаноабо умови зчеплення $u_x\big|_{x=0}=0,u_y\big|_{x=0}=0,u_z\big|_{x=0}=0$, або умови гладкого контакту $u_x\big|_{x=0}=0,\tau_{xy}\big|_{x=0}=0,\tau_{xz}\big|_{x=0}=0$;
- в залежності від проникності поверхні контакту розрізняють умовипроникності $p\big|_{x=0}=0$ та непроникності $\dfrac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$.

У *підрозділі 2.2* викладено аналітичний метод розв'язання крайових задач поропружності у декартовій та циліндричній системах координат на прикладі двох тривимірних об'єктів.

У *підрозділі 2.2.1* розглянуто тривимірний кубоїд($0<x<a,0<y<1,0<z<h$), поропружний стан якого описується рівняннями (1)та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &v\big|_{y=0,1}=0,\tau_{xy}\big|_{y=0,1}=0,\tau_{yz}\big|_{y=0,1}=0,\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{y=0,1}=0, \\ &w\big|_{z=0,h}=0,\tau_{xz}\big|_{z=0,h}=0,\tau_{yz}\big|_{z=0,h}=0,\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=0,h}=0, \\ &U_0[f]=\vec{g}_0(y,z),U_1[f]=\vec{g}_1(y,z) \end{aligned} \quad (2)$$

де $U_i[f],i=0,1$ це скорочений запис крайових умов по гранях $x=0,x=a$, $\vec{g}_0(y,z),\vec{g}_1(y,z)$ – задані вектори,

$f(x,y,z)=\left(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z),p(x,y,z)\right)^T$ – вектор переміщень та порового тиску.

Крайову задачу (1)-(2) зведено до одновимірної шляхом послідовного застосування двох sin-cos перетворень Фур'є за змінними *z* та *y*. Отриману одновимірну крайову задачу записано у векторному вигляді як

$$\begin{cases} L_2\vec{y}_{\gamma\beta}(x)=0, 0<x<a, \\ U_0\left[\vec{y}_{\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{0,\gamma\beta}, U_1\left[\vec{y}_{\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{1,\gamma\beta} \end{cases} \tag{3}$$

де L_2 – лінійний диференціальний оператор другого порядку, що діє за схемою $L_2\vec{y}_{\gamma\beta}(x)=I\vec{y}''_{\gamma\beta}(x)+Q_{\gamma\beta}\vec{y}'_{\gamma\beta}(x)+O_{\gamma\beta}\vec{y}_{\gamma\beta}(x)$, I – одинична матриця розмірності 4x4, $Q_{\gamma\beta}, O_{\gamma\beta}$ – відомі матриці розмірності 4x4, $\vec{y}_{\gamma\beta}(x)=\left(u_{\gamma\beta}(x),v_{\gamma\beta}(x),w_{\gamma\beta}(x),p_{\gamma\beta}(x)\right)^T$, $\vec{g}_{0,\gamma\beta}, \vec{g}_{1,\gamma\beta}$ – трансформанти векторів $\vec{g}_0(y,z), \vec{g}_1(y,z)$.

Розв'язок векторної крайової задачі (3) знайдено за допомогою апарату матричного диференціального числення, згідно з яким розглянуто відповідне матричне рівняння $L_2Y_{\gamma\beta}(x)=0, 0<x<a$. Виконано підстановку $Y_{\gamma\beta}(x)=e^{\xi x}I$ та отримано рівність $L_2e^{\xi x}I=M_{\gamma\beta}(\xi)e^{\xi x}$, де $M_{\gamma\beta}(\xi)=I\xi^2+Q_{\gamma\beta}\xi+O_{\gamma\beta}$. Розв'язок матричного рівняння знайдено за формулою $Y_{\gamma\beta}(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C e^{\xi x}M^{-1}_{\gamma\beta}(\xi)\,d\xi$, де замкнений контур *C* охоплює усі особливі точки оберненої матриці $M^{-1}_{\gamma\beta}(\xi)$. Розв'язок векторної крайової задачі (3) при $\beta\neq 0, \gamma\neq 0$ отримано у вигляді

$$\vec{y}_{\gamma\beta}(x)=\left(Y_{\gamma\beta,1}(x)+Y_{\gamma\beta,3}(x)\right)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}+\left(Y_{\gamma\beta,2}(x)+Y_{\gamma\beta,4}(x)\right)\begin{pmatrix}c_5\\c_6\\c_7\\c_8\end{pmatrix} \tag{4}$$

де $Y_{\gamma\beta,i}(x), i=\overline{1,4}$ - фундаментальна система матричних розв'язків, сталі c_i, $i=\overline{1,8}$ знайдено з крайових умов у (3).

Випадки $\beta\neq 0, \gamma=0$; $\beta=0, \gamma\neq 0$ та $\beta=0, \gamma=0$ розглянуто окремо аналогічно до загального випадку $\beta\neq 0, \gamma\neq 0$, так як у цих випадках розмірності фундаментальних матриць змінюються, і складають 3x3 та 2x2 відповідно.

Застосування формули обернення інтегрального перетворення до знайденого розв'язку у просторі трансформант (4) завершило побудову замкнутого аналітичного розв'язку вихідної задачі.

У *підрозділі 2.2.2* розглянуто півнескінченний клиновидний шар ($0<r<\infty, 0<\varphi<\theta, 0<z<h$), поропружний стан якого описується рівняннями (1) в циліндричній системі координат та наступними крайовими умовами

$$v\big|_{\varphi=0,\theta}=0,\tau_{\varphi z}\big|_{\varphi=0,\theta}=0,\tau_{\varphi r}\big|_{\varphi=0,\theta}=0,\frac{\partial p}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0,\theta}=0,$$
$$U_0[f]=\vec{g}_0(r,\varphi),U_1[f]=\vec{g}_1(r,\varphi) \tag{5}$$

Тут $U_i[f],i=0,1$ це скорочений запис крайових умов по гранях $z=0,z=h$, $f(r,\varphi,z)=\left(u(r,\varphi,z),v(r,\varphi,z),w(r,\varphi,z),p(r,\varphi,z)\right)^T$ – вектор переміщень та порового тиску, $\vec{g}_0(r,\varphi),\vec{g}_1(r,\varphi)$ – задані вектори.

Для зведення крайової задачі (5) до одновимірної було застосовано інтегральне sin-cos перетворення Фур'є за змінною φ, введено нові невідомі функції $W_{1,\gamma}(r,z)=u_\gamma(r,z)+v_\gamma(r,z),W_{2,\gamma}(r,z)=u_\gamma(r,z)-v_\gamma(r,z)$ та застовано півнескінченне інтегральне перетворення Ганкеля за змінною r. Одновимірну крайову задачу записано у векторному вигляді

$$\begin{cases}L_2\vec{y}_{\gamma\beta}(z)=0,0<z<h,\\ U_0\left[\vec{y}_{\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{0\gamma\beta},U_1\left[\vec{y}_{\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{1\gamma\beta}\end{cases} \tag{6}$$

Тут L_2 – лінійний диференціальний оператор другого порядку, $\vec{y}_{\gamma\beta}(z)=\left(W_{1\gamma\beta}(z),W_{2\gamma\beta}(z),w_{\gamma\beta}(z),p_{\gamma\beta}(z)\right)^T$, $\vec{g}_{0\gamma\beta},\vec{g}_{1\gamma\beta}$ – трансформанти відомих векторів.

Розв'язок задачі (6)знайдено з використанням апарату матричного диференціального числення у вигляді (4)при $\gamma\neq0$. Випадок $\gamma=0$ розглянуто окремо аналогічно до загального випадку $\gamma\neq0$, так як у цьому випадку розмірність фундаментальних матриць змінюється, і складає 3x3.

Застосування до знайденого розв'язку у просторі трансформант (4) формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля, перехід до трансформант переміщень $u_\gamma(r,z),v_\gamma(r,z)$ та застосування формули обернення інтегрального перетворення Фур'є дозволило виписати замкнутий аналітичний розв'язок вихідної задачі.

У *підрозділі 2.3.1* розглянуто тривимірний кубоїд ($0<x<a,0<y<1,0<z<h$), що складається з N шарів $a_{i-1}<x<a_i,i=\overline{1,N}$, причому $a_0=0,a_N=a$. Між шарами виконуються умови ідеального контакту.

Аналогічно до попередньої схеми, вихідну задачу було зведено до одновимірної векторної крайової задачі

$$\begin{cases}L_2\vec{y}_{l,\gamma\beta}(x)=0,a_{l-1}<x<a_l,\\ U_0\left[\vec{y}_{1,\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{0,\gamma\beta},U_1\left[\vec{y}_{N,\gamma\beta}\right]=\vec{g}_{1,\gamma\beta},\\ \vec{y}_{l,\gamma\beta}\big|_{x=a_l-0}=\vec{y}_{l+1,\gamma\beta}\big|_{x=a_l+0},\\ \left(S_{l,\gamma\beta}\vec{y}\,'_{l,\gamma\beta}+T_{l,\gamma\beta}\vec{y}_{l,\gamma\beta}\right)\big|_{x=a_l-0}=\left(S_{l+1,\gamma\beta}\vec{y}\,'_{l+1,\gamma\beta}+T_{l+1,\gamma\beta}\vec{y}_{l+1,\gamma\beta}\right)\big|_{x=a_l+0}\end{cases} \tag{7}$$

де $\vec{y}_{l,\gamma\beta}(x)=\left(u_{l,\gamma\beta}(x),v_{l,\gamma\beta}(x),w_{l,\gamma\beta}(x),p_{l,\gamma\beta}(x)\right)^T$, $S_{l,\gamma\beta},T_{l,\gamma\beta}$ – відомі матриці.

Загальний розв'язок крайової задачі (7) для кожного шару при $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ було побудовано у вигляді (4), де сталі $c_{l,i}, i = \overline{1,8}, l = \overline{1,N}$ потрібно знайти з крайових умов та умов сполучення. Для цього застосовано рекурентну схему, що пов'язує сталі шарів за допомогою матриць переходу $H_l(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon_l(x) \\ S_l \Upsilon'_l(x) + T_l \Upsilon_l(x) \end{pmatrix}$, де $\Upsilon_l(x) = \left(Y_{l,\gamma\beta,1}(x) + Y_{l,\gamma\beta,3}(x),\ Y_{l,\gamma\beta,2}(x) + Y_{l,\gamma\beta,4}(x)\right)$. Тоді, використовуючи загальний розв'язок (4), умови сполучення у (7) записано у матричному вигляді $H_l(a_l)\vec{C}_l = H_{l+1}(a_l)\vec{C}_{l+1}, l = \overline{1,N-1}$, звідки рекурентно виражено сталі кожного шару $\vec{C}_l$ через сталі першого шару $\vec{C}_1$: $\vec{C}_l = R_l\vec{C}_1 = H_l^{-1}(a_{l-1})H_{l-1}(a_{l-1})...H_2^{-1}(a_1)H_1(a_1)\vec{C}_1, l = \overline{2,N}$. Дані вирази підставлено у крайові умови (7)та отримано систему, звідки знайдено невідомі сталі $\vec{C}_l$.

У *підрозділі 2.3.2* розглянуто півнескінченний клиновидний шар ($0 < r < \infty, 0 < \varphi < \theta, 0 < z < h$), що складається з N шарів $h_{i-1} < z < h_i, i = \overline{1,N}$, причому $h_0 = 0, h_N = h$. Між шарами виконуються умови ідеального контакту. Розв'язок даної задачі побудовано за аналітичним методоманалогічно до попередніхзадач.

Підрозділ 2.4 присвячено виведенню умов сполучення між шарами за наявності тонкого поропружного прошарку між ними. Це виведення приведено на прикладі тривимірного кубоїда ($0 < x < a_*, 0 < y < 1, 0 < z < d$), що складається з трьох частин: $\Omega_- = \left\{0 < x < a - \frac{h_0}{2}, 0 < y < 1, 0 < z < d\right\}$, $\Omega_0 = \left\{a - \frac{h_0}{2} < x < a + \frac{h_0}{2}, 0 < y < 1, 0 < z < d\right\}$, $\Omega_+ = \left\{a + \frac{h_0}{2} < x < a_*, 0 < y < 1, 0 < z < d\right\}$, де $h_0 \ll a$. Між Ω_- та Ω_0, а також між Ω_+ та Ω_0 задано умови ідеального контакту.

Розв'язок задачі розшукувався у вигляді асимптотичних рядів

$$f^{\pm}(x,y,z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i^{\pm}(x,y,z),\ f^0(\xi,y,z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i^0(\xi,y,z),\ f \in \{u,v,w,p\}$$

Тут $\xi = \frac{x-a}{\varepsilon}$ - масштабована змінна. Функції переміщень та порового тиску шарів Ω_- та Ω_+ гладким чином продовжено на тонкий прошарок Ω_0.

Розглянуто різні випадки співвідношень між основними поропружними сталими прошарку, такими як модуль пружності G_0, коефіцієнт проникності k_0, ємність простору пор S_{p0}, та відповідними сталими основних шарів. Стала Мусхелішвілі κ_0 та коефіцієнт Біо α_0 змінюються у фіксованих проміжках, а саме $1 < \kappa_0 < 3, 0 < \alpha_0 \leq 1$, тому вони завжди будуть одного порядку з відповідними сталими основних шарів. Таким чином отримано 8 основних незалежних один від одного випадків:

1) Величини G_0, k_0, S_{p0} є величинами такого ж порядку, як і величини поропружних сталих основних шарів $G_\pm, k_\pm$. В даному випадку переміщення,

напруження, поровий тиск та нормальний потік неперервні при переході через прошарок;

2) При виконанні співвідношення $G_0 \ll G_\pm$ спостерігаються стрибки переміщень, всі інші функції є неперервними $u_0^+\Big|_{x=a+0} - u_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0 + 1}\sigma_{x,0}^-\Big|_{x=a-0}$,

$v_0^+\Big|_{x=a+0} - v_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xy,0}^-\Big|_{x=a-0}$, $w_0^+\Big|_{x=a+0} - w_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xz,0}^-\Big|_{x=a-0}$;

3) За умови $k_0 \ll k_\pm$ спостерігається стрибок порового тиску, всі інші функції є неперервними $p_0^+\Big|_{x=a+0} - p_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{k_0}k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\Big|_{x=a-0}$;

4) Для випадку $G_0 \gg G_\pm$ мають місце стрибки напружень, всі інші функції є неперервними $\sigma_{x,0}^+\Big|_{x=a+0} - \sigma_{x,0}^-\Big|_{x=a-0} = -G_0 h_0\left(\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial z^2}\right)\Big|_{x=a-0}$,

$$\tau_{xy,0}^+\Big|_{x=a+0} - \tau_{xy,0}^-\Big|_{x=a-0} = -G_0 h_0\left(\frac{\kappa_0+1}{\kappa_0-1}\frac{\partial^2 v_0^-}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0^-}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa_0-1}\frac{\partial^2 w_0^-}{\partial y \partial z}\right)\Big|_{x=a-0},$$

$$\tau_{xz,0}^+\Big|_{x=a+0} - \tau_{xz,0}^-\Big|_{x=a-0} = -G_0 h_0\left(\frac{\partial^2 w_0^-}{\partial y^2} + \frac{\kappa_0+1}{\kappa_0-1}\frac{\partial^2 w_0^-}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa_0-1}\frac{\partial^2 v_0^-}{\partial y \partial z}\right)\Big|_{x=a-0};$$

5) За умови $k_0 \gg k_\pm$ спостерігається стрибок нормального потоку, всі інші функції є неперервними $k_+\frac{\partial p_0^+}{\partial x}\Big|_{x=a+0} - k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\Big|_{x=a-0} = -k_0 h_0\left(\frac{\partial^2 p_0^-}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_0^-}{\partial z^2}\right)\Big|_{x=a-0}$;

6) При виконанні співвідношення $s_{p0} \gg s_{p\pm}$ має місце стрибок нормального потоку, всі інші функції є неперервними $k_+\frac{\partial p_0^+}{\partial x}\Big|_{x=a+0} - k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\Big|_{x=a-0} = h_0 S_{p0}\, p_0^-\Big|_{x=a-0}$;

7) За умов $G_0 \ll G_\pm, k_0 \ll k_\pm$ спостерігаються стрибки переміщень, нормального напруження, тиску рідини у порах та нормального потоку, дотичні напруження є неперервними

$$u_0^+\Big|_{x=a+0} - u_0^-\Big|_{x=a-0} = \left[\sigma_{x,0}^-\frac{(\kappa_0-1)\sinh(\alpha_0 Wh)}{\alpha_0 G(\kappa_0+1)W} + k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\frac{2\sinh^2\left(\frac{\alpha_0 Wh}{2}\right)}{\alpha_0 s}\right]\Big|_{x=a-0},$$

$$v_0^+\Big|_{x=a+0} - v_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xy,0}^-\Big|_{x=a-0}, \quad w_0^+\Big|_{x=a+0} - w_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xz,0}^-\Big|_{x=a-0},$$

$$p_0^+\Big|_{x=a+0} - p_0^-\Big|_{x=a-0} = \left[\sigma_{x,0}^-\frac{2\sinh^2\left(\frac{\alpha_0 Wh}{2}\right)}{\alpha_0} + k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\frac{\sinh(\alpha_0 Wh)}{\alpha_0 kW}\right]\Big|_{x=a-0},$$

$$\sigma_{x,0}^+\Big|_{x=a+0} - \sigma_{x,0}^-\Big|_{x=a-0} = \left[\sigma_{x,0}^- 2\sinh^2\left(\frac{\alpha_0 Wh}{2}\right) + k_-\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\frac{G_0\sinh(\alpha_0 Wh)}{k_0 GW}\right]\Big|_{x=a-0},$$

$$k_+ \left.\frac{\partial p_0^+}{\partial x}\right|_{x=a+0} - k_- \left.\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\right|_{x=a-0} = \left[\sigma_{x,0}^- \frac{k_0 s(\kappa_0 - 1)\sinh(\alpha_0 Wh)}{G_0 k(\kappa_0 + 1)W} + k_- \frac{\partial p_0^-}{\partial x} 2\sinh^2\left(\frac{\alpha_0 Wh}{2}\right)\right]\Bigg|_{x=a-0};$$

7*) Спостерігаються стрибки переміщень та порового тиску, коли $G_0 \ll G_\pm, k_0 \ll k_\pm, \alpha_0 \ll \alpha_\pm$, всі інші функції є неперервними (цей випадок можна отримати в результаті граничного переходу при $\alpha_0 \to 0$ з попереднього випадку)

$$\lim_{\alpha_0 \to 0}\left[u_0^+\Big|_{x=a+0} - u_0^-\Big|_{x=a-0}\right] = \frac{h_0(\kappa_0 - 1)}{G_0(\kappa_0 + 1)}\sigma_{x,0}^-\Big|_{x=a-0}, \lim_{\alpha_0 \to 0}\left[p_0^+\Big|_{x=a+0} - p_0^-\Big|_{x=a-0}\right] = \frac{h_0}{k_0}k_- \left.\frac{\partial p_0^-}{\partial x}\right|_{x=a-0};$$

8) Для випадку $G_0 \ll G_\pm, k_0 \ll k_\pm, S_{p0} \gg S_{p\pm}$ мають місце стрибки переміщень, всі інші функції є неперервними $v_0^+\Big|_{x=a+0} - v_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xy,0}^-\Big|_{x=a-0}$,

$u_0^+\Big|_{x=a+0} - u_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\frac{S_p(\kappa_0 - 1)}{\kappa_0 + 1}\sigma_{x,0}^-\Big|_{x=a-0}, w_0^+\Big|_{x=a+0} - w_0^-\Big|_{x=a-0} = \frac{h_0}{G_0}\tau_{xz,0}^-\Big|_{x=a-0}$.

Теоретичні засади, які доведено та описано у другому розділі, застосовано для подальшого дослідження складених поропружних структур.

У подальших розділах розглянуто поропружні тіла з двома випадкамипроникності зчепленої грані. Чорними лініями на всіх графіках позначено величини, що відповідають проникній грані, а сірими – непроникній грані. Використовувалась частота ω=1, на рисунках подано абсолютні значення нормального напруження та порового тиску. Матеріалом одношарових об'єктів за замовчуванням слугував Рурський пісковик (Таблиця 1).

Таблиця 1

Поропружні характеристики матеріалів

Матеріал	$G, Н/м^2$	μ	α	$k, м^4/Н \cdot с$	$S_p, м^2/Н$
Пісковик Береа (Berea sandstone)	$6\cdot10^9$	0.2	0.778	$1.9\cdot10^{-10}$	$1.387\cdot10^{-10}$
Бойський пісковик (Boise sandstone)	$4.2\cdot10^9$	0.15	0.853	$4.9\cdot10^{-10}$	$2.789\cdot10^{-10}$
Огайський пісковик (Ohio sandstone)	$6.8\cdot10^9$	0.181	0.729	$5.6\cdot10^{-12}$	$1.414\cdot10^{-10}$
Рурський пісковик (Ruhr sandstone)	$1.33\cdot10^{10}$	0.12	0.637	$2\cdot10^{-13}$	$2.604\cdot10^{-11}$
Вестерлійський граніт (Westerly granite)	$1.5\cdot10^{10}$	0.25	0.449	$4\cdot10^{-16}$	$1.412\cdot10^{-11}$

У **третьому розділі** розглянуто поропружні задачі для скінченного та півнескінченного кубоїда за умови виконання різних граничних умов та різних типів навантаження.

В задачі для скінченного кубоїда (*підрозділ 3.1*) деталізовано крайові умови на гранях $x=0$ та $x=a$. На грань $x=0$ діє навантаження $\sigma_x\big|_{x=0} = -L(y,z) - \alpha P(y,z), \tau_{xy}\big|_{x=0} = Y(y,z), \tau_{xz}\big|_{x=0} = Z(y,z), p\big|_{x=0} = P(y,z)$. Бічна грань

$x = a$ знаходиться в умовах зчеплення із зовнішнім середовищем $u\big|_{x=a} = 0, v\big|_{x=a} = 0, w\big|_{x=a} = 0,$ та вона може розглядатись як проникна $p\big|_{x=a} = 0$ або непроникна $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$.

Числові дослідження проведено для трьох типів навантаження: сконцентроване нормальне механічне навантаження $L(y,z) = \delta(y - 1/2, z - h/2), Y(y,z) = 0, Z(y,z) = 0, P(y,z) = 0$, де $\delta(y,z)$ – це двовимірна дельта-функція Дірака; розподілене нормальне механічне навантаження $L(y,z) = \exp\left(-\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - h/2}{h}\right)^2\right), Y(y,z) = 0, Z(y,z) = 0,\ P(y,z) = 0$; розподілене навантаження тиском $L(y,z) = 0, Y(y,z) = 0, Z(y,z) = 0, P(y,z) = 1$.За замовчуванням розглядався поропружний кубоїд з довжинами граней a=1, h=1.

На Рис. 1 видно, що більшому значенню довжини ребра h відповідають більші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску.

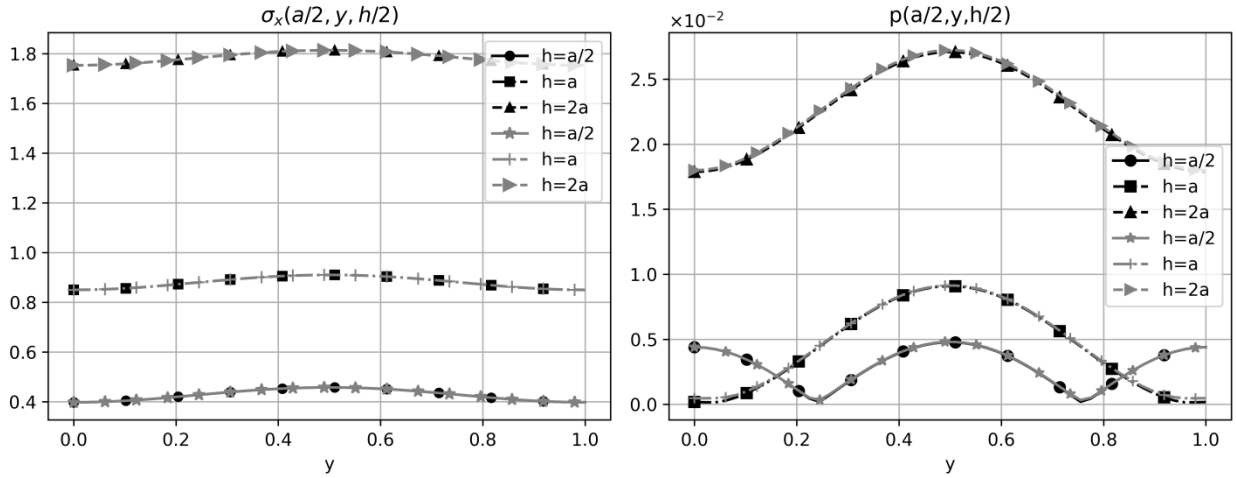

Рис. 1 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні довжини грані кубоїда для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження (Рис. 2) матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик) відповідають більші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску.

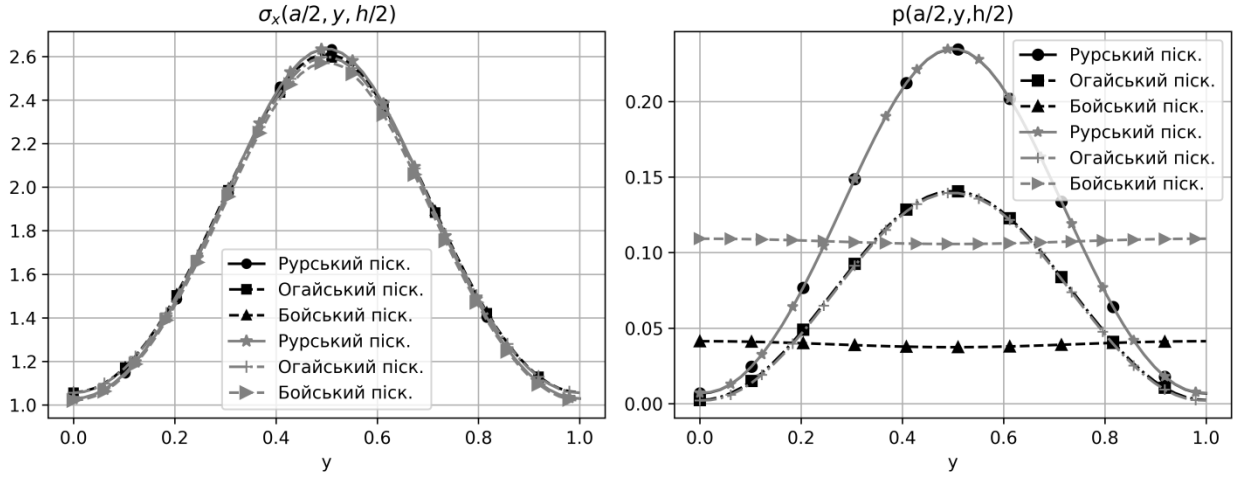

Рис. 2 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу кубоїда для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

Матеріалу з найбільшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) відповідають найменші абсолютні значення нормального напруження та найбільші абсолютні значення порового тиску для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження (Рис. 3).

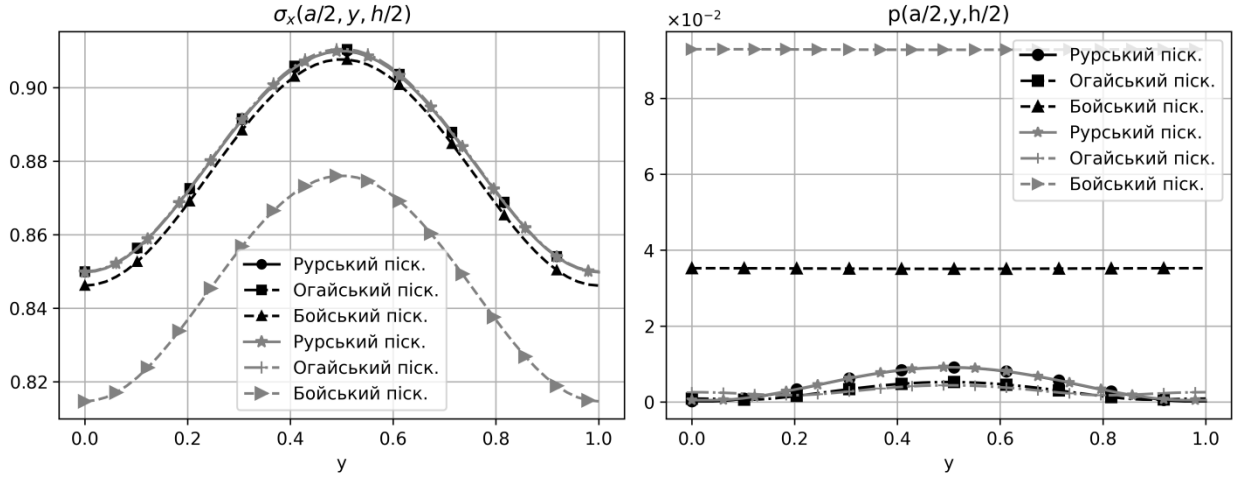

Рис. 3 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу кубоїда для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Як видно на Рис. 4, для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском найбільші абсолютні значення нормального напруження відповідають матеріалу з найбільшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик), а найбільші абсолютні значення порового тиску – матеріалу з найменшим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик).

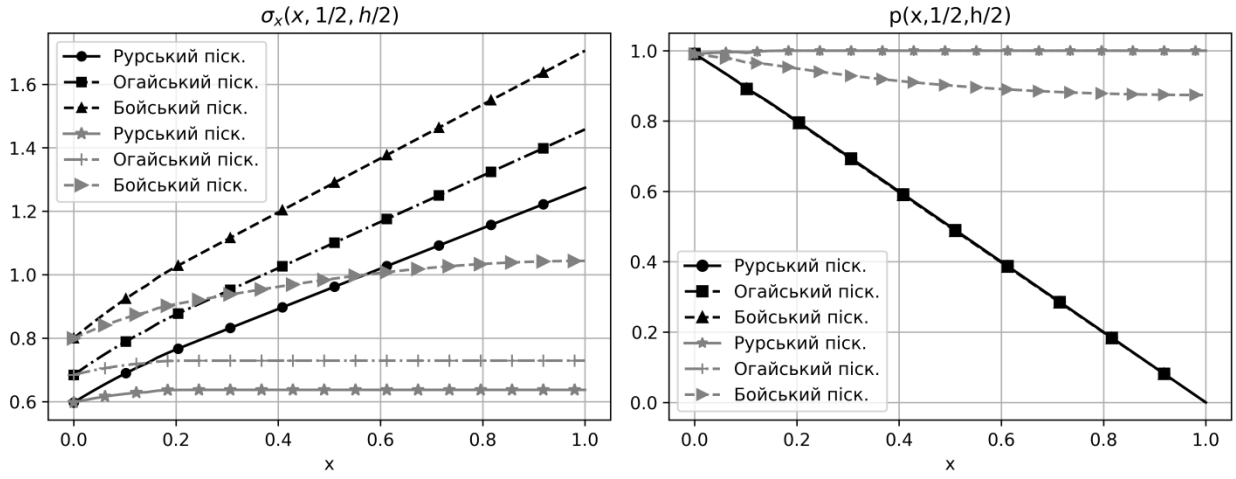

Рис. 4 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу кубоїда для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском

На навантаженій грані x=0 на проміжку [0; 20] розшукувались частоти пікового амплітудного відгуку для трьох розглянутих поропружних матеріалів, трьох навантажень та двох випадків проникності грані $x=a$ (Таблиця 2).

Таблиця 2

Частоти пікового амплітудного відгуку на навантаженій грані x=0

Випадок проникної грані $x = a$			Випадок непроникної грані $x = a$		
$L(y,z) = \delta\left(y-\frac{1}{2}, z-\frac{h}{2}\right)$	$L(y,z) = \exp\left(-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)$	$P(y,z) = \left(\frac{z-h/2}{h}\right)^2$	$L(y,z) = \delta\left(y-\frac{1}{2}, z-\frac{h}{2}\right)$	$L(y,z) = \exp\left(-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)$	$P(y,z) = \left(\frac{z-h/2}{h}\right)^2$
Рурський пісковик					
0	0	0	0	0	0
9.66	1.26	0.87	4.76	1.24	12.68
Огайський пісковик					
0	0	0	0	0	0
8.16		19.57	7.86		0.02
Бойський пісковик					
0	0	0	0	0	0
4.0	11.1		8.63	11.84	12.97

Для всіх матеріалів та розглянутих прикладених навантажень мають місце нульові частоти пікового амплітудного відгуку. Для матеріалів Рурський пісковик та Огайський пісковик з меншими значеннями коефіцієнта Біо для випадків прикладення механічних навантажень менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку відповідають випадку непроникної грані $x=a$, для випадку прикладення навантаження тиском – навпаки, випадку проникної грані $x=a$. Для матеріалу Бойський пісковик з більшим значенням коефіцієнта Біо для випадків прикладення механічних навантажень менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку відповідають випадку проникної грані $x=a$. В середньому менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку відповідають матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо Рурський пісковик.

Задачу узагальнено на випадок півнескінченного кубоїда (*підрозділ 3.2*), а як частинний випадок розглянуто прямокутну область (*підрозділ 3.3*). Дані об'єкти продемонстрували аналогічні тенденції, що і скінчений кубоїд. Півнескінченний кубоїд показав менші абсолютні значення нормального напруження та більші абсолютні значення порового тиску для випадків прикладення механічного навантаження, а для випадку прикладення навантаження тиском – навпаки. Для прямокутної області порівняно зі скінченим кубоїдом абсолютні значення нормального напруження є меншими для всіх розглянутих видів прикладеного навантаження, а абсолютні значення порового тиску – навпаки, є більшими.

Тіла циліндричної форми у вигляді порожнистого та суцільного циліндрів розглянуто у **четвертому розділі** за умови навантаження по торцю або по циліндричній поверхні.

Для порожнистого циліндра, що навантажений по торцю (*підрозділ 4.1*), циліндричні грані якого знаходяться в умовах гладкого контакту та є непроникними $u\big|_{r=b,1}=0, \tau_{rz}\big|_{r=b,1}=0, \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=b,1}=0$, сформульовано крайову задачу.Вважається, що верхній торець навантажено $\sigma_z\big|_{z=0}=-L(r)-\alpha P(r), \tau_{rz}\big|_{z=0}=T(r), p\big|_{z=0}=P(r)$, а нижній торець знаходиться в умовах зчеплення $u\big|_{z=h}=0, w\big|_{z=h}=0$ та може розглядатись як проникний $p\big|_{z=h}=0$ чи непроникний $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=h}=0$. Вихідну задачу зведено до одновимірної шляхом застосування скінченного перетворення Ганкеля за змінною r за наступною схемою

$$\begin{bmatrix} u_\beta(z) \\ w_\beta(z) \\ p_\beta(z) \end{bmatrix} = \int_b^1 \begin{bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \\ p(r,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \end{bmatrix} r dr$$

де $X_i(r,\beta)=J_i(\beta r)N_1(\beta)-N_i(\beta r)J_1(\beta), i=0,1$, $\beta_0=0, \beta_k>0, k=1,2,\ldots$ – додатні корені рівняння $X_1(b,\beta)=J_1(\beta b)N_1(\beta)-N_1(\beta b)J_1(\beta)=0$, $J_0(r), J_1(r)$ – функції Бесселя, $N_0(r), N_1(r)$ – функції Неймана.

Отриману одновимірну векторну крайову задачу у просторі трансформант розв'язано звикористанням апарату матричного диференціального числення за схемою, наведеною у розділі 2.

Числові дослідження проведено для трьох типів навантаження: сконцентроване нормальне механічне навантаження $L(r)=\delta\left(r-\frac{b+1}{2}\right), T(r)=0, P(r)=0$; розподілене нормальне механічне навантаження $L(r)=\cos\left(\frac{\pi(r-b)}{2(1-b)}\right), T(r)=0, P(r)=0$; розподілене навантаження

тиском $L(r)=0, T(r)=0, P(r)=1$. За замовчуванням розглядався поропружний порожнистий циліндр з внутрішнім радіусом b=0.5 та висотою h=1.

На Рис. 5-Рис. 6 видно, що менш високому циліндру з більшим внутрішнім радіусом відповідають більші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску.

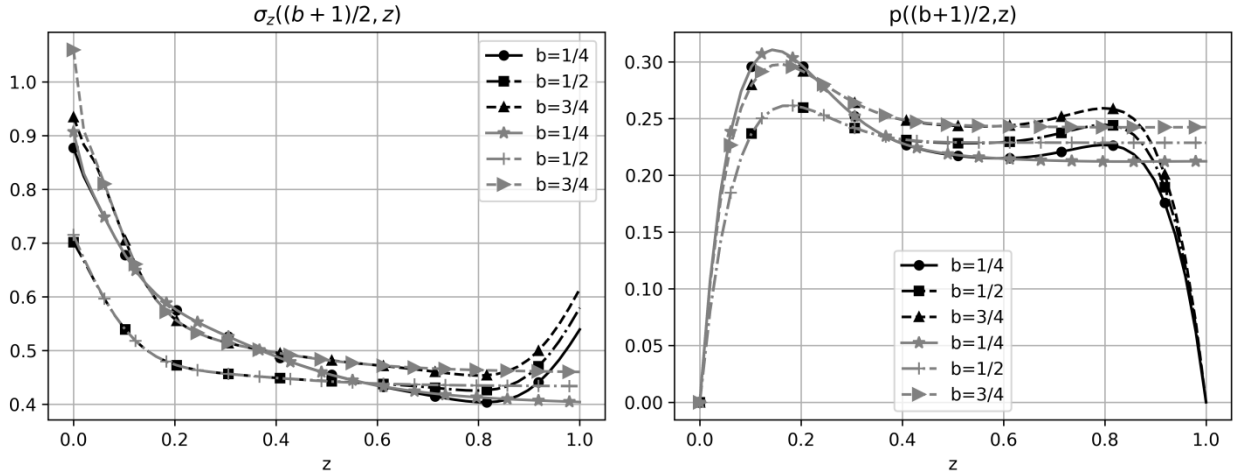

Рис. 5 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні внутрішнього радіусу циліндра для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

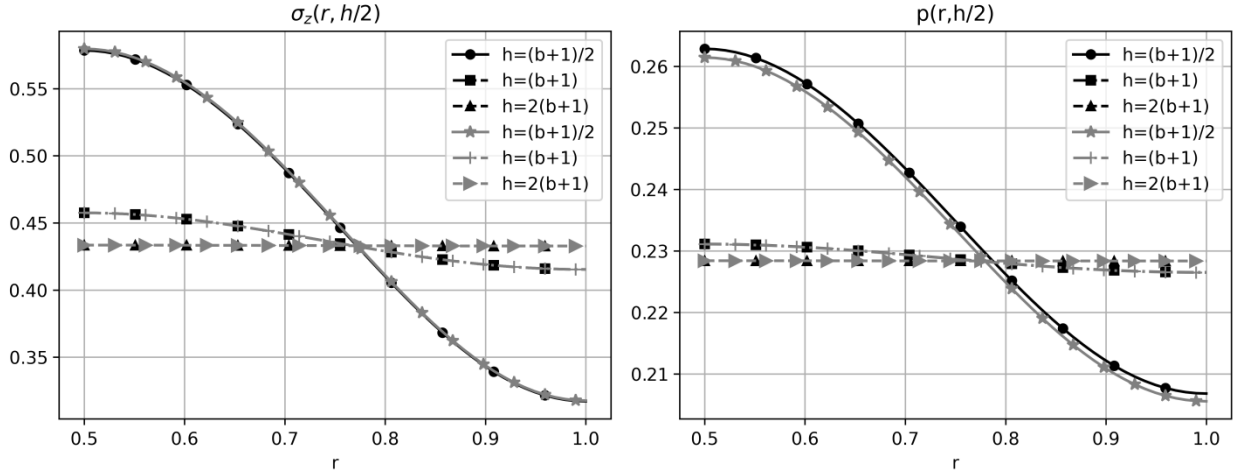

Рис. 6 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні висоти циліндра для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Для випадків прикладення механічного навантаження (Рис. 7-Рис. 8) найменші абсолютні значення нормального напруження біля зовнішньої циліндричної грані та найбільші абсолютні значення нормального напруження біля внутрішньої циліндричної грані спостерігаються для матеріалу з найменшим значенням коефіцієнта Біо (Вестерлійський граніт), а найменші абсолютні значення порового тиску для всіх значень радіусу – для матеріалу з найбільшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик).

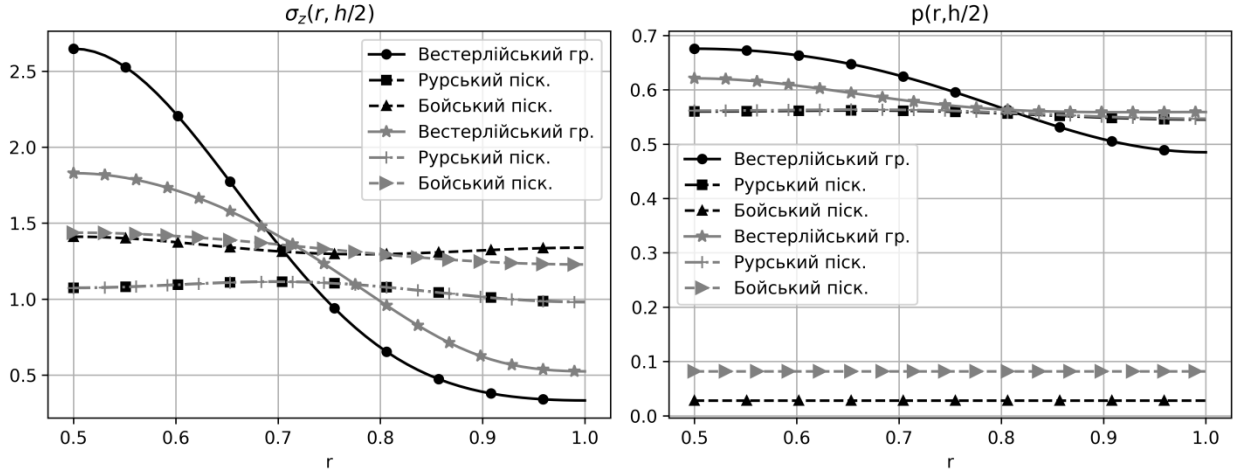

Рис. 7 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

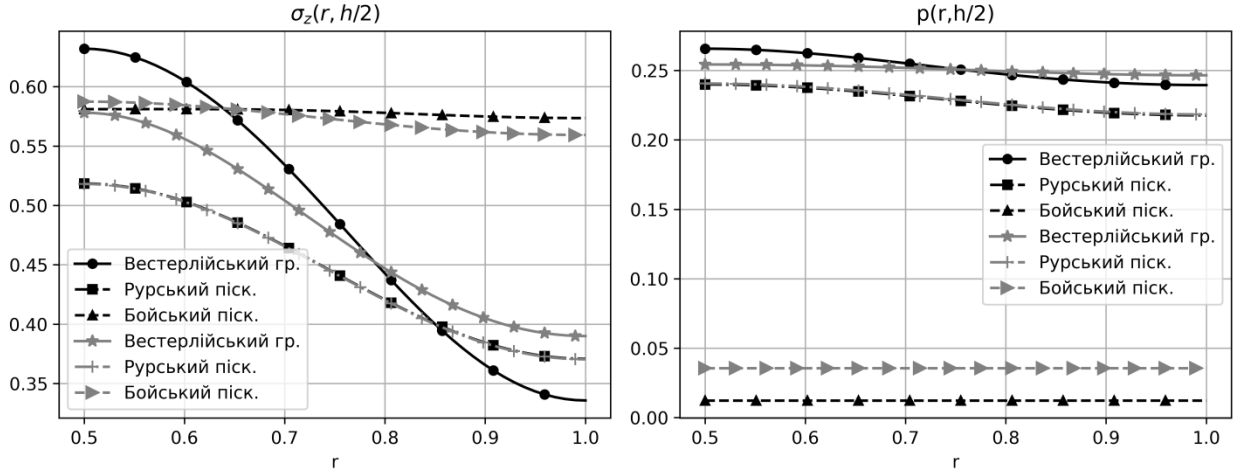

Рис. 8 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

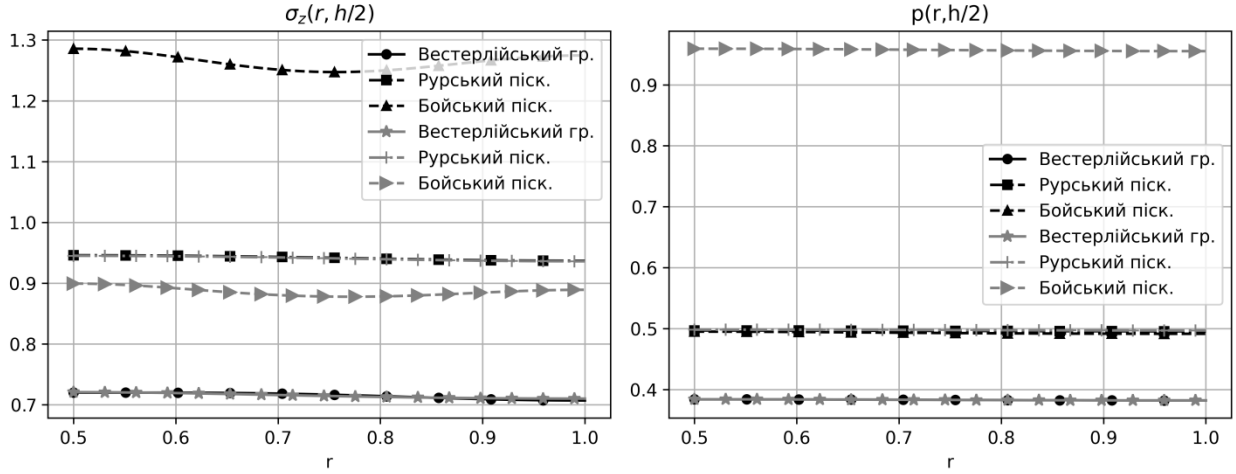

Рис. 9 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском

Для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском (Рис. 9) найбільші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску відповідають матеріалу з найбільшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) на відміну від попередніх випадків.

Таблиця 3

Частоти пікового амплітудного відгуку на навантаженому торці z=0

Випадок проникного торця $z = h$			Випадок непроникного торця $z = h$		
$L(r) = \delta\left(r - \frac{b+1}{2}\right)$	$L(r) = \cos\left(\frac{\pi(r-b)}{2(1-b)}\right)$	$P(r) = 1$	$L(r) = \delta\left(r - \frac{b+1}{2}\right)$	$L(r) = \cos\left(\frac{\pi(r-b)}{2(1-b)}\right)$	$P(r) = 1$
Вестерлійський граніт					
0.18	0.19	0.11	0.11	0.11	0.24
0.2	0.21	0.52	0.14	0.51	0.32
Рурський пісковик					
[0.01; 0.09]	0.11	0.02	0.1	0.12	0.11
0.11	0.31	0.1	0.13	0.27	0.22
Бойський пісковик					
[0.01; 0.02]	0.07	0.03	0.03	0.11	0.07
[0.04; 0.05]	0.1	0.05	0.05	0.22	0.09

Як видно у Таблиці 3, перші частоти пікового амплітудного відгуку менші для випадку проникного торця $z=h$ для більшості випадків. Для більшості випадків сконцентроване нормальне механічне навантаження демонструє менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку, а розподілене нормальне механічне навантаження – більші. Найменші значення перших частот пікового амплітудного відгуку спостерігаються для матеріалу з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик), а найбільші – в середньому для матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо (Вестерлійський граніт).

Для порожнистого циліндра, що навантажений по циліндричній поверхні (*підрозділ 4.3*), торці знаходяться в умовах гладкого контакту та є непроникними $w\big|_{z=0,h} = 0, \tau_{rz}\big|_{z=0,h} = 0, \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0,h} = 0$,внутрішню циліндричну поверхню навантажено $\sigma_r\big|_{r=a} = -L(z) - \alpha P(z), \tau_{rz}\big|_{r=a} = T(z), p\big|_{r=a} = P(z)$, зовнішня циліндрична поверхня знаходиться в умовах зчеплення $u\big|_{r=1} = 0, w\big|_{r=1} = 0$ та може розглядатись як проникна $p\big|_{r=1} = 0$ чи непроникна $\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$.Вихідну задачу зведено до одновимірної шляхом застосування скінченного sin-cos перетворення Фур'є за змінною z.Отриману одновимірну векторну крайову задачу у просторі трансформант розв'язано з використанням апарату матричного диференціального числення, що викладено у розділі 2.

Числові дослідження проведено для трьох типів навантаження: сконцентроване нормальне механічне навантаження

$L(z)=\delta(z-h/2), T(z)=0, P(z)=0$; розподілене нормальне механічне навантаження $L(z)=\sin(\pi z/h), T(z)=0, P(z)=0$; розподілене навантаження тиском $L(z)=0, T(z)=0, P(z)=1$. За замовчуванням розглядався поропружний порожнистий циліндр висотою h=1 та внутрішнім радіусом a=0.5.

Більше значення внутрішнього радіусу відповідає більшим абсолютним значенням нормального напруження та меншим абсолютним значенням порового тиску (Рис. 10). Більші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску відповідають більш високому циліндру (Рис. 11).

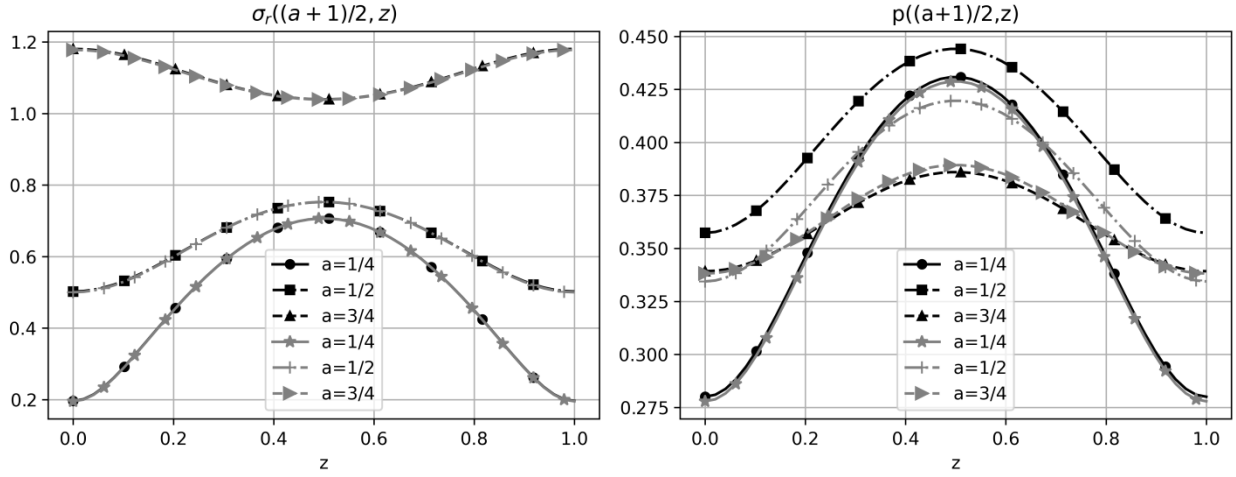

Рис. 10 Зміна абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску при зміні внутрішнього радіусу циліндра для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

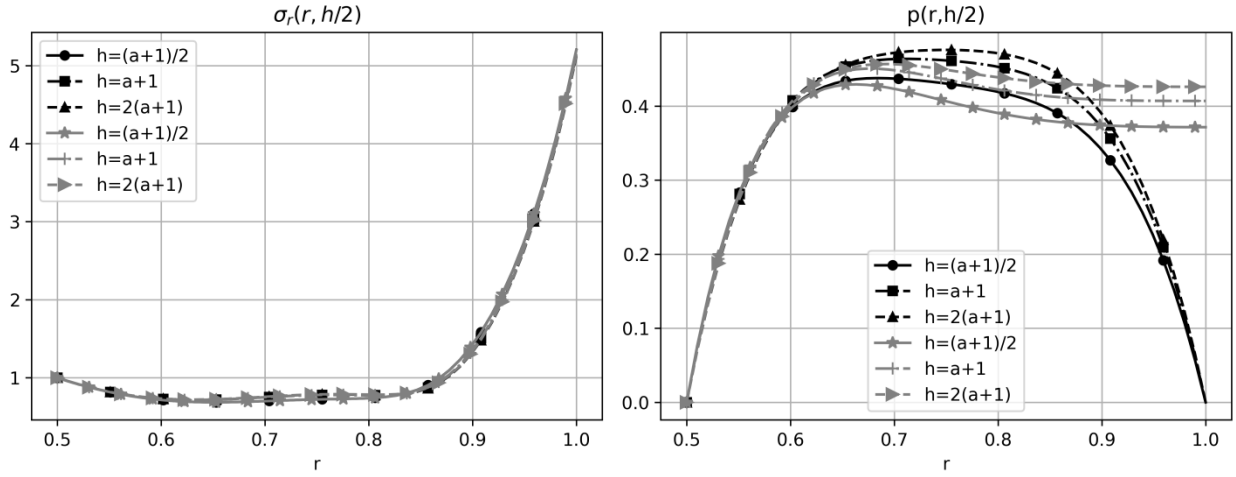

Рис. 11 Зміна абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску при зміні висоти циліндра для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Як видно на Рис. 12-Рис. 13, для випадків прикладення механічного навантаження найбільші абсолютні значення нормальних напружень та порового тиску відповідають матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик).

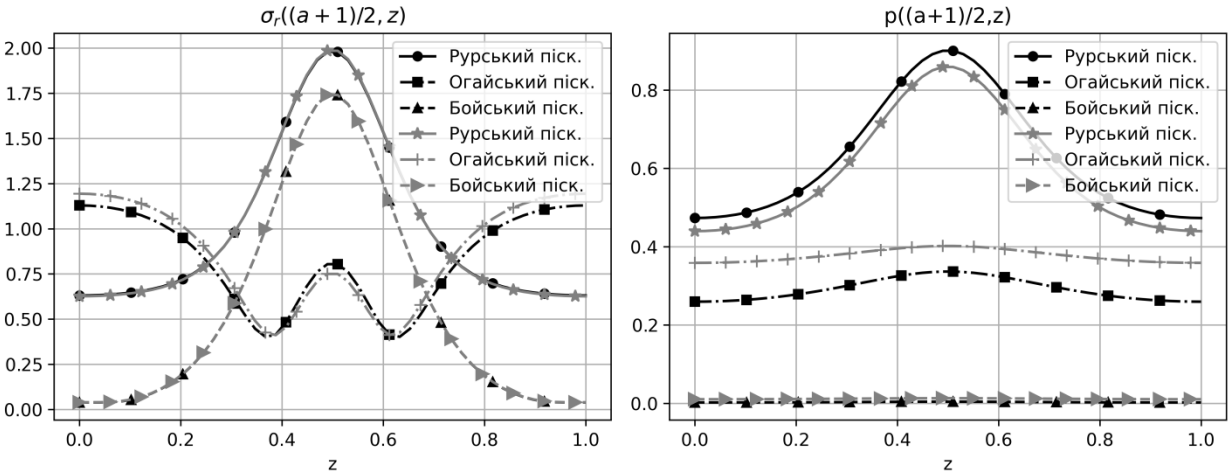

Рис. 12 Зміна абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

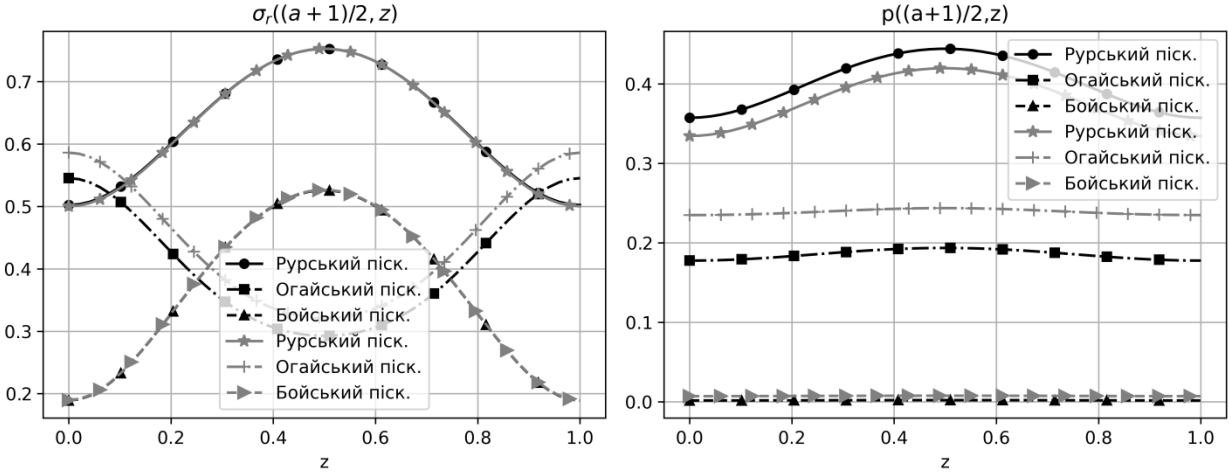

Рис. 13 Зміна абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

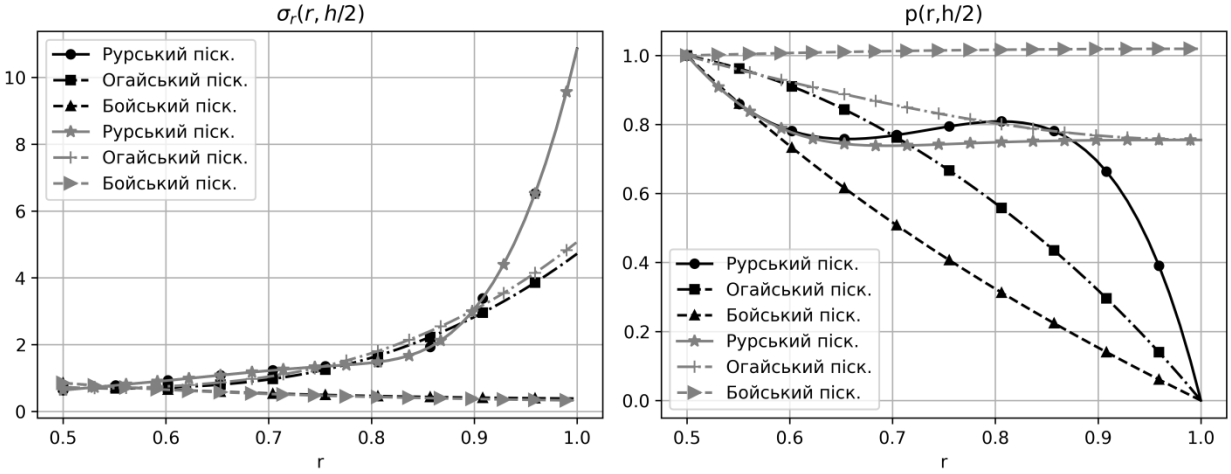

Рис. 14 Зміна абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском

У випадку прикладення розподіленого навантаження тиском (Рис. 14) найбільші абсолютні значення нормального напруження відповідають матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик), а найбільші абсолютні значення порового тиску – матеріалу з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) для випадку непроникної поверхні $r=1$. Для випадку проникної поверхні $r=1$ абсолютні значення порового тиску для матеріалу з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) є найменшими.

Таблиця 4

Частоти пікового амплітудного відгуку на циліндричній поверхні *r=a*

Випадок проникної грані $r=1$			Випадок непроникної грані $r=1$		
$L(z)=$ $=\delta\left(z-\frac{h}{2}\right)$	$L(z)=$ $=\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$P(r)=1$	$L(z)=$ $=\delta\left(z-\frac{h}{2}\right)$	$L(z)=$ $=\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$P(r)=1$
Рурський пісковик					
12.8	13.92	1.21	2.7	11.41	1.21
12.88	13.94		10.51	11.43	
Огайський пісковик					
0.6	0.11	0.6	0.6	0.11	0.6
1.15	0.13	1.5	1.14	0.13	1.5
Бойський пісковик					
0.21	0.2	0.2	0.7	0.2	0.2
0.7	0.4	0.3	1.71	0.6	0.3

Як видно у Таблиці 4, для матеріалів з меншими значеннями коефіцієнта Біо (Рурський пісковик та Огайський пісковик) менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку відповідають випадку непроникної поверхні *r*=1, а для матеріалу з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку спостерігаються для випадку проникної поверхні *r*=1. Більші значення перших частот пікового амплітудного відгуку спостерігаються для матеріалу з меншим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик), а менші – для матеріалів з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик та Огайський пісковик). Для матеріалів Рурський пісковик та Бойський пісковик менші значення перших частот пікового амплітудного відгуку відповідають розподіленому навантаженню тиском, а для матеріалу Огайський пісковик – розподіленому нормального механічному навантаженню.

Як частинний випадок, розглянуто суцільні циліндри з аналогічними конфігураціями навантажень (*підрозділи 4.2, 4.4*), а також півнескінченний порожнистий циліндр, що навантажено по циліндричній поверхні (*підрозділ 4.5*). Суцільні циліндри та півнескінченний порожнистий циліндр демонструють тенденції зміни нормального напруження та порового тиску, що аналогічні до відповідних скінчених порожнистих циліндрів. Абсолютні значення даних характеристик для суцільних циліндрів та півнескінченного порожнистого

циліндра є меншими, ніж для відповідних скінчених порожнистих циліндрів для всіх розглянутих видів прикладеного навантаження.

Дослідження поропружних шарів подано у **п'ятому розділі.** У *підрозділах 5.1-5.2* розв'язано задачі для поропружних шарів, що містять циліндричне включення та циліндричний отвір відповідно. З цією метою застосовано схему методу для випадку циліндричних тіл, яку наведено у підрозділі 2.2.2. Для обох шарів найбільші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску відповідають випадку прикладення розподіленого навантаження тиском, а найменші, як і для циліндрів, випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження.

В *підрозділі 5.3* в задачі для клиновидного шару деталізовано крайові умови на гранях $z=0$ та $z=h$. На верхню грань $z=0$ діє навантаження $\sigma_z\big|_{z=0}=-L(r,\varphi)-\alpha P(r,\varphi), \tau_{rz}\big|_{z=0}=T(r,\varphi), \tau_{\varphi z}\big|_{z=0}=R(r,\varphi), p\big|_{z=0}=P(r,\varphi)$. Нижня грань $z=h$ знаходиться в умовах зчеплення із зовнішнім середовищем $u\big|_{z=h}=0, v\big|_{z=h}=0, w\big|_{z=h}=0$ та вона може розглядатись як проникна $p\big|_{z=h}=0$ або непроникна $\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=h}=0$.

Числовийаналіз проведено для трьох типів навантаження: сконцентроване нормальне механічне навантаження $L(r,\varphi)=\delta\left(r-\dfrac{1}{2},\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right), T(r,\varphi)=0, R(r,\varphi)=0,$ $P(r,\varphi)=0$, де $\delta(r,\varphi)$ – це двовимірна дельта-функція Дірака; розподілене нормальне механічне навантаження $L(r,\varphi)=\begin{cases} r\cos\varphi, r\le 1 \\ 0, r>1 \end{cases}, T(r,\varphi)=0, R(r,\varphi)=0, P(r,\varphi)=0$; розподілене навантаження тиском $L(r,\varphi)=0, T(r,\varphi)=0, R(r,\varphi)=0, P(r,\varphi)=1$. За замовчуванням розглядався поропружний клиновидний шар висотою h=1 та кутом отвору $\pi/3$.

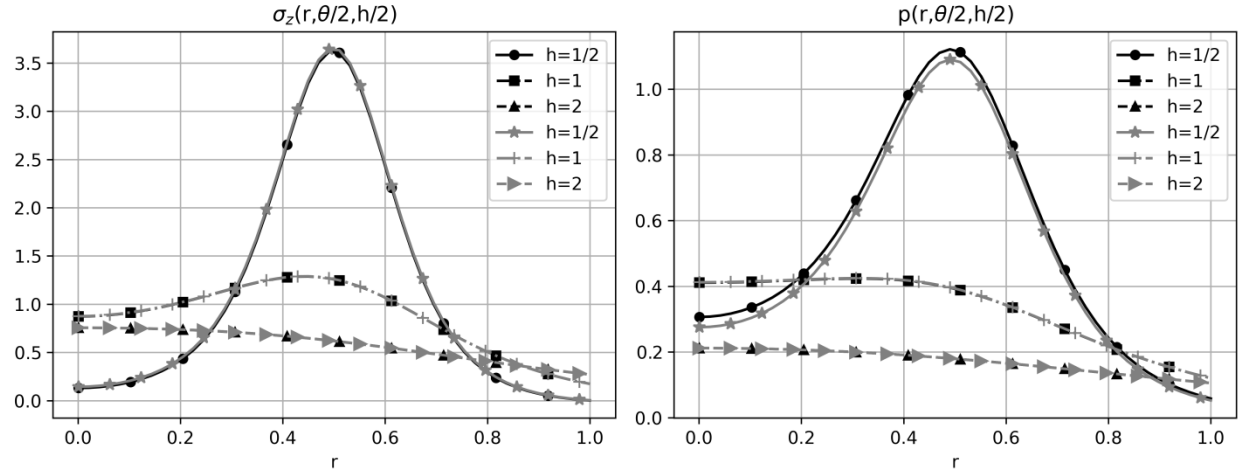

Рис. 15 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні висоти клиновидного шару для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

Як видно на Рис. 15-Рис. 16, меншому значенню висоти та меншому куту отвору відповідають більші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску.

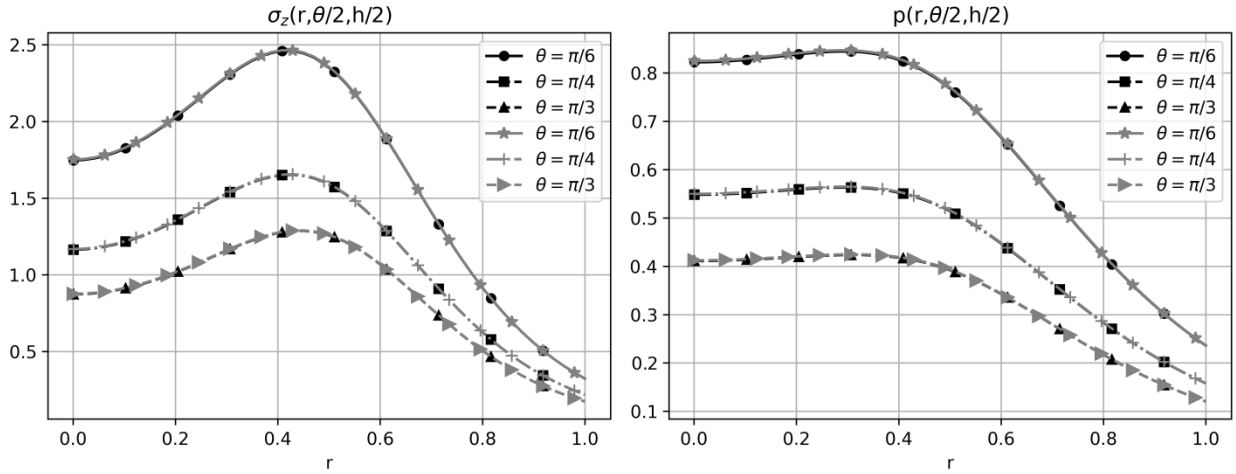

Рис. 16 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні кута отвору клиновидного шару для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

Як видно на Рис. 17-Рис. 18, для випадків прикладення механічного нвантаження найменші абсолютні значення нормального напруження та найбільші абсолютні значення порового тиску відповідають матеріалу з найменшим значенням коефіцієнта Біо (Рурський пісковик).

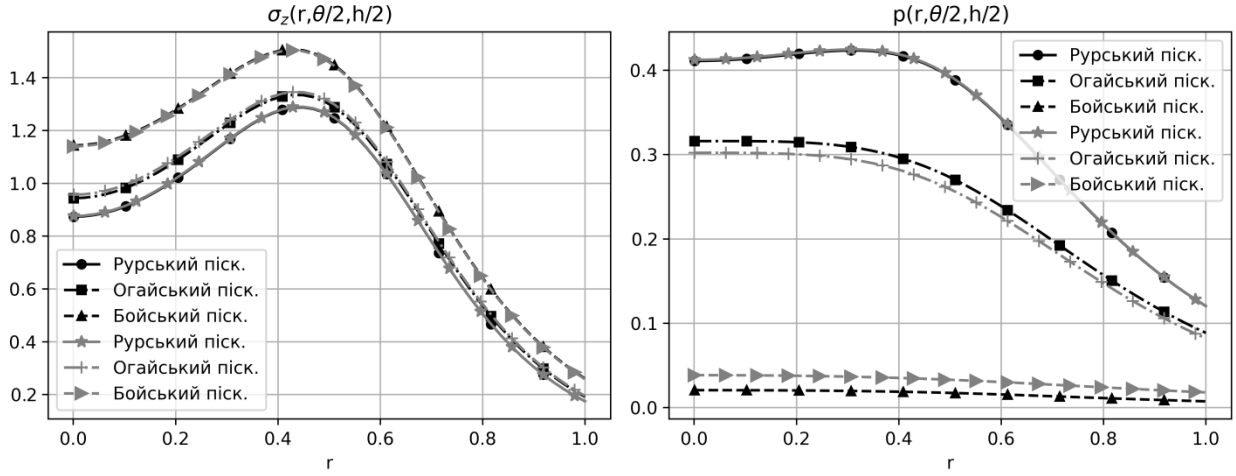

Рис. 17 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

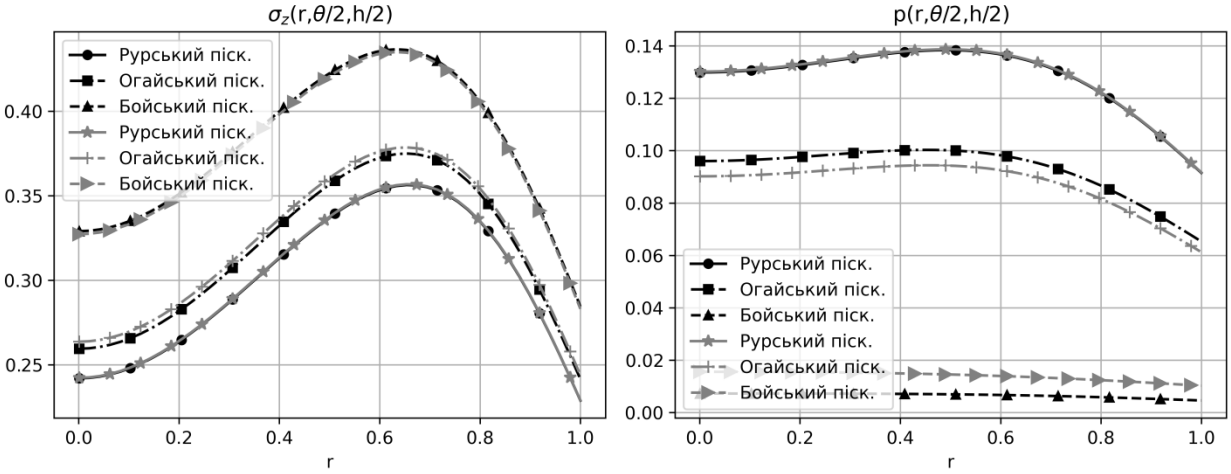

Рис. 18 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Ілюстрацію випадку прикладення розподіленого навантаження тиском подано на Рис. 19. У даному випадку матеріалу з найбільшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський пісковик) відповідають найбільші абсолютні значення нормального напруження та порового тиску, лише для випадку непроникної грані $z = h$ більші абсолютні значення нормального напруження спостерігаються для Огайського пісковика.

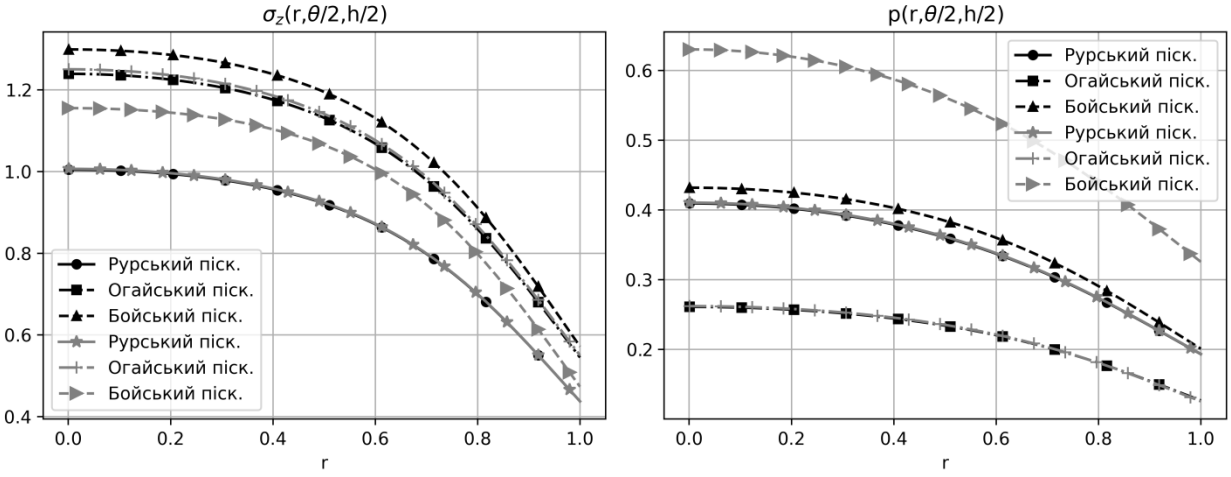

Рис. 19 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружного матеріалу для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском

Випадок шаруватих поропружних структур розглянуто в**шостому розділі** для кубоїда, прямокутної області, порожнистого та суцільного циліндрів, шару з циліндричним включенням, шару з циліндричним отвором та клиновидного шару. Між шарами виконуються умови ідеального контакту.

Підрозділ 6.1 присвячено шаруватим структурам з плоскими гранями, *підрозділ 6.2* – шаруватим циліндрам. За методом, що викладено у підрозділі 2.3, розв'язано дані задачі. Якісні тенденції зміни абсолютних значень нормальних напружень та порового тиску є аналогічними для усіх розглянутих структур, тому продемонструємо це на прикладі шаруватого клиновидного шару (*підрозділ 6.3*), де числові дослідження проведено для трьох типів навантаження, описаних

у розділі 5. За замовчуванням розглядався поропружний клиновидний шар з кутом отвору $\pi/3$ та висотами шарів $h_1 = 0.5, h_2 = h = 1$, матеріалом першого шару $(0 < z < h_1)$ слугував Огайський пісковик, матеріалом другого шару $(h_1 < x < h)$ слугував Бойський пісковик (Таблиця 1).

Для випадків прикладення механічного навантаження (Рис. 20-Рис. 21) найбільші абсолютні значення порового тиску спостерігаються у першому шарі для конфігурації матеріалів Огайський пісковик та Бойський пісковик, а у другому шарі – для Бойський пісковик та Огайський пісковик. Абсолютні значення порового тиску є більшими для випадку непроникної грані $z = h$.

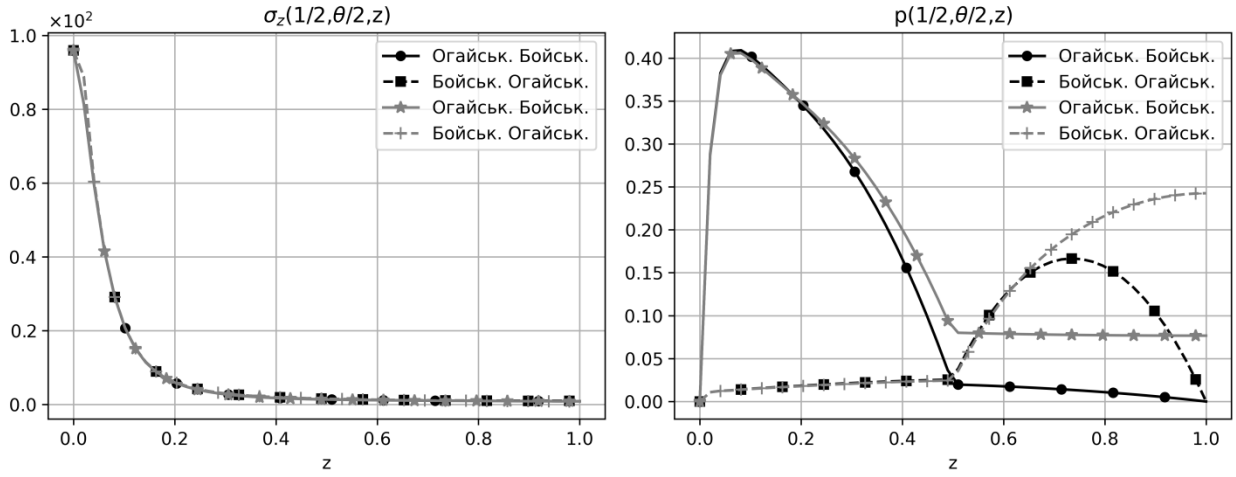

Рис. 20 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружних матеріалів двошарового клину для випадку прикладення сконцентрованого нормального механічного навантаження

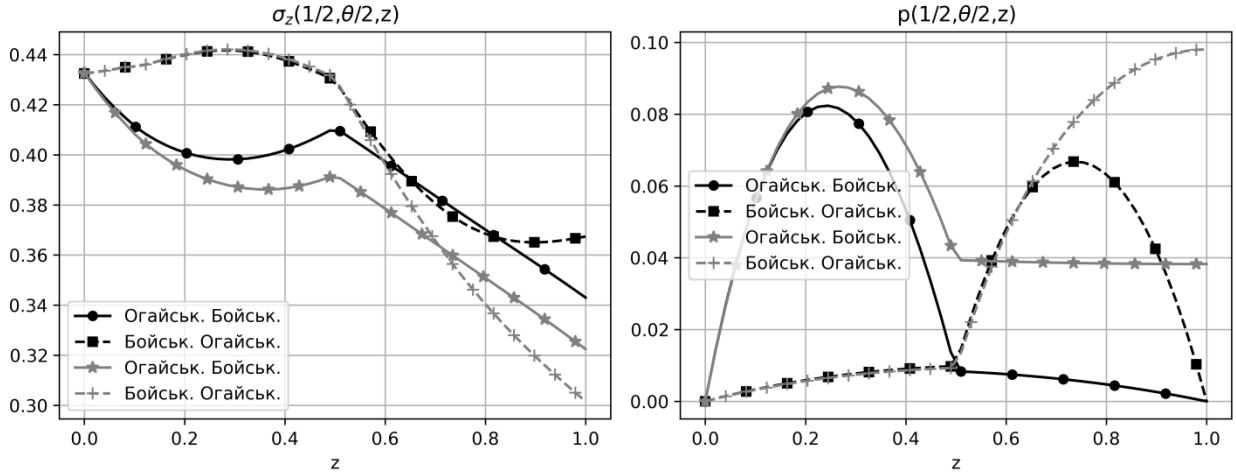

Рис. 21 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружних матеріалів двошарового клину для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Для випадку прикладення розподіленого нормального механічного навантаження (Рис. 21) абсолютні значення нормального напруження є більшими у першому шарі та частині другого шару, коли навантаження прикладено до матеріалу з більшим значенням коефіцієнта Біо (Бойський

пісковик), тобто для конфігурації матеріалів Бойський пісковик та Огайський пісковик. У другому шарі частково домінують абсолютні значення нормального напруження та пари матеріалів Огайський пісковик та Бойський пісковик.

У випадку прикладення розподіленого навантаження тиском (Рис. 22) найбільші абсолютні значення нормального напруження є більшими для пари матеріалів Огайський пісковик та Бойський пісковик, а найбільші абсолютні значення порового тиску, навпаки, є більшими для пари матеріалів Бойський пісковик та Огайський пісковик.

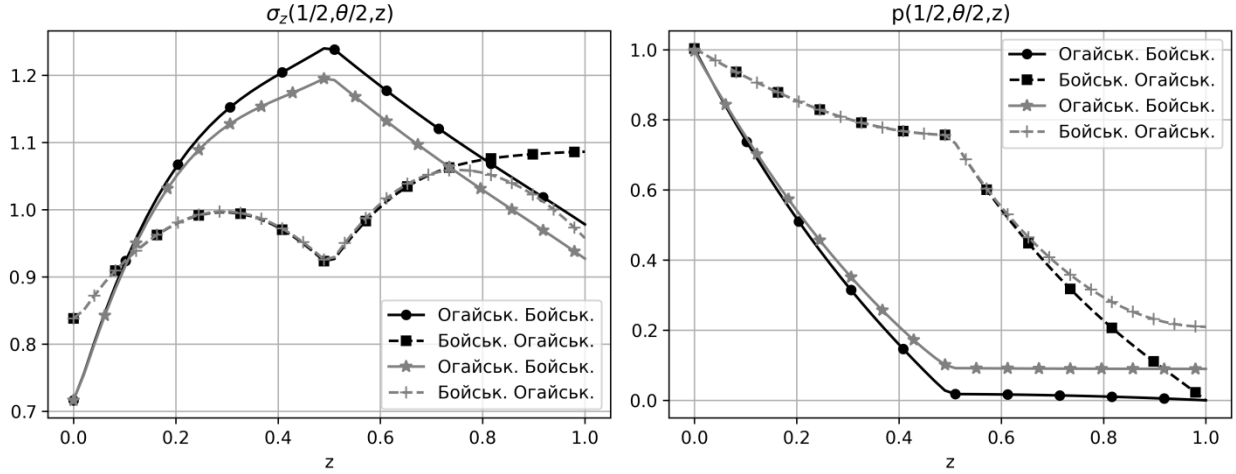

Рис. 22 Зміна абсолютних значень нормального напруження та порового тиску при зміні поропружних матеріалів двошарового клину для випадку прикладення розподіленого навантаження тиском

У **сьомому розділі** розв'язано задачі, що містять контрасти між шарами, для чого застосовано асимптотичний метод, що описано у підрозділі 2.5. У підрозділах 7.1, 7.2, 7.3 відповідно сформульовано та розв'язано задачі для контрасту за виконання умови сполучення недосконалого типу у декартовій та циліндричній системах координат. Так, у *підрозділі 7.1* наведено числові результати для поропружних прямокутних структур у вигляді кубоїда та прямокутної області. Напружений стан циліндричних тіл, таких як порожнистий та суцільний циліндри за двох конфігурацій прикладеного навантаження досліджено у *підрозділі 7.2*. У *підрозділі 7.3* для клиновидного шару проведено числові дослідження для трьох типів навантаження, описаних у підрозділі 5. Розглядався поропружний клиновидний шар з кутом отвору $\pi/3$ та параметрами $h_0 = 0.1, d = 0.5, d_* = 1$, матеріалом першого шару ($0 < z < d$) слугував Бойський пісковик, матеріалом другого шару ($d < z < d_*$) слугував пісковик Береа (Таблиця 1). На рисунках подано абсолютні значення основних механічних характеристик: нормального напруження, порового тиску, переміщення та нормального потоку $q_z = k\,\partial p/\partial z$.

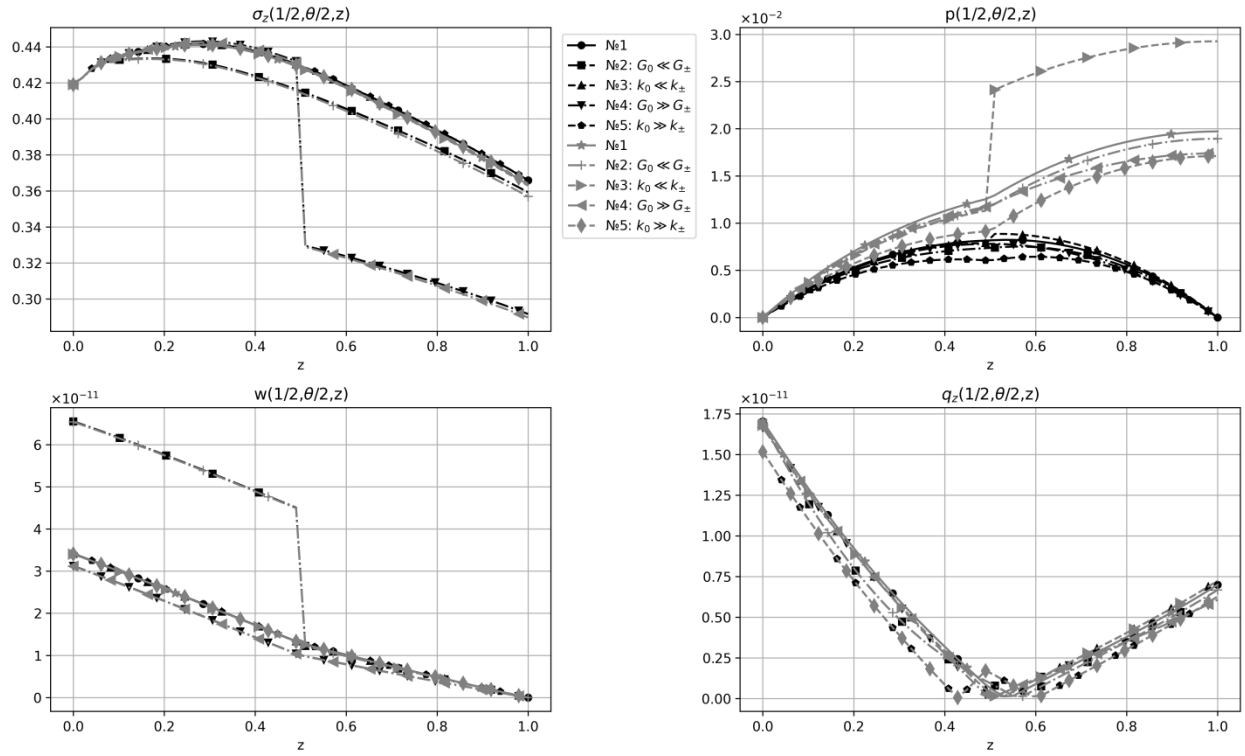

Рис. 23 Зміна абсолютних значень механічних характеристик для випадків № 1-5 двошарового тривимірного клину з прошарком за умови прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

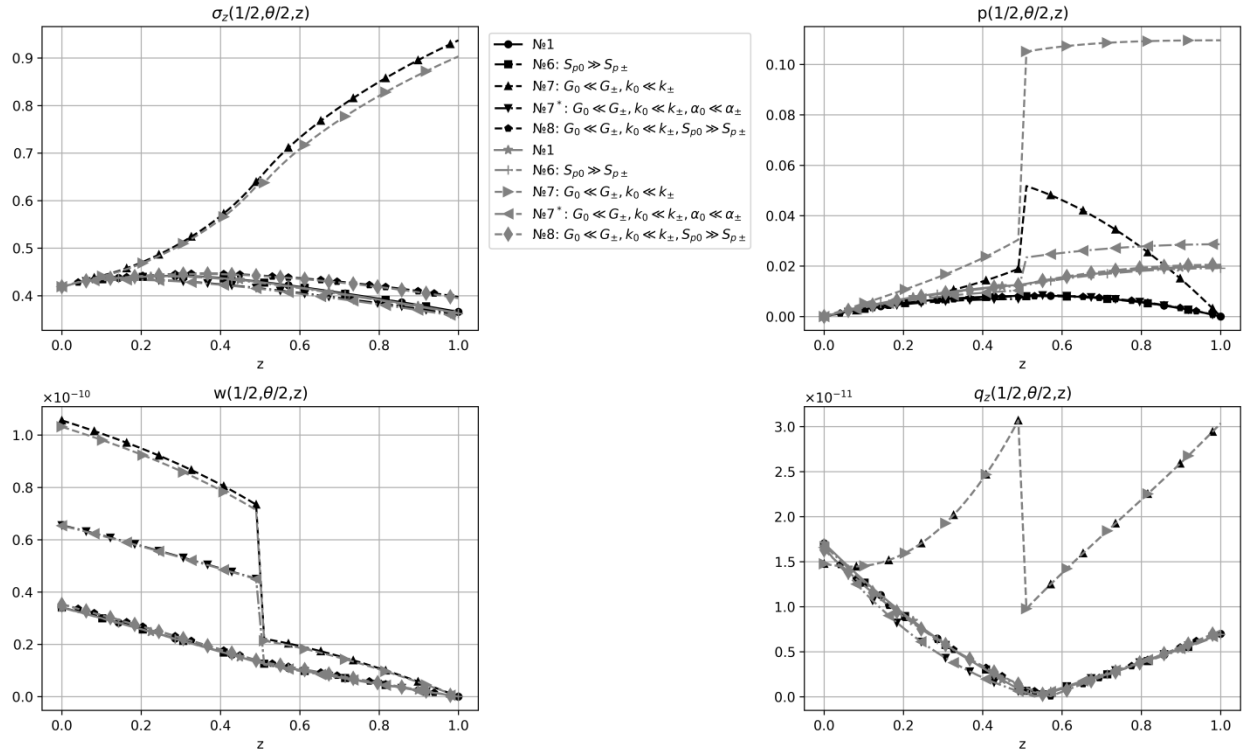

Рис. 24 Зміна абсолютних значень механічних характеристик для випадків № 6-8 двошарового тривимірного клину з прошарком за умови прикладення розподіленого нормального механічного навантаження

Випадки прикладення механічного навантаження (Рис. 23-Рис. 24) показують суттєву відмінність усіх випадків, окрім випадку № 6 з більшим значенням ємності простору пор, від ідеального контакту (випадок № 1).

Найбільші абсолютні значення нормального напруження спостерігаються у випадках менш жорсткого і менш проникного прошарку (№ 7) та № 8 з меншими значеннями модулю зсуву та коефіцієнта проникності прошарку і більшим значенням ємності простору пор прошарку, а найменші – у випадках більш м'якого прошарку (№ 2), більш жорсткого прошарку (№ 4) та № 7* з меншими значеннями модулю зсуву, коефіцієнта проникності та сталої Біо прошарку. Найменші абсолютні значення порового тиску демонструють випадки більш проникного прошарку (№ 5) та № 7* з меншими значеннями модулю зсуву, коефіцієнта проникності та сталої Біо прошарку, а найбільші – випадок менш жорсткого і менш проникного прошарку (№ 7).

Випадок прикладення розподіленого навантаження тиском (Рис. 25-Рис. 26) демонструє найбільші абсолютні значення нормального напруження у випадках більш проникного прошарку (№ 5) та менш жорсткого і менш проникного прошарку (№ 7), а найменші – у випадках більш жорсткого прошарку (№ 4) та № 7* з меншими значеннями модулю зсуву, коефіцієнта проникності та сталої Біо прошарку. Найбільші абсолютні значення порового тиску спостерігаються у випадках більш проникного прошарку (№ 3) та менш жорсткого і менш проникного прошарку (№ 7), а найменші – у випадках більш проникного прошарку (№ 5) та № 7* з меншими значеннями модулю зсуву, коефіцієнта проникності та сталої Біо прошарку. Усі випадки демонструють суттєву відмінність від ідеального контакту (випадок № 1) у сукупності розглянутих механічних характеристик.

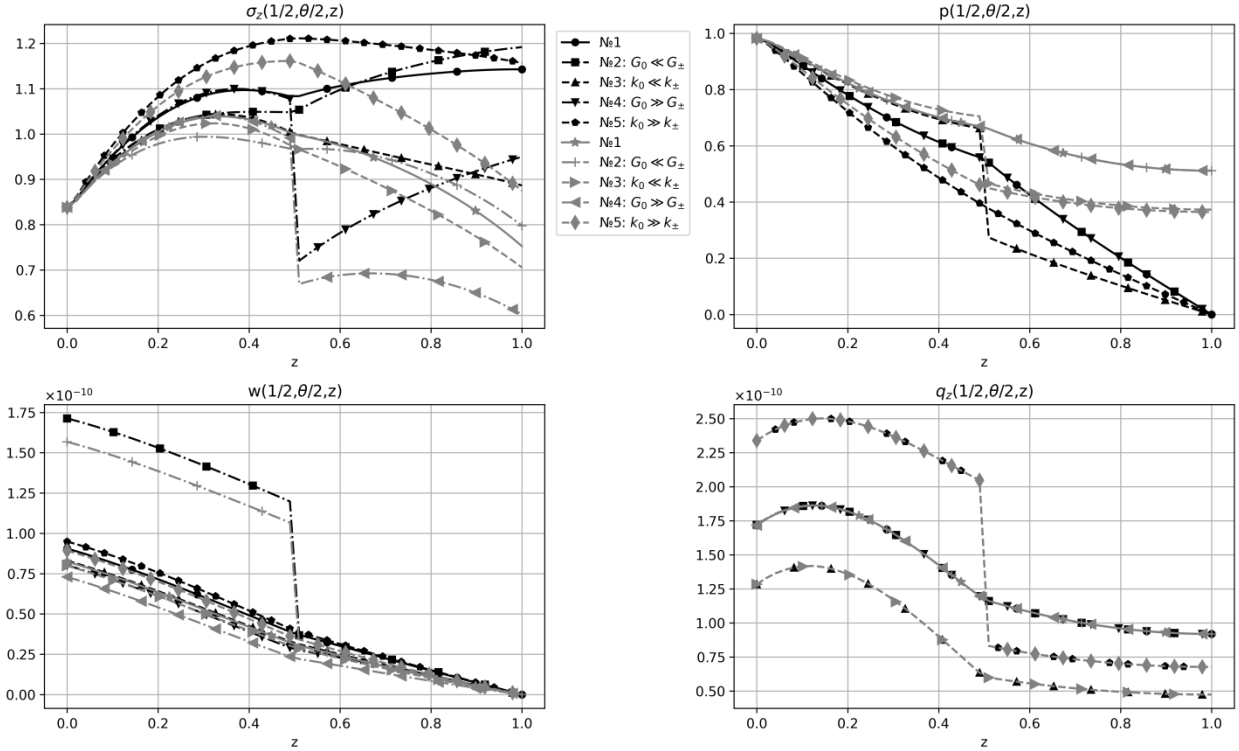

Рис. 25 Зміна абсолютних значень механічних характеристик для випадків № 1-5 двошарового тривимірного клину з прошарком за умови прикладення розподіленого навантаження тиском

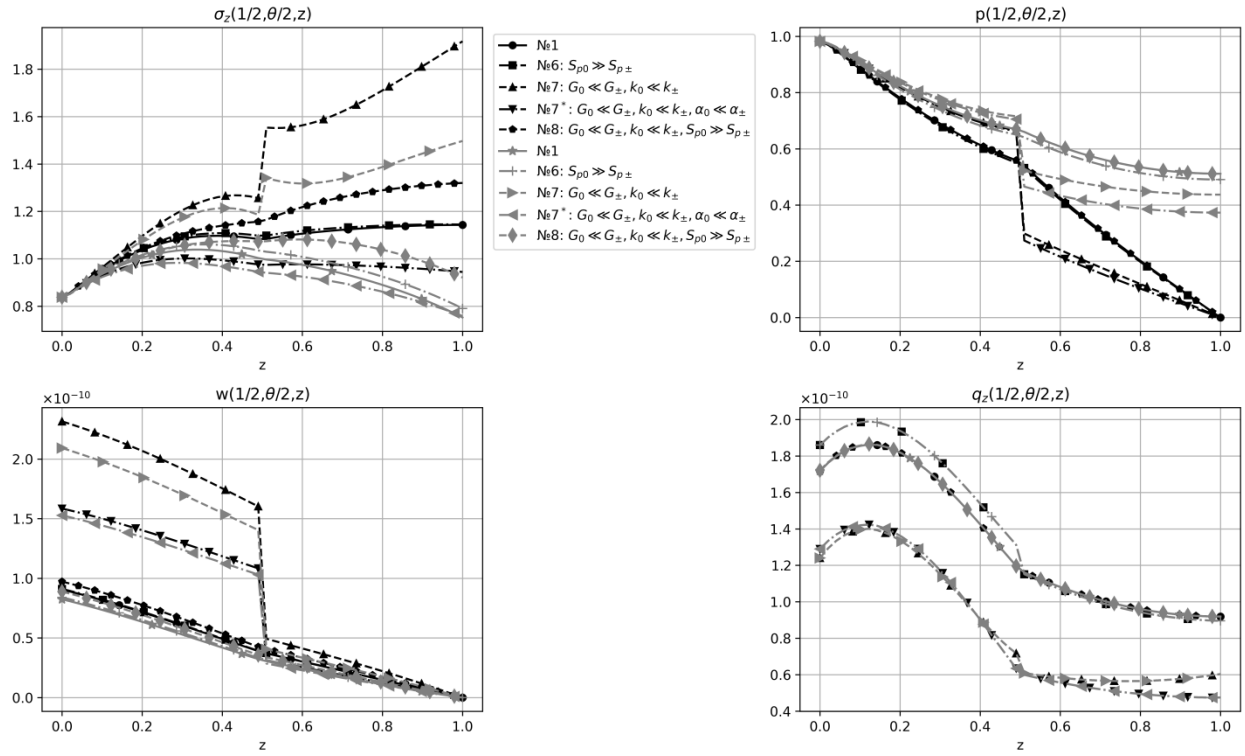

Рис. 26 Зміна абсолютних значень механічних характеристик для випадків № 6-8 двошарового тривимірного клину з прошарком за умови прикладення розподіленого навантаження тиском

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв’язано фундаментальну наукову проблему дослідження нового класу задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями за допомогою побудованого аналітичного методу. В основу проведених досліджень покладено такі результати:

1. Сформульовано постановки нового класу задач тривимірної теорії поропружності за допомогою апарату крайових задач механіки деформівного твердого тіла та побудовано аналітичний метод їх розв’язання.

2. Запропонований новий аналітичний підхід, що ґрунтується на апараті тривимірних мішаних крайових задач із сумісним застосуванням матричних інтегральних перетворень і матричного диференціального числення, дозволив отримати замкнуті аналітичні розв’язки поставлених задач поропружності.

3. Розв’язано ряд тривимірних крайових задач поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями, що дало змогу комплексно дослідити напружено-деформований стан і розподіл порового тиску під дією механічних та гідравлічних навантажень.

4. Встановлено закономірності впливу геометричних параметрів тіл, типу та інтенсивності навантажень, а також частотного діапазону механічного збурення на розподіл основних поропружних полів на основі отриманих замкнутих аналітичних розв’язків.

5. Визначено та проаналізовано спектральні характеристики поропружних тіл, зокрема перші частоти пікового амплітудного відгуку та умови

їх реалізації, а також встановлено їх залежність від типу навантаження, поропружних сталих матеріалу та параметрів проникності граничних поверхонь.

6. Досліджено поропружний відгук шаруватих структур за умови ідеального міжшарового контакту та показано, що контраст поропружних сталих у шарах істотно впливає на перерозподіл напружень, деформацій і порового тиску, а його ігнорування може призводити до некоректних оцінок.

7. Аналітично в асимптотичному поданні отримано умови недосконалого сполучення для шаруватих поропружних структур з тонкими поропружними прошарками, які узагальнюють класичні моделі типу «м'якого прошарку» та демонструють суттєвий вплив механічної жорсткості й проникності прошарку на характер міжшарової взаємодії.

Створений аналітичний метод використано для визначення просторових розподілів переміщень, напружень та порового тиску у тривимірних поропружних середовищах за дії різних типів навантажень з урахуванням наявності прошарків і відмінностей у поропружних властивостях матеріалів. Завдяки застосуванню створеного методу за результатами обчислень було зроблено наступні висновки:

1. Для суцільних поропружних тіл з плоскими та циліндричними поверхнями:

- Встановлено закономірності формування нормальних напружень і порового тиску залежно від типу навантаження, параметрів матеріалу, граничних умов та геометрії тіла за результатами обчислень. Показано, що максимальні абсолютні значення нормальних напружень відповідають сконцентрованому нормальному механічному навантаженню, тоді як максимальні значення інтенсивності порового тиску реалізуються при навантаженні тиском; мінімальні значення обох характеристик характерні для розподіленого механічного навантаження.

- Доведено істотний вплив коефіцієнта Біо: при механічних навантаженнях збільшення коефіцієнта Біо зумовлює зменшення абсолютних величин нормальних напружень і порового тиску, тоді як при навантаженні тиском – їх зростання. Виявлено значущу роль фільтраційних граничних умов: наявність проникної грані, як правило, підвищує абсолютні значення нормальних напружень, а вплив на поровий тиск є протилежним для механічного навантаження та навантаження тиском.

- Показано, що збільшення розмірів навантаженої ділянки призводить до зростання абсолютних величин нормальних напружень і порового тиску незалежно від типу навантаження. Виявлено суттєві відмінності механічного відгуку суцільних, порожнистих та півнескінченних циліндрів: порожнисті та скінченні конфігурації характеризуються більшими абсолютними значеннями нормального напруження та порового тиску, а збільшення внутрішнього радіуса порожнистих циліндрів супроводжується зростанням порового тиску.

- Встановлено закономірності зміни перших частот пікового амплітудного відгуку залежно від коефіцієнта Біо, граничних умов і геометрії. Менші значення частот відповідають матеріалам з більшим коефіцієнтом Біо, суцільним циліндрам порівняно з порожнистими та прямокутним областям порівняно з

кубоїдами, а характер впливу проникності зчепленої грані відрізняється для декартових і циліндричних тіл.

2. Для шаруватих поропружних структур з умовами ідеального контакту між шарами:

- Встановлено закономірності розподілу нормальних напружень і порового тиску в дво- та тришарових поропружних тілах залежно від коефіцієнта Біо матеріалів, типу навантаження та проникності зчеплених граней за результатами числового аналізу. Показано, що при механічному навантаженні максимальні абсолютні значення нормальних напружень у навантаженому шарі реалізуються при прикладенні навантаження до матеріалу з більшим коефіцієнтом Біо, тоді як при навантаженні тиском – до матеріалу з меншим коефіцієнтом Біо. У ненавантажених шарах характер розподілу визначається проникністю зчепленої грані.

- Для порового тиску встановлено протилежні тенденції: при механічному навантаженні максимальні значення в першому шарі відповідають матеріалу з меншим коефіцієнтом Біо, а в останньому – з більшим, тоді як при навантаженні тиском у більшості конфігурацій домінує матеріал з більшим коефіцієнтом Біо в усіх шарах. Показано, що в тришарових структурах у проміжному шарі відбувається зміна домінуючої групи матеріалів, а в двошарових тілах ця зміна локалізується поблизу стику шарів і залежить від проникності зчепленої грані.

- Виявлено, що проникна зчеплена грань, у середньому, збільшує абсолютні значення нормальних напружень, тоді як непроникна – порового тиску. Підтверджено узагальнені закономірності одношарових тіл: найбільші нормальні напруження відповідають сконцентрованому механічному навантаженню, найбільший поровий тиск – навантаженню тиском, а мінімальні значення обох величин – розподіленому механічному навантаженню.

3. Для шаруватих структур з тонкими поропружними прошарками:

- Встановлено, що характер напружено-деформованого стану істотно залежить від механічних і фільтраційних параметрів тонких поропружних прошарків. Показано, що при механічному навантаженні в навантаженому шарі домінує вплив ефективної жорсткості прошарку, тоді як у другому шарі визначальними є проникність і ємність порового простору. При навантаженні тиском провідну роль відіграють фільтраційні та порові параметри, а вплив модуля зсуву зменшується.

- Проаналізовано закономірності формування порового тиску, які свідчать про складну взаємодію жорсткості, проникності та ємності прошарку, а також про істотну відмінність більшості конфігурацій від ідеального контакту. Виявлено умови виникнення та зникнення стрибків механічних параметрів на межі поділу, а також випадки несуттєвого впливу прошарків певного типу.

- Показано, що при механічному навантаженні відхилення від ідеального контакту переважно визначаються модулем зсуву прошарку, тоді як при навантаженні тиском – ємністю порового простору та коефіцієнтом проникності. Встановлено різний характер відхилення нормальних напружень і порового тиску від ідеального контакту для різних типів прошарків, а також суттєву

відмінність між спрощеними та узагальненими моделями менш жорстких і менш проникних прошарків.

- Підтверджено, що проникність граней тіла істотно впливає на інтенсивність поропружного відгуку: непроникні грані зумовлюють більші значення порового тиску, тоді як для навантаження тиском проникність зчепленої грані призводить до значного зростання нормальних напружень, переміщень і відповідних стрибків параметрів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у фахових виданнях та виданнях, включених до міжнародної науковометричної бази Scopus

1. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Мойсеєнок О.П., Реут В.В. Дослідження напруженого стану півсмуги для випадку усталених коливань. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки*. 2019. С. 53–56. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.11.
2. Istenes I., Peck D., Protserov Yu., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Torsional vibration of a coupled cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 2025. Vol. 217. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2025.104374.
3. Mishuris G., Protserov Y., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. On atypical imperfect transmission conditions for thin poroelastic interphase. *J Math Sci*. 2025. https://doi.org/10.1007/s10958-025-08066-8.
4. Reut V., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Non-stationary mixed problem of elasticity for a semi-strip. *Coupled Systems Mechanics*. 2020. Vol. 9. No. 1. P. 77–89. https://doi.org/10.12989/csm.2020.9.1.077.
5. Sheng H., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Uncoupled thermoelasticity problem for a finite rectangular composite. *Z Angew Math Mech*. 2024. Vol. 104. No. 12. https://doi.org/10.1002/zamm.202400657.
6. VaysfeldN., ZhuravlovaZ. Axisymmetric poroelasticity problem for a multilayered cylinder.*Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*. 2025. Vol. 2, No. 81. P. 87–90.https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.11.
7. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Y. Contact Problem for Finite Poroelastic Cylinder: Exact Analysis. *Int Appl Mech*. 2024. https://doi.org/10.1007/s10778-024-01278-6.
8. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials* / ed by H. Altenbach, S.M. Mkhitaryan, V. Hakobyan, A.V. Sahakyan. Springer, 2023. Vol. 185. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_26.
9. Vaysfeld N. D., Zhuravlova Z. Yu. Exact solution to the poroelasticity problem for a multilayered rectangular domain. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2024. Т. 67. №3-4. С. 118–131. https://doi.org/10.15407/mmpmf2024.67.3-4.118-131.
10. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. Investigation of porous stress state of semi-infinite hollow cylinder under axisymmetric loading. *Bulletin of the Taras Shevchenko*

National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2023. Vol. 2023. No. 2. P. 92–95. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.11.
[Те саме: Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Дослідження поронапруженого стану півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки, №2*. 2023. С. 92–95. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.11.]

11. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. On the Stress State of a Poroelastic Hollow Finite Cylinder. *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials* / ed. by H. Altenbach. Springer, 2025. Vol. 223. https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_41.
12. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. Non-stationary problem of elasticity for quarter-plane. *Bulletin KNU. Series: Physics and mathematics*.2021. №3. P. 28–33. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.2.
13. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. Response of a Poroelastic Semi-Infinite Strip to the Compression Acting Upon Its Lateral Sides. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. Vol. 282. No. 5. P. 849–861. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07220-y.
[Те саме: Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Response of a poroelastic semi-infinite strip on a compression along lateral sides. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2022. Vol. 65. No. 1-2. P. 199–208. http://iapmm.lviv.ua/journal/Mm-2022-651-2-ind-abstr.htm.]
14. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. Simulation of the cuboidal reservoir poroelastic stress state. *Physicochemical Mechanics of Materials*. 2025. Vol. 61. No. 4. P. 046–052. https://doi.org/10.15407/pcmm2025.04.046.
15. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. The Mixed Problems of Poroelasticity for Rectangular Domains. *Mechanics of Heterogeneous Materials. Advanced Structured Materials* / ed. by H. Altenbach, G. Bruno, V.A. Eremeyev, M.Y. Gutkin, W.H. Müller. Springer, 2023. Vol. 195. https://doi.org/10.1007/978-3-031-28744-2_20.
16. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. The Plane Problem of Poroelasticity for a Semi-plane. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Modelling in Engineering. NME 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / ed. by A.M. Wahab. Springer, 2022. P. 151–157. https://doi.org/10.1007/978-981-16-8806-5_10.
17. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. The poroelastic layer with an axisymmetric cylindrical hole under different types of loading. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*. 2024. Vol. 28. No. 1. P. 131–140. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2024.28.09.
18. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. The pseudo-static axisymmetric problem for a poroelastic cylinder. *Recent trends in wave mechanics and vibrations. Proceedings of WMVC 2022*. 2023. Vol. 125. P. 373–378. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_37.
19. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. The transient mixed problem for an elastic semi-strip. *J Eng Math*. 2021. Vol. 127. No. 16. https://doi.org/10.1007/s10665-021-10106-6.
20. Zhuravlova Z. Exact solution of the plane problems for poroelastic rectangle and semi-strip. *Z Angew Math Mech*. 2022. Vol. 102. No. 11. https://doi.org/10.1002/zamm.202200162.

21. Zhuravlova Z.Y. Mechanical Response of a Semi-Infinite Poroelastic Cuboid to an External Load. *J Math Sci*. 2025. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07852-8. [Те саме: Zhuravlova Z.Y. Mechanicalresponse of a semi-infinite poroelastic cuboid to an external load. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2023. Vol. 66. No. 1-2. P. 188–205. https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.188-205.]
22. Zhuravlova Z. Method of Inversion of Laplace Transform in Some Problems of Dynamic Elasticity. *Perspectives in Dynamical Systems II – Numerical and Analytical Approaches. DSTA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* / ed. by J. Awrejcewicz. Springer, 2024. Vol. 454. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56496-3_49.
23. Zhuravlova Z.Yu. New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2019. Vol. 24. No. 2(34). P. 122–135. https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2(34).190061.
24. Zhuravlova Z.Yu. The case of analytical inversion of Laplace transform. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2021. Vol. 26. No. 1(37). P. 63–95. https://doi.org/10.18524/2519-206X.2021.1(37).233091.
25. Zhuravlova Z., Istenes I., Peck D., Protserov Yu., Vaysfeld N. Hidden ring crack in a rotating hollow cylinder under torsion. *International Journal of Engineering Science*. 2024. Vol. 194. No. 1. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2023.103976.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

26. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Дослідження напружено-деформівного стану півнескінченного порожнистого поропружного циліндру під дією вісісиметричного навантаження. *VII міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»* : тези доп., м. Київ, 28-30 серпня 2023 р.
27. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Осесиметрична задача поропружності для шаруватого циліндру. *VIII міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»* : тези доп., м. Київ, 29-29 серпня 2025 р. С. 9.
28. Вайсфельд Н., Журавльова З. Плоска псевдостатична задача поропружності для півплощини. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки 2021»* : тези доп., м. Львів, 15-17 вересня 2021 р.
29. Вайсфельд Н., Журавльова З. Просторова задача поропружності для півнескінченного клину. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції. Випуск. 6* : тези доп., м. Львів, 2024. С. 19–20.
30. Вайсфельд Н., Журавльова З. Точний розв’язок вісісиметричної поропружності для шару з циліндричним включенням. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики 2023»* : тези доп., м. Львів, 23-25 травня 2023 р. С. 37–38.
31. Журавльова З.Ю. Дослідження напружено-деформівного стану поропружної прямокутної області. *Інформаційні технології* : тези доп., м. Київ, 18 травня 2023 р.
32. Журавльова З.Ю. Дослідження напружено-деформівного стану шаруватого поропружного кубоїда. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання 2025»* : тези доп., м. Львів, 27–29 травня 2025 р.

33. Журавльова З.Ю. Плоска задача поропружності для півнескінченної прямокутної області. *Всеукраїнська науково-практична конференція присвячена повоєнному відродженню та євроінтеграції України «Співпраця науки, бізнесу та влади: розвиток євроінтеграційних ідей та професійної спільноти в Україні»* : тези доп., м. Одеса. 21 грудня 2023 р.
34. Журавльова З.Ю. Плоска мішана задача теорії пружності для півсмуги під впливом динамічного навантаження. *Матеріали V міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки»* : тези доп., м. Київ, 28-30 серпня 2019 р. С. 38.
35. Журавльова З.Ю. Про напружено-деформівний стан поропружного паралелепіпеда. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи»* : тези доп., м. Київ, 2024 р. С. 130–132.
36. Журавльова З.Ю. Про один випадок аналітичного обернення інтегрального перетворення Лапласа. *Міжнародна міждисциплінарна науково-практична конференція «Відкрита наука України: візійний дискус в умовах воєнного стану»* : тези доп., м. Ужгород, 26-28 квітня 2023 р.
37. Журавльова З.Ю. Точний розв'язок плоскої задачі поропружності для двошарової півсмуги. *Інформаційні технології – 2024 (IT-2024)* : тези доп., м. Київ, 16 травня 2024 р. С. 205–27.
38. Mishuris G., Protserov Yu., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Poroelastic state of a rectangular domain with an imperfect interface. *MSML 2025 – 3rd International Seminar on Modelling, Simulation and Machine Learning for the Rapid Development of Porous Materials* : тези доп., UK, Keele, March 24-26, 2025.
39. Reut V., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. A wave field of a semi-strip under a nonstationary load. *ECOMAS MSF 2019*: тези доп., Sarajevo, Bosnia-Herzegovina, 18-20 September 2019. P. 383–386.
40. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. On a stress state of the poroelastic layer with an axisymmetric cylindrical hole. *5th International conference Optimization and Analysis of Structures* : тези доп. Tartu, Estonia, 28-29 August 2023. P. 28–29.
41. Vaysfeld N., Zhuravlova Z. On stress state of multilayered hollow poroelastic cylinder. *Book of abstracts IWPDF 2025 4th International Workshop on Plasticity, Damage and Fracture of Engineering Materials* : тези доп. Istanbul, Türkiye, 24-26 September 2025. P. 26–27.
42. Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. The exact solution of an axisymmetric problem for a semi-infinite poroelastic cylinder. *International conference of young mathematics* : тези доп. Kyiv, 1-3 June 2023. P. 1–3.
43. Zhuravlova Z. A nonstationary problem of the theory of elasticity for a quarter-plane. *VI International scientific conference "Modern problems of mechanics"*: тези доп. м. Київ, 2021.
44. Zhuravlova Z. Method of inversion of Laplace transform in some problems of dynamic elasticity. *16th International Conference "Dynamical Systems Theory and Applications"* : тези доп. online, 6-9December, 2021. P. 6–9.
45. Zhuravlova Z. On consideration of transmission conditions for a multilayered poroelastic rectangle with a thin interface.*International young scientists conference*

on material science and surface engineering : тези доп. Lviv, 24-26 September 2025. P. 207–210.

46. Zhuravlova Z. The axisymmetrical poroelasticity problem for a radially multilayered hollow semi-infinite cylinder. *International Conference of Young Mathematicians* : тези доп., м. Київ, 4-6 червня2025. P. 4–6.
47. Zhuravlova Z. The investigation of stress state of an axisymmetric poroelastic cylinder. *International young scientists conference on material science and surface engineering* : тези доп., м. Львів, 27-29 вересня 2023. P. 208–209.
48. Zhuravlova Z. The Torsion Problem of Finite Cylinder with Different Coupling Conditions Between its Layers. *Scientific and practical conference «Mathematical modeling and experimental studies of civil and mechanical engineering problems»*: тези доп., Bratislava, Slovakia, 2025. P. 3.

АНОТАЦІЯ

Журавльова З. Ю. Тривимірні квазістатичні задачі поропружності для складених структур з плоскими та циліндричнми поверхнями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, Львів, 2026.

Дисертаційну роботу присвячено розробці та застосуванню аналітичного методу розв’язання нових крайових задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями. Актуальність дослідження зумовлена широким застосуванням поропружних матеріалів у природних і технічних системах та обмеженою кількістю точних аналітичних розв’язків тривимірних задач поропружності, зокрема для багатошарових структур і тіл з тонкими поропружними прошарками.

Метою роботи є розв’язання наукової проблеми побудови та дослідження нового класу крайових задач теорії поропружності для структур з плоскими та циліндричними поверхнями, за допомогою нового аналітичного методу та виведення узагальнених умов сполучення для шаруватих поропружних тіл з тонкими прошарками залежно від порядків їхніх поропружних характеристик. Для цього застосовано методи інтегральних перетворень Фур’є та Ганкеля, матричне диференціальне числення та асимптотичний підхід.

Запропонований метод дозволив звести тривимірні крайові задачі до одновимірних векторних задач у просторі трансформант і отримати замкнуті аналітичні розв’язки нового класу задач поропружності. У декартовій та циліндричній системах координат розв’язано крайові задачі для наступних тіл:кубоїдів, прямокутних областей, порожнистих та суцільних циліндрів, шарів з циліндричним включенням та отвором і клиновидного шару. Досліджено поропружний напружено-деформований стан, а також визначено перші частоти пікового амплітудного відгуку скінченних поропружних тіл.

Розроблений підхід поширено на шаруваті поропружні структури з ідеальним контактом і з тонкими поропружними прошарками. Виведено

узагальнені умови недосконалого сполучення, що враховують вплив механічних і фільтраційних характеристик прошарків на поропружний відгук. Встановлено закономірності впливу геометричних параметрів, властивостей матеріалів, типу та частоти навантаження і граничних умов на розподіл напружень і порового тиску.

Наукова новизна роботи полягає у вирішенні проблеми розв'язання нових крайових задач теорії поропружності для тіл з плоскими та циліндричними поверхнями, отриманні замкнутих аналітичних розв'язків для тіл з міжфазними поверхнями та шаруватих структур з тонкими поропружними прошарками, а також у визначенні спектральних характеристик поропружних тіл. Отримані результати мають важливе теоретичне та практичне значення і можуть бути використані як еталонні розв'язки для верифікації числових методів.

Ключові слова: поропружні структури, декартова система координат, циліндрична система координат, інтегральне перетворення Фур'є, інтегральне перетворення Ганкеля, матричне диференціальнечислення, асимптотичний метод, шаруваті поропружні структури, тонкі поропружні прошарки, умови сполучення.

ABSTRACT

Zhuravlova Z. Yu. Three-dimensional quasi-static poroelasticity problems for composite structures with flat and cylindrical surfaces. – Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the speciality 01.02.04 "Mechanics of Deformable Solids". – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2026.

The dissertation addresses a fundamental scientific problem related to the study of a new class of boundary value problems in poroelasticity for structures with flat and cylindrical surfaces using a developed analytical method. The research, conducted within the specialty 01.02.04 – Mechanics of deformable solids, focuses on the analytical description of the stress-strain state of poroelastic bodies, taking into account filtration-deformation interaction, multilayered structures, thin poroelastic interlayers, and interfacial surfaces.

The relevance of the study is determined by the need for rigorous analytical models of poroelastic media, which are widely used in geomechanics, geophysics, structural mechanics, materials science, oil and gas engineering, biomechanics, and medicine. The coupling between solid deformation and pore fluid flow significantly complicates the formulation and solution of boundary value problems, especially for layered bodies and structures with thin interlayers. Although modern studies mainly rely on numerical methods, analytical approaches remain essential for revealing fundamental regularities, obtaining closed-form solutions, and providing benchmark results for numerical verification.

The aim of the dissertation is to construct and investigate a new class of poroelasticity boundary value problems in Cartesian and cylindrical coordinate systems using an analytical approach, as well as to derive generalized coupling conditions for layered poroelastic bodies with thin interlayers depending on the orders

of their poroelastic characteristics. The method is based on the application of integral Fourier and Hankel transforms, matrix differential calculation, and an asymptotic approach for modeling thin poroelastic interlayers via imperfect interface conditions.

Closed-form analytical solutions were obtained for a wide range of poroelastic bodies. In the Cartesian coordinate system, solutions were derived for finite and semi-infinite cuboids, and rectangular domains under various loading and permeability conditions. In the cylindrical coordinate system, the poroelastic behavior of solid and hollow cylinders, layers with cylindrical inclusions or holes, and wedge-shaped layers under mechanical and pressure loads was analyzed. For finite bodies, the first frequencies of the peak amplitude response were determined, and their dependence on material parameters, loading type, and boundary permeability was established.

The developed approach was extended to layered poroelastic bodies with ideal interlayer contact. Using matrix differential calculation and recurrent relations, analytical solutions were obtained for structures with an arbitrary fixed number of layers, demonstrated for two- and three-layered configurations. It was shown that contrasts in poroelastic properties significantly affect stress, deformation, and pore pressure distributions.

Particular attention was given to layered bodies with thin poroelastic interlayers. Generalized imperfect coupling conditions were derived using an asymptotic approach, accounting for different orders of shear modulus, permeability, and storativity of the pore space. Eight main and ten additional coupling cases were identified, and analytical solutions were obtained for the basic configurations. It was shown that under mechanical loading the effective stiffness of the interlayer is dominant, whereas under pressure loading filtration and pore characteristics prevail.

The scientific novelty consists in solving new boundary value problems in poroelasticity, developing a new analytical method based on matrix integral transforms and matrix differential calculation, deriving generalized coupling conditions for thin poroelastic interlayers, determining peak amplitude response frequencies, and establishing the influence of geometric parameters, material constants, loading type, and boundary conditions on the poroelastic response.

The obtained results provide a theoretical foundation for further development of analytical and analytical-numerical methods in the mechanics of multilayered poroelastic media and can be used as benchmark solutions for numerical verification. The research has practical significance for applications in geotechnical engineering, construction, materials science, biomechanics, energy, and environmental safety.

Key words:poroelastic structures, Cartesian coordinate system, cylindrical coordinate system, integral Fourier transform, integral Hankel transform, matrix differential calculation, asymptotic method, layered poroelastic structures, thin poroelastic interlayers, coupling conditions.