Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ОЛІЙНИК АРТЕМ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 530.182, 538.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ТОПОЛОГІЧНІ СТРУКТУРИ В НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

104 – Фізика та астрономія

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ Олійник А.О.

Науковий керівник:
Якименко Олександр Ілліч,
доктор фіз.-мат. наук, доцент

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Олійник А. О. Топологічні структури в нелінійних середовищах – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2021.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктор філософії за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика (природничі науки, 104 - фізика та астрономія). – Рукопис.

Дисертація присвячена дослідженню динаміки вихорових структур в нелінійних середовищах. Вивчення ефектів пов'язаних із еволюцією в нелінійних середовищах таких топологічних дефектів є важливим напрямком сучасних досліджень в фізиці конденсованого стану та нелінійній оптиці. Стрімкий розвиток даних галузей відкриває перспективи в області квантових обчислень, транспорті енергії та кутового моменту, фундаментальних досліджень, точних вимірювань прискорень, створення сенсорів обертання тощо.

Динаміку вихорів в багатьох нелінійних середовищах можна описувати схожими моделями, що дозволяє проводити теоретичні дослідження в різних областях нелінійної фізики використовуючи подібні підходи. В даній дисертації за допомогою чисельних симуляцій нелінійного рівняння Шредінгера досліджується формування та особливості еволюції квантових вихорових структур навколо оптичного солітону, який поширюється через нелінійне нелокальне середовище, та в системі двох зв'язаних через бар'єр Бозе-Айнштайнівських конденсатів, що утримуються електро-магнітними пастками із різними геометріями.

Значну увагу в дисертації присвячено дослідженню квантових вихорів в системах із слабким та сильним зв'язками між кільцеподібними аксіальними вертикально з'єднаними надплинними потоками.

Тунельна динаміка між конденсатами, які розділені високим потенціальним бар'єром (слабкий зв’язок), представляє великий інтерес в сучасних теоретичних та практичних дослідженнях. Експерименти продемонстрували, що в таких системах виникають Джозефсонівські осциляції населеностей. Проте, до цього часу лишились недостатньо дослідженими тунельні ефекти між підсистемами, що мають різні ненульові кутові моменти. За допомогою методу усічення мод Галеркіна та прямого чисельного розв'язку рівняння Гросса-Пітаєвського в даній дисертаційній роботі показано, що для системи слабко зв'язаних кілець конденсату із різними кутовими моментами осциляції повного тунельного потоку (ефект Джозефсона) не виникають, в той час як кутовий розподіл потоку виявляється періодичним по аксіальній координаті та залежить від топологічних зарядів під-систем. В дисертації продемонстровано, що така структура тунельного потоку породжує Джозефсонівські вихори, ядра яких знаходяться в області бар'єру між надплинними потоками. Показано, що утворення Джозефсонівських вихорів спричинює спонтанне порушення симетрії (з неперервної аксіальної симетрії до дискретної). Також в даній дисертаційній роботі було досліджено залежність амплітуди Джозефсонівських коливань від початкового дисбалансу населеностей між підсистемами, що розділені високим бар'єром.

В дисертації проведено дослідження динаміки надплинних кільцеподібних потоків, які зливаються (сильний зв'язок) за рахунок поступового зменшення бар'єру між ними. Проаналізовано залежність кінцевого стану системи після злиття від початкового дисбалансу населеностей потоків та їх початкових кутових моментів. Ця залежність пояснена за допомогою аналізу вихорової динаміки в процесі релаксації системи до кінцевого стану. Також показана можливість отримання довгоживучих гібридних вихорових станів, які утворюються завдяки зливанню двох витягнутих в аксіальному напрямку надплинних потоків, та проаналізована їх стійкість. Пояснена відмінність вихорової динаміки під час

злиття надплинних потоків з різними кутовими моментами від співвідношення між радіальними та аксіальними розмірами системи. В дисертаційній роботі розроблена техніка маніпулювання повним кутовим моментом гібридної системи за допомогою плавного переміщення вздовж аксіального напрямку неглибокого залишкового бар'єру із Джозефсонівськими вихорами всередині.

В дисертації досліджено вплив симетрії системи Бозе-Айнштайнівських конденсатів із різними початковими топологічними зарядами на процес їх злиття та утворення кінцевого стану. На основі аналізу динаміки квантових вихорів висвітлено причини неможливості отримання певних енергетично можливих кінцевих станів аксіально симетричної системи надплинних потоків, які зливаються. Показано, що за допомогою порушення аксіальної симетрії утримуючого потенціалу під час злиття конденсатів можна отримати кінцеві стани, які недоступні в аксіально симетричному випадку.

Розвиток атомтроніки - створення аналогів елементів електричних схем на основі Бозе-Айнштайнівського конденсату - вимагає дослідження Джозефсонівського тунелювання та нерівноважної динаміки в системах з різною геометрією. Зокрема, багато уваги приділяється конденсатам, що з'єднані між собою вузьким каналом. В дисертації за допомогою тривимірної симуляції розглянуто турбулентне витікання надплинного потоку через вузький канал, що призводить до утворення інтерференції атомарних потоків та збудження квантових вихорів. Доведено, що при невеликих дисбалансах населеностей між конденсатами, які зв'язані через вузький канал із високим бар'єром, можна отримати стійкі Джозефсонівські коливання тунельного потоку.

Поширення оптичних солітонів в нелінійних середовищах дає можливість спостерігати та досліджувати складні вихорові структури. В дисертації за допомогою чисельного розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера для середовища з тепловою нелокальністю вивчається утворення вихорових структур навколо фундаментальних солітонів (відсутні вузли, в яких інтенсивність поля прий-

має нульове значення) та солітонів високих порядків (наявний як мінімум один вузол інтенсивності), що збурені радіальною або квадрупольною модою. Показано, що при поширенні радіально збуреного фундаментального солітону навколо нього спонтанно утворюється періодична структура вихорових кілець. Продемонстровано, що у випадку радіально збурених солітонів високих порядків до періодичної структури вихорів навколо збуреного фундаментального солітону виникають додаткові пари вихорових та антивихорових кілець. В дисертаційній роботі показано, що квадрупольні збурення солітонів високих порядків породжують периферійні вихорові та антивихорові лінії, які спрямовані вздовж напрямку поширення солітону.

Структура дисертації. Робота складається із вступу, трьох розділів, що відповідають логічно завершеним етапам досліджень, висновків та бібліографії, яка містить 131 посилань. Дисертація включає 36 рисунків. Загальний об’єм роботи становить 126 сторінки друкованого тексту.

Ключові слова: Бозе-Айнштайнівський конденсат, надплинність, нелінійність, квантовий вихор, солітон, ефект Джозефсона, флюксон, конденсоване середовище.

Список публікацій здобувача:

1. A. Yakimenko, O. Matsyshyn, A. Oliinyk, V. Biloshytskyi, O. Chelpanova, and S. Vilchynskii, “Analogues of Josephson junctions and black hole event horizons in atomic Bose-Einstein condensates,” *Low Temperature Physics,* vol. 44, p. 1032, 2018.
2. V. Biloshytskyi, A. Oliinyk, P. Kruglenko, A. Desyatnikov, and A. Yakimenko, “Vortex nucleation in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. A,* vol. 99, p. 043835, 2019.

3. A. Oliinyk, A. Yakimenko, and B. Malomed, “Tunneling of persistent currents in coupled ring-shaped Bose–Einstein condensates,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics,* vol. 52, p. 225301, 2019.
4. A. Oliinyk, I. Yatsuta, and A. Yakimenko, “Symmetry breaking in interacting ring-shaped superflows of Bose–Einstein condensates,” *Symmetry*, vol. 11, p. 1312, 2019.
5. A. Oliinyk, B. Malomed, and A. Yakimenko, “Nonlinear dynamics of Josephson vortices in merging superfluid rings,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 83, p. 105113, 2020.
6. A. Oliinyk, I. Yatsuta, B. Malomed, and A. Yakimenko “Symmetry breaking in weak- and strong- coupled ring-shaped superflows of Bose-Einstein condensates,” in *X Young Scientists Conference, Problems of Theoretical Physics, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24, 2019.*

ABSTRACT

Oliinyk A. O. Topological structures in nonlinear media – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2021.

Thesis for the PhD degree in speciality 01.04.02 – theoretical physics (natural sciences, 104 - physics and astronomy). – Manuscript.

The thesis is devoted to the study of the dynamics of vortex structures in nonlinear media. The investigation of the effects related to the evolution of such topological defects in nonlinear media is an important area of modern research in condensed matter physics and nonlinear optics. The rapid development of these areas offers significant prospects in the field of quantum computing, energy and angular momentum transport, fundamental research, accurate acceleration measurements, creation of rotation sensors, etc.

The dynamics of vortexes in many nonlinear media may be depicted by similar models, which allows for theoretical research in various fields of nonlinear physics using analogous approaches. In the thesis, the formation and features of the evolution of quantum vortex structures around an optical soliton propagating through a nonlinear nonlocal medium and in systems of two Bose-Einstein condensates connected through a barrier and trapped by electromagnetic potentials of different geometries are studied with numerical simulations.

In the thesis, considerable attention is concentrated on the study of the dynamics of vortices systems with weak and strong coupling between annular axial vertically connected superfluid flows.

The tunneling dynamics between condensates, which are separated by a high potential barrier (weak coupling), is of great interest in modern theoretical and practical research. It is well known from the experiment that Josephson oscillations arise in such systems. However, the tunneling effects between subsystems, which carry dif-

ferent angular moments, have not hitherto been sufficiently studied. In the thesis, it is shown by truncated (finite-mode) Galerkin model and direct simulations of the 3D Gross–Pitaevskii equation, that in the case of the system of weakly connected condensate rings, which carry different angular moments, oscillations of total tunneling flow (Josephson effect) do not occur, while the angular distribution of tunneling flow is axially periodic and depends on topological charges of the subsystems. It is shown, that the azimuthal structure of the tunneling flow suggests the formation of Josephson vortices (fluxons), the cores of which are located in the barrier region between superfluid flows. It is demonstrated, that the emergence of Josephson vortices is associated with the spontaneous breaking of the axial symmetry of the tunneling superflows from continuous rotational symmetry to discrete symmetry. The dependence of the amplitude of Josephson oscillations on the initial population imbalance between subsystems coupled by the high barrier is also investigated in this thesis.

A study of the dynamics of merging (strong coupling is formed by gradually reducing the barrier) superfluid ring-shaped flows is conducted. The dependence of final states of this system after the merging on initial population imbalance and angular momentum of flows is analyzed. This dependence is explained with an analysis of the vortex dynamics during the relaxation of the system to a final state. The possibility of obtaining long-lived hybrid vortex states formed by merging of two superfluid flows, which are elongated in the axial direction, is also shown and their stability is analyzed. In the thesis, the difference of vortex dynamics during the merging of superfluid flows with different angular moments depending on the ratio between the radial and axial dimensions of the system is explained. A technique of the controllable manipulation of the total angular momentum of the hybrid system by the gradual movement (along the axial direction) of the barrier, the amplitude of which is reduced to some nonzero value and which contains Josephson vortexes, is developed.

In the thesis, the effect of the symmetry of the system of Bose-Einstein condensates, which carry different initial topological charges, on the process of their

merging and formation of the final state is investigated. The reasons for the impossibility of obtaining certain energetically possible final states of an axially symmetric system of merging superfluid flows are presented using the analysis of the dynamics of quantum vortices. It is shown, that it is possible to obtain the states, which are not available in the case of axial symmetric systems, using the breaking of the axial symmetry of the trapping potential during the merging of the condensates.

Advancement of atomtronics - the creation of analogs of electrical circuits using Bose-Einstein condensate - requires the investigation of the Josephson tunneling and the non-equilibrium dynamic in the systems of different geometries. In particular, much attention is concentrated on condensates, which are connected by a narrow channel. In the thesis, the turbulent outflow of superfluid flow through the channel, which leads to the formation of interference of atomic flows and excitation of quantum vortices, is considered with a 3D symulation. It is proved, that in the case of a small population imbalance between condensates, which are connected by the narrow channel containing a high potential barrier, it is possible to obtain stable Josephson oscillations of the tunneling flow.

Soliton propagation in nonlinear media enables it to observe and investigate complex vortex structures. In the thesis, the emergence of vortex structures around fundamental solitons (there are no nodes, in which the intensity of a field is zero) and higher-order solitons (there is at least one intensity node), which are perturbed by radial or quadrupole mode, is studied with the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation with thermal optical nonlinearity. It is shown, that a regular set of vortex rings spontaneously emerge at the periphery of the radially perturbed fundamental soliton. It is demonstrated, that in the case of radially perturbed higher-order solitons pairs of vortex and anti-vortex rings are added to the regular structure of vortices around the perturbed fundamental soliton. It is shown, that quadrupole perturbations of higher-order solitons generate peripheral vortex and anti-vortex lines, which are oriented along the direction of soliton propagation.

Structure of the thesis. The work consists of an introduction, three sections which correspond to the logically completed stages of research, conclusions and a bibliography that contains 131 links. The thesis includes 36 figures. The total number of printed pages is 126.

Keywords: Bose–Einstein condensate, superfluidity, nonlinearity, quantum vortex, soliton, Josephson effect, fluxon, condensed matter.

List of publications:

1. A. Yakimenko, O. Matsyshyn, A. Oliinyk, V. Biloshytskyi, O. Chelpanova, and S. Vilchynskii, “Analogues of Josephson junctions and black hole event horizons in atomic Bose-Einstein condensates,” *Low Temperature Physics*, vol. 44, p. 1032, 2018.
2. V. Biloshytskyi, A. Oliinyk, P. Kruglenko, A. Desyatnikov, and A. Yakimenko, “Vortex nucleation in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 043835, 2019.
3. A. Oliinyk, A. Yakimenko, and B. Malomed, “Tunneling of persistent currents in coupled ring-shaped Bose–Einstein condensates,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 52, p. 225301, 2019.
4. A. Oliinyk, I. Yatsuta, and A. Yakimenko, “Symmetry breaking in interacting ring-shaped superflows of Bose–Einstein condensates,” *Symmetry*, vol. 11, p. 1312, 2019.
5. A. Oliinyk, B. Malomed, and A. Yakimenko, “Nonlinear dynamics of Josephson vortices in merging superfluid rings,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 83, p. 105113, 2020.
6. A. Oliinyk, I. Yatsuta, B. Malomed, and A. Yakimenko “Symmetry breaking in weak- and strong- coupled ring-shaped superflows of Bose-Einstein condensates,” in *X Young Scientists Conference, Problems of Theoretical Physics, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24, 2019.*

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ***14***

ВСТУП ***15***

РОЗДІЛ 1
ДИНАМІКА ЗВ'ЯЗАНИХ НАДПЛИННИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ СИСТЕМ ***23***

1.1 Вступ ***23***

1.2 Тунелювання в системі слабко зв'язаних надплинних кілець, що обертаються ***28***

1.2.1 Двомодовий аналіз 28

1.2.2 Тривимірний аналіз 42

1.3 Нелінійна динаміка Джозефсонівських вихорів в надплинних кільцях, що зливаються ***50***

1.3.1 Модель 50

1.3.2 Еволюція надплинних потоків, що зливаються 53

1.3.3 Млинцеподібний тороїдальний конденсат 55

1.3.4 Видовжений тороїдальний конденсат 63

1.4 Порушення симетрії в системі взаємодіючих кільцеподібних надплинних потоків Бозе-Айнштайнівського конденсату ***70***

1.4.1 Спонтанне порушення симетрії в стаціонарній системі слабкозв'язаних потоків з топологічними зарядами 70

1.4.2 Роль симетрії для кілець, що зливаються 72

1.5 Висновки ***84***

РОЗДІЛ 2
ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИЙ ЕФЕКТ В ГАНТЕЛЕПОДІБНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ ***87***

2.1 Вступ ***87***

2.2 Модель ***89***

2.3 Турбулентний режим ***91***

2.4 АС ефект Джозефсона ***93***

2.5 Висновки ***95***

РОЗДІЛ 3
УТВОРЕННЯ ВИХОРІВ В ОПТИЧНО НЕЛОКАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ *96*

3.1 Вступ *96*

3.2 Стаціонарні стани в нелінійних нелокальних середовищах *99*

3.3 Вихорові кільця на фундаментальних солітонах *104*

3.4 Вихорові кільця та лінії на солітонах високих порядків *105*

3.5 Висновки *111*

ВИСНОВКИ *112*

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ *114*

ДОДАТКИ *127*

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

РГП — рівняння Гросса-Пітаєвського

БАК — Бозе-Айнштайнівський конденсат

ДВ — Джозефсонівський вихор

АГ — апроксимація Галеркіна

АС — змінний струм (alternating current)

НКГ — нестабільність Кельвіна-Гельмгольца

БКШ — Бардін-Купер-Шріффер (автори теорії надпровідності)

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження топологічних структур в різних середовищах є актуальною галуззю сучасної фізики. Наразі особливо активно вивчаються такі топологічні дефекти як вихори.

Ключовою особливістю вихорових структур є те, що замкнений контур, вздовж якого відбувається циркуляція поля навколо ядра вихору, не можна стягнути в точку, адже в центрі ядра існує дислокація фази. Внаслідок цього, в області ядра фаза й густина потоку поля не є визначеними величинами.

В нелінійних середовищах прояви властивостей вихорів є особливо важливими, адже нелінійний відгук підвищує стійкість багатьох вихорових структур, які в лінійних середовищах дуже швидко деградують.

Нелінійність проявляється в широкому спектрі матеріалів та систем (Бозе-Айнштайнівський конденсат, орієнтаційна нелінійність в рідких кристалах, нелінійні та нелокальні оптичні системи, спінорні хвилі в феритових плівках тощо), процеси в яких часто описуються схожими рівняннями. Внаслідок цього властивості вихорів у вищенаведених матеріалах є близькими. Така універсальність дозволяє розглядати явища в різних нелінійних середовищах на основі подібними математичних моделей та підходів.

Дослідження нелінійних систем відкривають широкі перспективи в області практичних застосувань. Наразі активно розробляються чіпи на основі Бозе-Айнштайнівського конденсату, який поміщено в магнітну пастку. Такі чіпи планується застосовувати як сенсори обертального руху або лінійного прискорення, в області квантових обчислень (створення квантових кубітів та схем) та як елементи пам'яті. Вже багато років інтерферометри на основі БАК застосовуються для надточних вимірювань сили гравітації та ефектів Загальної теорії відносності. Інтенсивно йде розвиток нової дисципліни - атомтроніки, в рамках

якої вивчається можливість створення аналогів елементів електричних ланцюгів: діодів, транзисторів, коливальних контурів тощо. Використовуючи БАК можна проводити дослідження різних ефектів квантової термодинаміки, симулювати поведінку чорних дірок біля горизонту подій, вивчати випромінення Хокінга та моделювати темноматеріальні гало галактик і бозонні зірки. Активно проводяться дослідження можливості використання двокомпонентних та спінорних БАК для вимірювання магнітних полів. З розвитком технічних засобів охолодження БАК, його утримування в магнітних чи лазерних пастках та систем детектування інтерес до вивчення динаміки надплинних вихорових структур постійно зростає. Дослідження надплинних вихорів в БАК дозволяє розвивати галузь створення сенсорів обертання, топологічно захищених кубітів для квантових комп'ютерів та вивчати вплив спонтанного порушення симетрії і тунельні квантові ефекти на макромасштабах.

Іншим важливим напрямком є вивчення поширення оптичних солітонів в нелінійних середовищах. Зокрема, одним з цікавих аспектів динаміки збурених солітонів є утворення різних вихорових структур навколо вісі пучка. Практичні застосування цих досліджень лежать в площині застосування солітонів в хвильоводах, для транспорту енергії в різних тонких експериментах (наприклад, в біологічних дослідах) та для надання надплинним системам квантованого кутового моменту за допомогою Лаггер-Гаусових пучків.

Проблема створення та маніпуляції вихоровими структурами в різних нелінійних середовищах, їх стійкість та взаємодія між собою, можливість впливати на них за рахунок зміни параметрів системи в часі та розробка зручних технік детектування цих структур є актуальними викликами в сучасних теоретичних та практичних дослідженях.

Зокрема, важливими та актуальними задачами є:

- вивчення вихорової динаміки в системах з різною геометрією БАК при слабкому та сильному зв'язках між надплинними підсистемами;
- дослідження утворення та еволюції вихорових структур на периферії збурених оптичних солітонів, що поширюються в нелокальному середовищі.

Роботі над їх розв'язком і присвячена дана дисертація.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота пов’язана із планами науково-дослідних робіт, які проводились у рамках держбюджетних тем та міжнародних проектів на кафедрі квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. А саме:

- "Керований транспорт топологічних збуджень в атомарних схемах для квантових сенсорів та квантових систем обробки інформації", за підтримки Національного фонду досліджень України, № держ. реєстрації 0120U104956, 2020-2022 рр;
- "Топологічні властивості кіральної матерії та Бозе-Айнштайнівських конденсатів у магнітному полі", за підтримки МОН України, № держ. реєстрації 0119U100335, 2019-2021.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є теоретичне дослідження вихорової динаміки в слабко та сильно зв'язаних надплинних кільцеподібних конденсатів, Джозефсонівського тунелювання в системі БАК з гантелеподібною геометрією та дослідження утворення і поширення вихорових структур в нелінійних оптичних середовищах з тепловою нелокальністю.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні завдання:

- Дослідити тунелювання у системі слабкозв'язаних коаксіальних вертикально з'єднаних кільцеподібних надплинних потоків БАК.
- Дослідити динаміку коаксіальних вертикально з'єднаних кільцеподібних надплинних потоків БАК, що зливаються (сильний зв'язок), в залежності від параметрів системи. Визначити вплив вихорової динаміки та релаксаційних процесів на отримання кінцевого стану системи після злиття надплинних потоків.
- Вивчити вплив симетрії та її порушення у системі коаксіальних вертикально з'єднаних кільцеподібних надплинних потоків БАК на процес їх злиття та утворення кінцевого стану.
- Розглянути турбулентну динаміку в системі БАК, що взаємодіють через вузький канал. Дослідити для даної геометрії тунелювання надплинної речовини через бар'єр між підсистемами зі слабким дисбалансом населеностей.
- Дослідити генерацію вихорових структур навколо збуджених фундаментальних солітонів та солітонів високих порядків, що поширюються крізь нелінійне нелокальне середовище.

Об'єктом дослідження є квантовані вихори в нелінійних середовищах.

Предметом дослідження є народження та динаміка вихорових структур в нелінійних середовищах.

Методами дослідження є чисельний аналіз дисипативного та консервативного нелінійного рівняння Шредінгера, що добре описує різні аспекти динаміки оптичних солітонів в нелінійних середовищах та поведінку атомарних надплинних систем. Також застосовувався аналіз та чисельний розв'язок рівнянь в рамках апроксимації Галеркіна (метод усічення мод), що використовувався для дослідження слабкого зв'язку між коаксіальними вертикально з'єднаними кільцеподібними потоками БАК.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Встановлено, що у випадку слабкого зв'язку двох кільцеподібних БАК з різними квантованими кутовими моментами амплітуда повного Джозефсонівського тунельного потоку дорівнює нулю. Натомість утворюється періодичний по аксіальному куту тунельний потік, який визначає формування Джозефсонівських вихорів, що знаходяться між конденсатами в області низької густини та порушують неперервну аксіальну симетрію до дискретної.
- Виявлено, що при наявності ненульової різниці хімічних потенціалів між кільцеподібними БАК з різними кутовими моментами Джозефсонівські вихори обертаються та можуть викривлюватись на неоднорідностях.
- Показано, що кінцевий стан системи кільцеподібних БАК, які зливаються, сильно залежить від початкових завихреностей кілець, дисбалансу населеностей та стиснення системи в аксіальному напрямку.
- Виявлено, що для стиснених в аксіальному напрямку систем кільцеподібних БАК з різними завихреностями існують порогові значення початкових дисбалансів, які відділяють фінальні стани з різними завихреностями.
- У випадку злиття систем, що сильно витягнуті в аксіальному напрямку, показана можливість отримання довгоживучих гібридних вихорових станів та їх стабілізація і маніпулювання повним кутовим моментом такої системи.
- Продемонстровано, що за допомогою порушення обертальної симетрії потенціалу-пастки, в якому утримуються стиснені в аксіальному напрямку кільцеподібні БАК, що зливаються, можна маніпулювати кінцевим станом такої системи та отримувати фінальні завихреності, які не спостерігались у випадку аксіально симетричного потенціалу-пастки.
- Виявлено, що залежність амплітуди Джозефсонівських коливань між двома БАК, зв'язаними через бар'єр, від дисбалансу населеностей має ви-

разно нелінійний характер із наявністю різкого максимуму в області низьких значень дисбалансу.

- Показано, що в БАКах, які взаємодіють через вузький канал, можна спостерігати Джозефсонівські осциляції та нерівноважну динаміку з утворенням вихорових збурень та інтерференцією надплинних потоків.
- Виявлено, що радіальне збурення фундаментального оптичного солітону, який поширюється в нелінійному середовищі з тепловою функцією відгуку, породжує вихорові кільця на периферії солітону.
- Показано, що радіальне збурення оптичних солітонів високих порядків у випадку поширення в нелінійному середовищі з тепловою функцією відгуку породжує додаткові пари вихорових та антивихорових кілець навколо осі солітону. Натомість у випадку квадрупольних збурень утворюються пари вихрових та антивихорових ліній, що знаходяться на периферії солітону та спрямовані вздовж оптичної вісі.

Практичне значення одержаних результатів. Дослідження, що були проведені в рамках даної дисертації відкривають нові перспективи для експериментального та теоретичного дослідження Джозефсонівських контактів, вихорових структур та вихорової динаміки у системах БАК, що утримується в оптичних або магнітних пастках. Отримані в дисертації гібридні вихорові стани в тороїдальних БАКах можуть бути застосовані в рамках створення атомтронних приладів чи сенсорів. Досліджені в цій дисертаційній роботі вихрові кільця і лінії, які виникають під час проходження оптичних солітонів в нелінійному середовищі, можна розглядати як будівельні блоки для спонтанного або навіть інженерного створення більш складних топологічних структур, таких як вихрові з'єднання та вузли.

Особистий внесок здобувача. Результати опубліковано в роботах [1-5].

1. В роботі [1] здобувачем проведено чисельні симуляції та їх аналіз для розділу про Бозе-Айнштайнівський конденсат в гантелеподібному потенціалі.

2. В роботі [2] автор брав участь у розробці коду, проведенні чисельних симуляцій та аналізі поведінки вихорових структур, що виникають навколо радіально збурених фундаментальних оптичних солітонів в нелінійних нелокальних середовищах.

3. В роботах [3-4] здобувачем було проведено чисельні симуляції в рамках наближеної моделі Галеркіна та прямого моделювання 3D рівняння Гросса-Пітаєвського для дослідження особливостей тунелювання між слабко зв’язаними паралельними коаксіальними кільцями Бозе-Айнштайнівського конденсату з різними кутовими моментами та динаміки кілець конденсату з різними геометріями та завихреностями при умові сильного зв’язку між ними.

4. В роботі [5] автором за допомогою прямого чисельного розв’язку 3D рівняння Гросса-Пітаєвського було досліджено вплив аксіальної симетрії на фінальні стани в системах із сильним зв’язком між паралельними коаксіальними кільцями Бозе-Айнштайнівського конденсату з різними завихреностями.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових семінарах кафедри квантової теорії поля Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (м. Київ, Україна), на науковій школі від університету Осло в Трускавці (School «The basic ideas and concepts behind the modern High-Energy Physics and Cosmology» (5-16.10.2018), Truskavets, Ukraine) і також були представлені на наукових конференціях та школах]:

1. Workshop on Atomtronics, Centro de Ciencias de Benasque Pedro Pascual, Spain, 2019, May 05 – May 18

2. Workshop on Fundamentals on Quantum Transport, ICTP, Trieste, Italy, 7-11 August, 2017

3. X Young Scientists Conference: Problems of Theoretical Physics, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24, 2019

4. College on Energy Transport and Energy Conversion in the Quantume Regime, ICTP, Trieste, Italy, 12-30 August, 2019

Публікації. Представлені у дисертації матеріали опубліковано у 5 роботах в провідних міжнародних реферованих журналах [1-5] та в 1 друкованому матеріалі конференції [6].

Структура дисертаційної роботи. Робота складається із вступу, трьох розділів, що відповідають логічно завершеним етапам досліджень, висновків та бібліографії, яка містить 131 посилань. Дисертація включає 36 рисунків. Загальний обсяг роботи становить 126 сторінки друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
ДИНАМІКА ЗВ’ЯЗАНИХ НАДПЛИННИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ СИСТЕМ

1.1 Вступ

Дослідження стійких потоків в тороїдальних БАК як прояв надплинності є актуальною задачею фізики конденсованого стану. Стійкість забезпечується завдяки кільцеподібному потенціалу-пастці, який продукує великий центральний отвір навколо вісі симетрії хмари конденсату. Як наслідок, ядро вихору, що відповідає надплинному потоку в такій кільцеподібній системі, є замкненим в центрі кільця за допомогою структури потенціалу-пастки, що робить стійкими навіть багатозарядні вихорові системи. Крім того, стабільність надплинного потоку в одному кільці БАК дає можливість розглянути вплив квантованих кутових моментів в системі двох паралельних коаксіальних слабко зв'язаних надплинних кілець на Джозефсонівський ефект. В надпровідниках кільцеві Джозефсонівські контакти є добре відомими об'єктами [7-17], в тому числі і їх дискретні версії [18,19].

Попередні теоретичні дослідження [20-31] викликали значний інтерес до систем зв'язаних кільцеподібних БАК. Два ідентичних паралельних коаксіальних надплинних кільця, що розділені в аксіальному напрямку за допомогою потенціального бар'єру, розглядались в контексті спонтанних генерацій вихорових ліній [32] та утворення дефектів за допомогою механізму Кіббла-Зурека (the Kibble-Zurek mechanism) [33]. В даній дисертації буде розглянуто тунелювання слабко зв'язаних квантованих надплинних потоків у двокільцевій системі. Схематичне зображення двокільцевої геометрії зображено на Рис. 1.1. Аналіз виконується на базі тривимірного рівняння Гросса-Пітаєвського та апроксимації з усіченою кількістю мод (finite-mode approximation), або, як її ще назива-

ють, апроксимації Галеркіна. В загальному вигляді АГ вводиться у вигляді шести рівнянь з шістьма ступенями вільності, які представляють моди обертання кілець конденсату з азимутальними квантовими числами (завихреностями) 0 та ±1. Для початкових умов у вигляді однакових завихреностей кілець аналіз в даній дисертації передбачає появу АС ефекту Джозефсона. Інші примітні динамічні стани, як слідує з чисельних симуляцій, є *гібридними станами*, утвореними за допомогою мод з протилежними завихреностями верхнього та нижнього кілець (1, -1). Такі стани генерують азимутальні періодичні структури тунельного потоку конденсату крізь бар'єр, що розділяє кільця, внаслідок чого повний тунельний потік є нульовим (АС ефект Джозефсона в системі відсутній). Подібні висновки раніше були отримані і для *напіввихорових гібридів* [34,35] із завихреностями типу (0, 1). Прямий розв'язок тривимірного РГП показує, що зникнення повного тунельного потоку між кільцями в гібридних системах різного типу пов'язане із генерацією Джозефсонівських вихорів (флюксонів), ядра яких знаходяться в Джозефсонівському контакті між підсистемами, в області низької густини конденсату (див. також [23]). До того ж виявилось, що ядра флюксонів обертаються і викривлюються у випадку існування різниці хімічних потенціалів між кільцями, а отже й різниці між населеностями.

Утворення Джозефсонівських вихорів в довгих Джозефсонівських контактах є цікавим проявом квантових властивостей надпровідників [36] та надплинних рідин [37,38]. Зокрема, великий інтерес до Джозефсонівських вихорів в атомарному БАК виник відтоді, як замкнені атомні надплинні потоки, що розповсюджуються у двох паралельних одновимірних БАК, були теоретично досліджені в роботах [37,38]. Багатовимірні флюксони та Джозефсонівські осциляції в БАК зі спін-орбітальною взаємодією розглядались в роботах [39,40]. Флюксони в системі двох копланарних кільцевих БАК були досліджені в статті [23]. В статті [33] було продемонстровано, що в атомарних БАК, які утримуються за допомогою двокільцевого потенціалу-пастки, Джозефсонівські

вихори є топологічно стійкими. Стаціонарні Джозефсонівські вихори були передбачені в масиві лінійно зв'язаних одновимірних БАК в роботі [24]. Нещодавно Джозефсонівські вихори були досліджені в багатошарових системах одновимірних та двовимірних БАК [41].

При зменшенні бар’єру, внаслідок чого збільшується зв’язок між кільцями, Джозефсонівські вихори накопичують все більше і більше енергії. З цього факту органічно виникають питання про стабільність флюксонів і кругових надплинних потоків в кільцях. До того ж цікаво які можна отримати кінцеві стани для таких систем, в яких потоки з різними завихреностями поступово зливаються шляхом зменшення бар'єру між кільцями конденсату.

Стосовно теми злиття квантових потоків є доречним згадати про нестабільність Кельвіна-Гельмгольца, добре відомий у класичній гідродинаміці ефект, що призводить до зростання збурень на межі між двома потоками з різними швидкостями [42]. НКГ грає суттєву роль в знищенні ламінарних потоків, переводячи їх в турбулентний режим. В класичних в'язких рідинах та газах потоки з початково різними швидкостями еволюціонують після змішування у стан з усередненою швидкістю. Для надплинних потоків динаміка НКГ є фундаментально іншою [43]. Зокрема, пара слабко взаємодіючих надплинних потоків в тороїдальних БАК, що мають певні завихреності, може зазнавати переходів між різними вихоровими станами за допомогою проковзувань фази (phase slip), при яких моменти імпульсу змінюються на квантовані величини. На відміну від класичних потоків, у випадку надплинних систем не існує “проміжних швидкостей” для суміші потоків, які до змішування мали різні завихреності. Квантова природа переходів між станами з різними кутовими моментами призводить до далекосяжних наслідків для розвитку чи нівеляції НКГ в ультрахолодних атомарних газах.

Динамічний НКГ на межі розділу у системах двокомпонентних БАК з розділеними фазами досліджувались у роботах [44, 45]. Злиття “сигароподібних”

(витягнутих в аксіальному напрямку) кільцевих надплинних потоків в моделі без врахування дисипації розглядалось в статті [46]. В нещодавній теоретичній роботі [47] на базі консервативного двовимірного РГП було досліджено два протилежно спрямованих потоки, що зливаються. В даній статті планарні зустрічні канали з періодичними граничними умовами імітують два вузьких (в радіальному напрямі) кільцеподібні конденсати, які зливаються коли бар'єр, що їх розділяє, виключається. Однак, опис НКГ в реальному атомарному БАК потребує більш детального аналізу. З одного боку, вихорові лінії, що напряму впливають на розвиток НКГ в двокільцевій системі, є орієнтованими вздовж ортогональних осей, що вимагає для дослідження вихорової динаміки проводити аналіз користуючись повною тривимірною моделлю. Крім того, для аналізу релаксації до стаціонарного стану після злиття початкових надплинних потоків необхідно враховувати слабкі дисипативні ефекти.

В рамках вивчення сильного зв'язку кільцеподібних конденсатів в даній роботі розглянуто вплив нелінійної динаміки квантових вихорів на релаксацію двох надплинних потоків, які зливаються та мають різні початкові завихреності. Одним з важливих елементів дослідження є визначення фінального стану подібних систем після злиття. Чисельний аналіз даних проблем розкриває наступні ефекти: (i) У випадку млинцеподібної (стисненої в аксіальному напрямку) конфігурації системи більш населене кільце може перетягувати у свій стан менш населене кільце та, виходячи з цього, визначати фінальний стан. Зокрема, якщо одне з кілець має топологічний заряд 1 та зливається із кільцем, що не обертається, то фінальний стан системи в залежності від початкової різниці населеностей між кільцями може бути як станом з нульовим кутовим моментом, так і станом з топологічним зарядом 1. (ii) У випадку систем БАК, що є сильно видовженими в аксіальному напрямку, замість розвитку НКГ спостерігається формування довгоживучих гібридних вихорових структур.

Надплинні потоки БАК, що зливаються, також дають прекрасну можливість дослідити спонтанне порушення симетрії у квантових системах на макроскопічних масштабах. Цікаво дослідити вплив симетрії системи на динаміку взаємодіючих надплинних потоків з протилежними завихреностями в двокільцевій системі. У випадку слабкого зв'язку між підсистемами формуються стани з “прихованими завихреностями”, адже якщо топологічні заряди кілець є протилежними, а їх населеності однакові, то відповідний повний кутовий момент системи є нульовим. Подібні системи досліджувались для БАК в роботах [48-55] та для оптичних систем в статтях [56-58]. Динамічна нестабільність з порушенням аксіальної симетрії трьох слабко зв'язних тонких кілець конденсату розглядалась в роботі [59].

Аналіз впливу симетрій системи в даній дисертації розкриває наступні ефекти: (i) Аксіальна симетрія тунельних потоків у двокільцевій системі зі слабким зв'язком між підсистемами спонтанно порушується, внаслідок чого в області низької густини конденсату (в зоні бар'єру, що розділяє підсистеми) формуються Джозефсонівські вихори; (ii) Якщо зливаються два аксіально симетричних кільця з протилежними завихреностями, фінальним станом системи ніколи не є енергетично найнижчий стан з нульовим топологічним зарядом, що є контрінтуїтивним результатом. (iii) Процес злиття надплинних потоків та топологічний заряд фінального стану можна контролювати за допомогою зміни початкового дисбалансу населеностей між кільцями та ініціюванням порушення аксіальної симетрії системи завдяки збуренню зовнішнього потенціалу-пастки.

1.2 Тунелювання в системі слабко зв'язаних надплинних кілець, що обертаються

1.2.1 Двомодовий аналіз

Базовий набір мод, які дозволяють розглядати тунелювання в системі двох слабко взаємодіючих паралельних коаксіальних кілець, можна встановити за допомогою АГ. За цим наближенням 3D рівняння Гросса-Пітаєвського замінюється динамічною системою з декількома ступенями вільності. В цьому розділі вводиться 3D РГП, за чим слідує виведення АГ та аналіз основних сценаріїв динаміки (зміни дисбалансу кількості частинок та кутових моментів кілець) системи зв'язаних БАК кільцеподібної форми в рамках даного наближення.

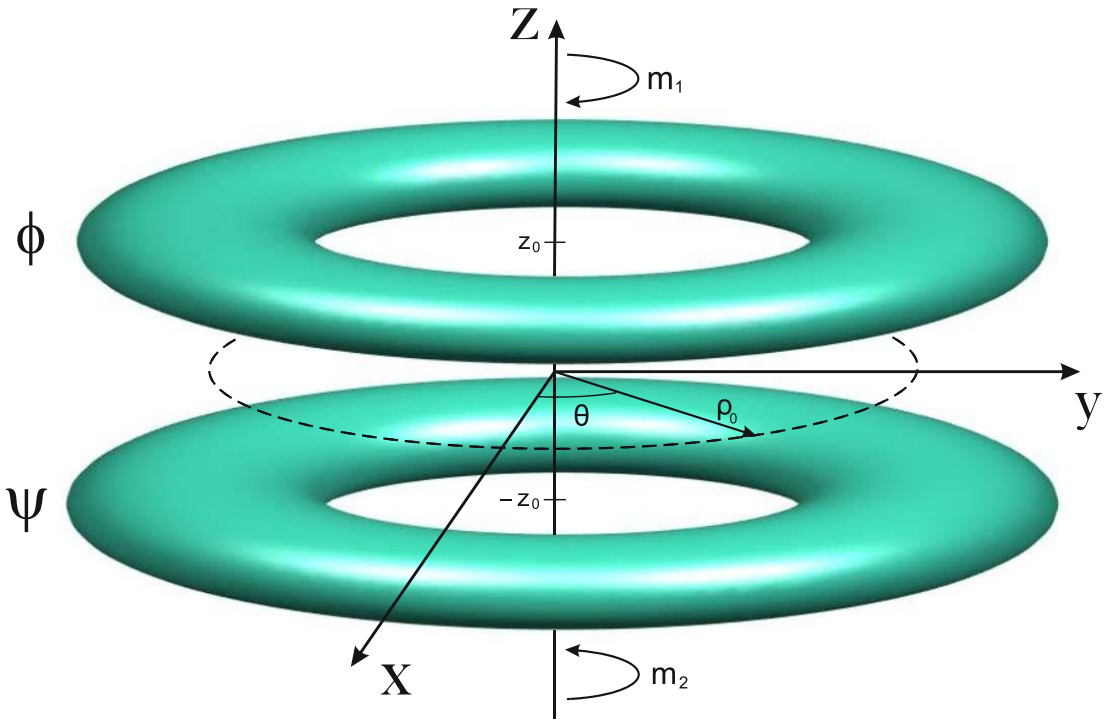

Рис. 1.1 Схематичне зображення геометрії двох слабко зв'язаних коаксіальних кільцеподібних конденсатів з кутовими моментами кілець m_1 та m_2. Показані ізоповерхні густин конденсату.

Запишемо рівняння Гросса-Пітаєвського [60]:

$$i\hbar\partial_\tau\Psi = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi + V_{ext}(\boldsymbol{r})\Psi + g|\Psi|^2\Psi, \tag{1.1}$$

де τ - часова змінна, ∇^2 діє на тривимірну хвильову функцію, $g = 4\pi\hbar^2 a_s/M$ - константа, що стосується двочастинкового розсіяння атомів конденсату, $\mathrm{M} = 3.819 \times 10^{-26}$ кг - маса атомів конденсату, що складається з ^{23}Na, $a_s = 2.75$ нм це довжина розсіяння частинок конденсату. Для роботи з такою системою зручно записувати зовнішній потенціал-пастку у циліндричних координатах $\left(\rho \equiv \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}, \theta, \mathrm{z}\right)$. Зовнішній потенціал $V_{ext}(\rho, z) = V_\rho(\rho) + V_\mathrm{z}(\mathrm{z})$ треба вибрати таким чином, щоб він включав член, який забезпечує радіальну локалізацію конденсату біля $\rho = \rho_0$ та "двоямний" член, який локалізує систему у вертикальному напрямі навколо двох мінімумів $z = \pm z_0$. Потенціал обираємо наступним чином:

$$V_{ext}(\rho, z) = \frac{1}{2}M\omega_r^2(\rho - \rho_0)^2 + \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2 + U_b e^{-\frac{z^2}{2a^2}}, \tag{1.2}$$

де $\mathrm{z}_0 = \mathrm{a}\sqrt{2\ln\left[\frac{\mathrm{U_b}}{\mathrm{M}a^2\omega_z^2}\right]}$.

Тривимірна хвильова функція системи, що локалізована "двоямним" потенціалом, може бути апроксимована в термінах ефективних одновимірних хвильових функцій двох підсистем (в цьому випадку кілець), $\phi(\theta)$ та $\psi(\theta)$, як

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi_\rho(\rho)\left[\Phi_+(z)\frac{\phi(\theta)}{\sqrt{\gamma}} + \Phi_-(z)\frac{\psi(\theta)}{\sqrt{\gamma}}\right], \tag{1.3}$$

де компоненти в розкладі тривимірної хвильової функції $\Psi_\rho(\rho)$ та $\Phi_\pm(z) = \Phi(z \mp z_0)$ мають максимуми абсолютних значень, відповідно, в $\rho = \rho_0$ та $z = \pm z_0$, а коефіцієнти

$$\gamma = 8\pi a_s R^2 \int_0^{+\infty} |\Psi_\rho|^4 \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(z)|^4 dz, \quad (1.4)$$

$$R^{-2} = \int_0^{+\infty} \left|\frac{d\Psi}{d\rho}\right|^2 \rho^{-2} d\rho. \quad (1.5)$$

Перший та другий члени в Рівн. (1.3) відносяться до верхнього та нижнього кілець відповідно.

В безрозмірній формі система рівнянь для азимутальних хвильових функцій верхнього та нижнього слабко зв'язаних кілець, $\phi(\theta, t)$ та $\psi(\theta, t)$, отримується за допомогою підстановки анзацу (1.3) в Рівн. (1.1) та усереднення в напрямках ρ і z, та приймає наступний вигляд [20, 61]:

$$i\phi_t = -\frac{1}{2}\phi_{\theta\theta} + |\phi|^2\phi - \kappa\psi,$$

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{\theta\theta} + |\psi|^2\psi - \kappa\phi, \quad (1.6)$$

де нижні індекси позначають похідні по відповідним змінним, а $\mathrm{t} = \frac{\hbar}{2\mathrm{MR}^2}\tau$ - безрозмірний час і

$$\kappa = \left| R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_-^*(z) \left(\partial_z^2 - \frac{2M}{\hbar^2} V_{\mathrm{z}}(\mathrm{z})\right) \Phi_+(z) dz \right|. \quad (1.7)$$

В системі рівнянь (1.6) залишаємо явну присутність κ для того, щоб мати змогу розглядати окремо режими слабкого та сильного зв'язків. Знаки нелінійних доданків в системі (1.6) відповідають відштовхуванню між частинками, оскільки в рамках даної задачі потрібно зосередитись на тому випадку, коли динаміка надплинних потоків конденсату не схильна до модуляційної нестабільності в азимутальному напрямку, яка виникає в результаті притягання між частинками. В консервативній системі повна кількість частинок та кутовий мо-

мент зберігаються: $N = N_1 + N_2$ =const, $L = L_1 + L_2$ =const, де ці величини для нижнього та верхнього кілець визначаються як

$$N_1 = \int_0^{2\pi} |\phi(\theta)|^2 \, d\theta, \qquad N_2 = \int_0^{2\pi} |\psi(\theta)|^2 \, d\theta,$$

$$L_1 = -i \int_0^{2\pi} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta, \qquad L_2 = -i \int_0^{2\pi} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta. \tag{1.8}$$

Рівн. (1.6) можна порівнювати із подібними рівняннями, які не включають лінійний зв'язок ($\kappa = 0$), але мають нелінійну взаємодію між ϕ і ψ, двокомпонентними хвильовими функціями, що описують одновимірне кільце, або, наближено, двовимірну кільцеподібну область [62]. У рамках моделей, що описуються таким класом рівнянь актуальною проблемою є переходи змішуваності-незмішуваності у бінарному конденсаті.

Конфігурація системи, що допускає існування зустрічних потоків конденсату, характеризується за допомогою завихреностей (топологічних зарядів) $m_{1,2} = \pm m$, див. Рис. 1.1, може бути наближено описана наступним анзацем, що усікає кількість доступних в системі мод та бере в розрахунок можливість існування також компоненти конденсату, що не обертається:

$$\phi(\theta, t) = a_0(t) + a_+(t)e^{im\theta} + a_-(t)e^{-im\theta},$$

$$\psi(\theta, t) = b_0(t) + b_+(t)e^{im\theta} + b_-(t)e^{-im\theta}. \tag{1.9}$$

Ефективні рівняння, що описують еволюцію системи (амплітуд a_0, $a_\pm$ та b_0, $b_\pm$) в часі, можуть бути виведені з Лагранжіану для Рівн. (1.6):

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(\frac{i}{2}(\phi^*\phi_t + \psi^*\psi_t + \kappa\phi^*\psi) \right) + c.c. \right] - \frac{1}{2}(|\phi_\theta|^2 + |\psi_\theta|^2) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(|\phi|^4 + |\psi|^4) \right\} d\theta, \qquad (1.10)$$

де *c.c.* означає комплексно спряжений вираз.

За допомогою підстановки в цей вираз анзацу (1.9) та інтегрування отримуємо:

$$\frac{\Lambda}{2\pi} = \frac{i}{2}\sum_{+,-}\left(a_0^* \frac{da_0}{dt} + b_0^* \frac{db_0}{dt} + a_\pm^* \frac{da_\pm}{dt} + b_\pm^* \frac{db_\pm}{dt} \right) + c.c. - H, \qquad (1.11)$$

де Гамільтоніан виражається як

$$H = \frac{m^2}{2}(|a_+|^2 + |a_-|^2 + |b_+|^2 + |b_-|^2) - [\kappa(a_0 b_0^* + a_+ b_+^* + a_- b_-^*) + c.c.] +$$
$$\frac{1}{2}\left[|a_0|^4 + |a_+|^4 + |a_-|^4 + 4|a_+|^2|a_-|^2 + |b_0|^4 + |b_+|^4 + |b_-|^4 + 4|b_+|^2|b_-|^2 + \right.$$
$$\left. 2\left({a_0}^2 a_+^* a_-^* + {b_0}^2 b_+^* b_-^* + c.c.\right) + 4|a_0|^2(|a_+|^2 + |a_-|^2) + 4|b_0|^2(|b_+|^2\,|b_-|^2)\right]. \qquad (1.12)$$

Ефективний Лагранжіан (1.11) дає можливість отримати систему динамічних рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$i\frac{da_0}{dt} + \kappa b_0 = H_{a0} a_0 + 2a_+ a_- a_0^*,$$
$$i\frac{db_0}{dt} + \kappa a_0 = H_{b0} b_0 + 2b_+ b_- b_0^*,$$
$$i\frac{da_+}{dt} + \kappa b_+ = H_{a+} b_+ + a_0^2 a_-^*,$$
$$i\frac{da_-}{dt} + \kappa b_- = H_{a-} a_- + a_0^2 a_+^*,$$
$$i\frac{db_+}{dt} + \kappa a_+ = H_{b+} b_+ + b_0^2 b_-^*,$$

$$i\frac{db_-}{dt} + \kappa a_- = H_{b-}b_- + b_0^2 b_+^*, \qquad (1.13)$$

де $H_{a0} = |a_0|^2 + 2|a_+|^2 + 2|a_-|^2$, $H_{b0} = |b_0|^2 + 2|b_+|^2 + 2|b_-|^2$, $H_{a\pm} = \frac{m^2}{2} + \left|a_\pm\right|^2 + 2|a_\mp|^2 + 2|a_0|^2$, $H_{b\pm} = \frac{m^2}{2} + \left|b_\pm\right|^2 + 2|b_\mp|^2 + 2|b_0|^2$.

Ця система з шести рівнянь представляє наближення Галеркіна, яке забезпечує адекватний спрощений розгляд різних нелінійних систем [63-65], включаючи системи конденсату Бозе-Айнштайна, що описуються на основі рівняння Гросса-Пітаєвського [66-68].

Підстановка анзацу (1.9) у визначення повної кількості частинок та кутового моменту, що задаються завдяки Рівн. (1.8), дозволяє отримати наступні вирази для цих динамічних інваріантів в моделі наближення Галеркіна:

$$\frac{N}{2\pi} = |a_0|^2 + |b_0|^2 + \sum_{\pm}\left(\left|a_\pm\right|^2 + \left|b_\pm\right|^2\right),$$

$$\frac{L}{2\pi} = \pm\mathrm{m}\sum_{\pm}\left(\left|a_\pm\right|^2 + \left|b_\pm\right|^2\right). \qquad (1.14)$$

В загальному випадку, система (1.13) є еквівалентною Гамільтоновій системі з шістьма ступенями вільності. Існування лише трьох інваріантів, які представляються Гамільтоніаном (1.12), нормою (повною кількістю частинок) та кутовим моментом заданими за допомогою Рівн. (1.14), показує, що така модель в наближенні Галеркіна не може бути інтегрованою, що узгоджується із фактом, що системи пов'язаних РГП (1.6) не є інтегрованими. Зведення системи рівнянь (1.13) до системи з чотирма ступенями свободи (у випадку $a_0 = b_0 = 0$) також не призводить до інтегрованої системи рівнянь.

Рівняння (1.13), отримані за допомогою АГ, дозволяють просту інваріантну редукцію до станів з завихреностями $(m_1, m_2) = (0,0),\ (1,1),\ (-1,-1)$ які досягаються, відповідно, вибором в анзаці (1.9) амплітуд $a_\pm = b_\pm = 0,\ a_0 =$

$b_0 = a_- = b_- = 0$, або $a_0 = b_0 = a_+ = b_+ = 0$. Зокрема, для $(m_1, m_2) = (0,0)$ система рівнянь (1.13) зводиться до системи з двох рівнянь:

$$i\frac{da_0}{dt} = |a_0|^2 a_0 - \kappa b_0,$$

$$i\frac{db_0}{dt} = |b_0|^2 b_0 - \kappa a_0, \qquad (1.15)$$

при $\kappa > 0$. Ця система з двома ступінями свободи є інтегрованою, для неї зберігається виписаний нижче Гамільтоніан (1.20) та величини (1.14) (в даному конкретному випадку вони зводяться до одного динамічного інваріанту).

З іншого боку, якщо розглядати систему з завихреностями $(1,-1)$ чи $(-1,1)$, то *не є можливим* отримати жодної інваріантної підсистеми (окрім тривіального випадку $\kappa = 0$) з менш ніж чотирима ступенями вільності. Проте, в даній дисертації використовувалась повна система рівнянь (1.13) в усіх випадках (для всіх можливих завихреностей підсистем) - зокрема, з метою перевірки стійкості інваріантних підсистем відносно невеликих збурень, що порушують інваріантність. Також варто сказати, що у випадку фіксації змінних $|a_+| = |a_-|$ та $|b_+| = |b_-|$ хвильові функції підсистем можуть бути записані через лінійні комбінації виразів $\sim \sin(m\theta)$ та $\cos(m\theta)$, проте розгляд станів такого типу не був метою даної роботи.

В цій дисертації були зроблені симуляції динаміки на основі Рівн. (1.13) з різними початковими умовами, що відповідають таким завихреностям підсистем як $(m_1, m_2) = (0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (0,1)$, за допомогою стандартного алгоритму Рунге-Кутта. Було перевірено, що симуляції дійсно зберігають динамічні інваріанти (1.12) та (1.14).

Рисунки 1.2 та 1.5 зображають динаміки систем з початковими умовами завихреностей підсистем у вигляді $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(0,1)$ за умови маленького початкового дисбалансу кількості частинок між зв'язаними кільцями

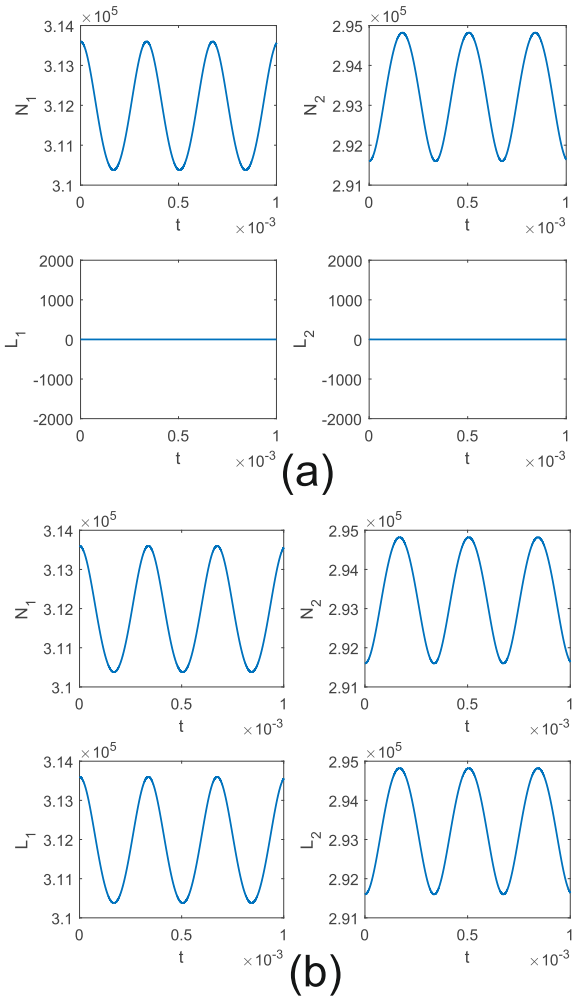

Рис. 1.2 Динаміки кількості частинок та кутового моменту для верхнього та нижнього кілець для параметра $\kappa = 50$, отримані в рамках наближення Галеркіна (чисельний розв'язок системи (1.13)). Початкові умови для кількості частинок в підсистемах та завихреностей: (a) $N_1 = 3.136 \times 10^5, N_2 = 2.916 \times 10^5$, для $(m_1, m_2) = (0,0)$; (b) $N_1 = 3.136 \times 10^5$, $N_2 = 2.916 \times 10^5$, для $(m_1, m_2) = (1,1)$.

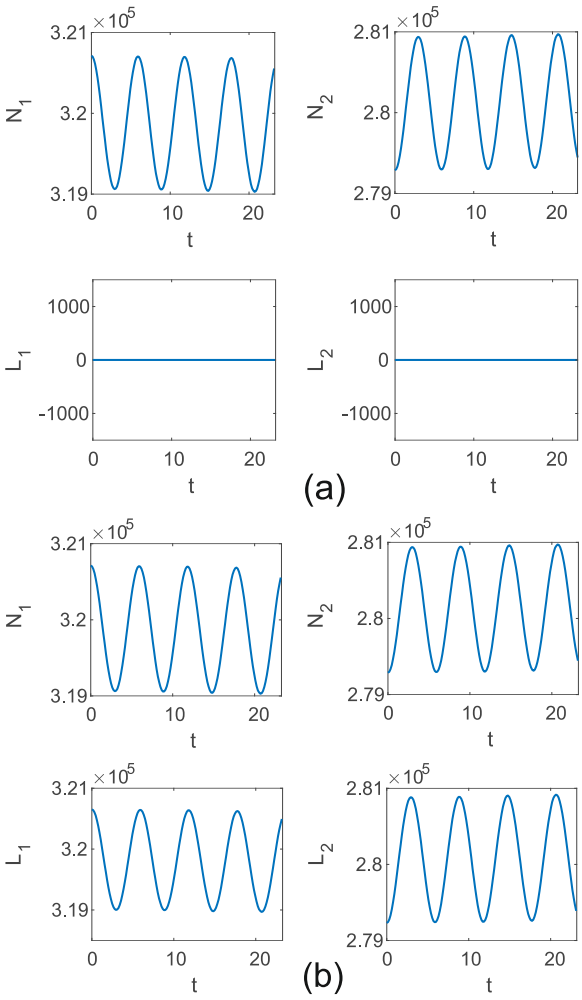

Рис. 1.3 Еволюція кількості частинок та кутового моменту в підсистемах для станів згенерованих за допомогою Рівн. (1.26) з початковими завихреностями: $(m_1, m_2) = (0,0)$ (a); (1,1) (b). Масштаб часової змінної на цих графіках є відмінним від часового масштабу на аналогічних графіках на Рис. 1.2.

та режиму сильної взаємодії ($\kappa = 50$), який є причиною осциляцій з невеликим періодом. Для порівняння, аналогічні результати, отримані за допомогою симуляції 3D РГП (1.1), зображені поряд з відповідними графіками для наближення Галеркіна на Рис. 1.3 та 1.6. Детальне обговорення результатів, що зображені на цих рисунках, буде проведено нище.

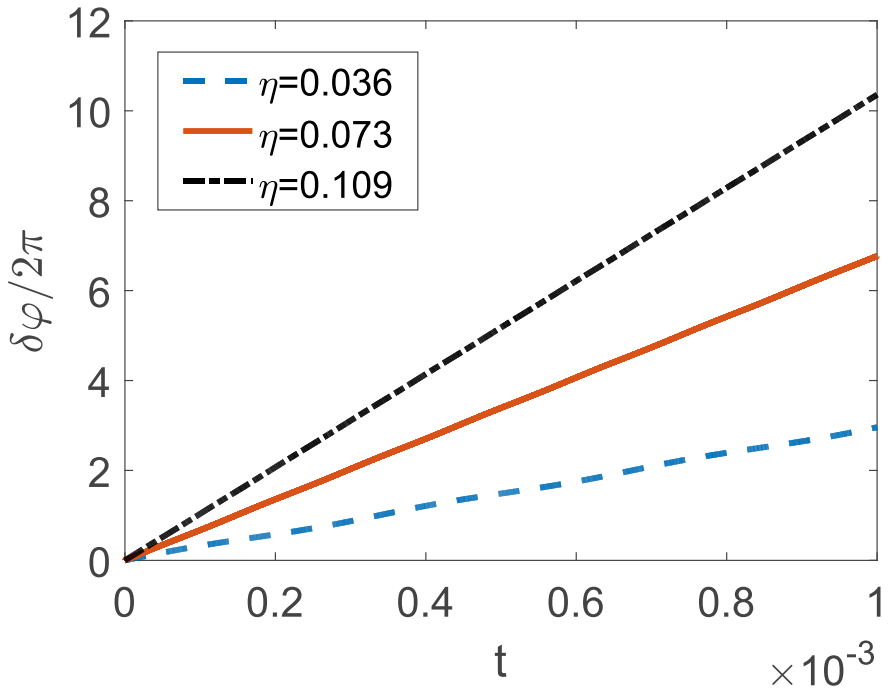

Рис. 1.4 Еволюція різниці фаз між хвильовими функціями верхнього та нижнього кілець для станів згенерованих за допомогою Рівн. (1.13) з початковими завихреностями $(m_1, m_2) = (0,0)$ для різних значень початкового дисбалансу кількості частинок η (див. Рівн. 1.17) та $\kappa = 50$.

Як можна побачити на Рис. 1.2(a) та 1.2(b) осциляції кількості частинок схожі на AC ефект Джозефсона в системах, що сформовані за допомогою зовнішнього потенціалу з двома западинами (на Рис. 1.3(a) та 1.3(b) видно, що схожі результати були отримані за допомогою прямих симуляцій 3D РГП). Щоб

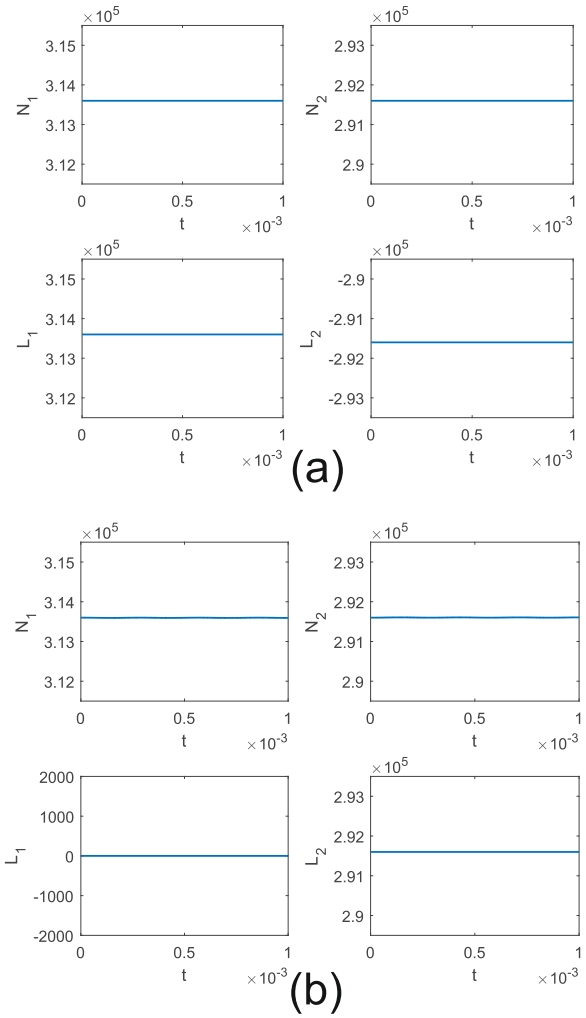

Рис. 1.5 Динаміки кількості частинок та кутового моменту для верхнього та нижнього кілець для параметра $\kappa = 50$, отримані в рамках наближення Галеркіна (чисельний розв'язок системи (1.13)). Початкові умови для кількості частинок в підсистемах та завихреностей: (a) $N_1 = 3.136 \times 10^5, N_2 = 2.916 \times 10^5$, для $(m_1, m_2) = (1, -1)$; (b) $N_1 = 3.136 \times 10^5$, $N_2 = 2.916 \times 10^5$, для $(m_1, m_2) = (0,1)$.

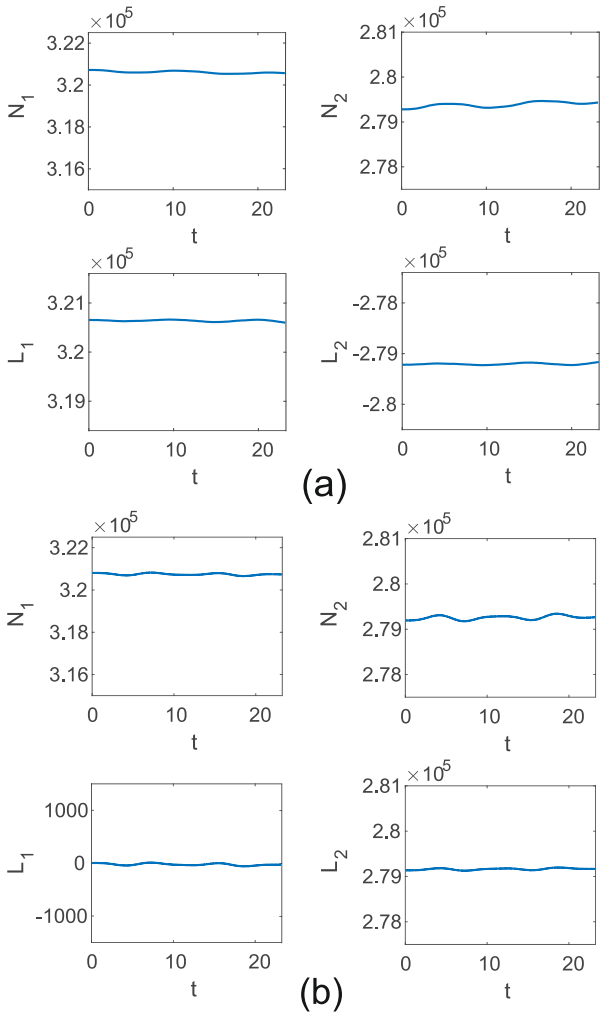

Рис. 1.6 Еволюція кількості частинок та кутового моменту в підсистемах для станів згенерованих за допомогою Рівн. (1.26) з початковими завихреностями: $(m_1, m_2) = (1, -1)$ (a); (0,1) (b). Масштаб часової змінної на цих графіках є відмінним від часового масштабу на аналогічних графіках на Рис. 1.2 та Рис. 1.5.

переконатись, що було отримано саме AC ефект Джозефсона, на Рис. 1.4 зображено, що різниця фаз між верхнім та нижнім кільцями, $\delta\varphi = \arg(\phi)$-$\arg(\psi)$, у випадку завихреностей підсистем $(m_1, m_2) = (0,0)$ (для випадку $(1,1)$ ситуація є такою ж) з дуже гарною точністю змінюється у часі лінійно, що є характерною рисою AC ефекту Джозефсона [69]. З іншого боку, Рис. 1.5 (a,b) демонструють, що Джозефсонівські осциляції, як передбачає наближення Галеркіна, зникають для випадку зустрічного обертання конденсатів $(m_1, m_2) = (1, -1)$ та для випадку $(0,1)$ (як можна побачити на Рис. 1.6(a) та 1.6(b) для $(1, -1)$ та $(0,1)$ відповідно, отримуємо такі ж результати й за допомогою прямих розв'язків 3D РГП).

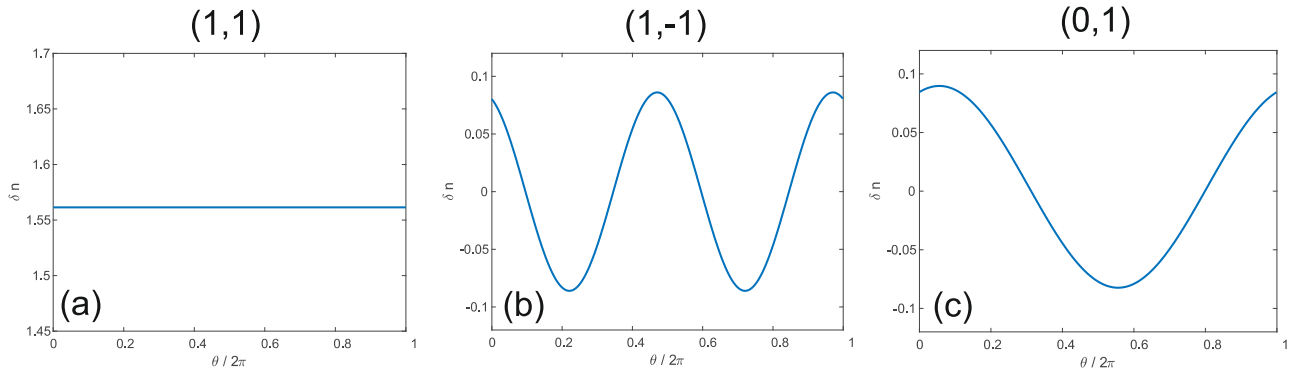

Рис. 1.7 Типові графіки залежностей варіації густини конденсату (1.16) від кута θ в момент часу $t = 0.078 \times 10^{-3}$ для наступних завихреностей підсистем: $(m_1, m_2) = (0,0)$ (a); $(1, -1)$ (b); $(0,1)$ (c).

Також доцільним є порівняти кутові розподіли тунельних потоків конденсату між кільцями. Для цього на Рис. 1.7 зображено варіацію густини,

$$\delta n_\psi(\theta, t) \equiv |\psi(\theta, t)|^2 - |\psi(\theta, t = 0)|^2, \qquad (1.16)$$

як функцію кутової координати θ. Зокрема, у випадку стану з $(m_1, m_2) = (1,1)$ наявність залежності варіації тунельного потоку від кута θ не спостерігається,

в той час, як системи $(1,-1)$ та $(0,1)$ утворюють періодичні структури тунельного потоку з періодами по куту θ, відповідно, $T_\theta = \pi$ та $T_\theta = 2\pi$.

Аналіз експериментальних результатів при детектуванні АС ефекту Джозефсона [69] показує, що відносна різниця кількості частинок,

$$\eta = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}, \tag{1.17}$$

осцилює в часі з маленькою амплітудою $\sim \delta\eta \approx 10^{-2}$. Має сенс розглянути обмеження амплітуди тунельного потоку, які можна зареєструвати на експерименті за допомогою сучасного обладнання, та порівняти з теоретичними даними, що були отримані в даній дисертації. В рамках наближення Галеркіна амплітуда коливань

$$\delta\eta = \eta_{max} - \eta_{min},$$

визначена початковим значенням різниці між кількостями частинок в підсистемах (1.17) та константою зв'язку κ. Рисунок 1.8 демонструє залежність усередненого за 10 періодів коливань значення $\delta\eta$ для стану з $(m_1, m_2) = (0,0)$ від η для різних κ. Як і очікувалось, $\delta\eta$ росте зі збільшенням κ, та $\delta\eta \to 0$ при $\eta(t=0) \to 0$. Примітно, що амплітуди осциляцій $\delta\eta$ для різних κ мають різкий максимум при невеликих значеннях $\eta(t=0)$ та спадають коли початкова асиметрія сильно росте, що нагадує експериментально спостережувані особливості самоорганізованих коливань БАК, захопленого у двоямний потенціал [70].

Для глибшого розуміння поведінки амплітуди коливань $\delta\eta$ розглянемо найпростіший випадок, що описується набором з двох диференціальних рівнянь (1.15) в наближенні Галеркіна для комплексних амплітуд $a_0(t)$ та $b_0(t)$, які можуть бути представлені як

$$a_0 = |a_0|e^{i\alpha(t)}, b_0 = |b_0|e^{i\beta(t)}, \tag{1.19}$$

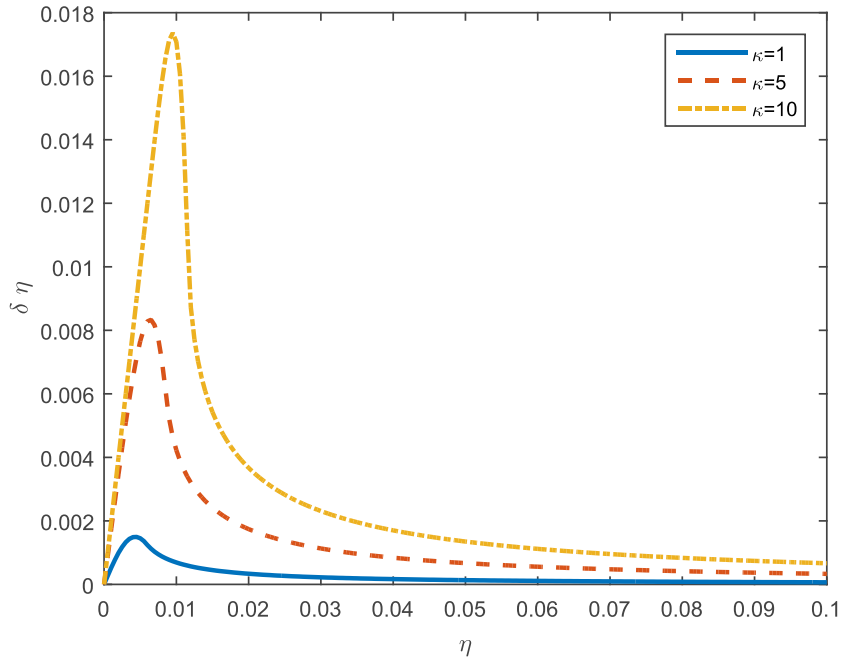

Рис. 1.8 Передбачені за допомогою АГ амплітуди коливань $\delta\eta$ між підсистемами як функції від початкових дисбалансів кількості частинок $\delta\eta$ (t=0) для стану з $(m_1, m_2) = (0,0)$ у випадку різних констант зв'язку κ.

де $|a_0| = \sqrt{A}\cos(\vartheta(t))$, $|b_0| = \sqrt{A}\sin(\vartheta(t))$, $A \equiv |a_0|^2 + |b_0|^2$ це повна норма, що зберігається, $A \geq 0$, а кут ϑ змінюється в межах $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ так, що $\cos(\vartheta)$, $\sin(\vartheta)$ завжди додатні (або нуль).

Дана система з двома ступінями вільності є інтегрованою (як згадувалось вище), адже зберігається норма A та Гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}[|a_0|^4 + |b_0|^4] - \kappa(a_0 b_0^* + a_0^* b_0)$$

$$\equiv \frac{1}{2}A^2\left[1 - \frac{1}{2}sin^2(2\vartheta)\right] - \kappa A sin(2\vartheta)\cos(\alpha - \beta) \qquad (1.20)$$

В даному випадку асиметрія η дорівнює

$$\eta = \frac{|a_0|^2 - |b_0|^2}{|a_0|^2 + |b_0|^2} \equiv cos(2\vartheta), \qquad (1.21)$$

отже, найбільша асиметрія відповідає найбільшому $|cos(2\vartheta)|$, інакше кажучи, найменшому значенню $sin(2\vartheta)$.

Якщо початкові умови відповідають дійсним значенням $a_0(0)$ та $b_0(0)$ одного знаку ($\alpha(0)$=$\beta(0)$=0 в 1.19), значення $sin(2\vartheta)$ визначається збереженням Гамільтоніану у часі:

$$[sin(2\vartheta)]^2 + 4\frac{\kappa}{A}\cos(\alpha-\beta)\, sin(2\vartheta) - \left[sin^2(2\vartheta_0) + 4\frac{\kappa}{A} sin(2\vartheta_0)\right] = 0, \qquad (1.22)$$

де ϑ_0 це початкове значення ϑ (тому обмеження $sin(2\vartheta) \leq 1$ зберігається). Легко побачити, що локального мінімуму (або максимуму) виразу $sin(2\vartheta)$, що розглянутий як функція $\cos(\alpha-\beta)$ не існує (якщо інші параметри зафіксовані). Дійсно, диференціюючи Рівн. (1.22) по $\cos(\alpha-\beta)$ та стверджуючи $\frac{d(sin(2\vartheta))}{d(\cos(\alpha-\beta))} = 0$, бачимо, що ця умова виконується виключно при $sin(2\vartheta) = 0$, проте Рівн. (1.22) не має кореню $sin(2\vartheta) = 0$. Відповідно, найменше та найбільше значення $sin(2\vartheta)$ можуть бути досягнуті лише в крайніх значеннях $\cos(\alpha-\beta)$, що значить $\cos(\alpha-\beta) = \pm 1$. Відповідні корені Рівн. (1.22) дорівнюють

$$sin(2\vartheta) = sin(2\vartheta_0), \qquad (1.23)$$

$$sin(2\vartheta) = 4\frac{\kappa}{A} + sin(2\vartheta_0). \qquad (1.24)$$

Це означає, що $sin(2\vartheta)$ ніколи не приймає значень, що менші за $sin(2\vartheta_0)$, відповідно асиметрія не може бути більшою за початкове значення асиметрії. Якщо κ є малим параметром, то з Рівн. (1.23) та (1.24) слідує, що амплітуда осциляцій асиметрії може бути наближено записана як:

$$\delta\big(cos(2\vartheta)\big) \approx 4\frac{\kappa}{A}|tan(2\vartheta_0)|. \qquad (1.25)$$

Цей вираз демонструє, що амплітуда коливань асиметрії пропорційна до κ, та має різкий максимум при невеликих значеннях $cos(2\vartheta_0)$ (при малій початковій асиметрії). Зауважимо, що для значень початкового дисбалансу, що близькі до нуля, формула (1.25) не працює (див. обмеження на Рівн. (1.24)). При підвищенні початкового дисбалансу від нульового значення спочатку амплітуда осциляцій дорівнює значенню початкового дисбалансу, тобто зростає до моменту досягнення максимуму, подальше спадання цієї залежності наближено описується виразом (1.25). Ці особливості знаходяться в гарному узгодженні з чисельними результатами симуляцій Рівн. (1.15) для станів із завихреностями $(m_1, m_2) = (0,0)$, див. Рис. 1.8.

1.2.2 Тривимірний аналіз

В цьому розділі висвітлюються результати тунельної динаміки для системи кілець Бозе-Айнштайнівського конденсату, що отримані за допомогою чисельних симуляцій тривимірного рівняння Гросса-Пітаєвського (1.1) при зовнішньому потенціалі у вигляді (1.2) з фізичними параметрами $\omega_r = 2\pi \times 123$ Гц, $\omega_z = 2\pi \times 600$ Гц, $U_b = 80\hbar\omega_r$, $a = 0.3l_r$, $l_r = \sqrt{\hbar/(M\omega_r)} = 1.84\,\mu$м, $\rho_0 = 19.23\,\mu$м, які задовільно задають стиснену в аксіальному напрямі кільцеву систему, що показана на Рис. 1.1. Кількість атомів в системі $N = 6 \times 10^5$. Визначаємо обезрозмірений час як $t = \tau\omega_r$, та обезрозмірені координати - $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}/l_r$. Отримуємо обезрозмірене РГП з Рівн. (1.1):

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\Psi + \tilde{V}_{ext}\Psi + \tilde{g}|\Psi|^2\Psi, \qquad (1.26)$$

де $\tilde{g} = \frac{4\pi a_s}{l_r} = 0.0188$. Чисельні розв'язки РГП зручно використовувати для знаходження тунельного потоку конденсату між різними надплинними потоками:

$$\boldsymbol{j}(\mathbf{r}) = \frac{i}{2}[\Psi(\mathbf{r})\nabla\Psi^*(\mathbf{r}) - \Psi^*(\mathbf{r})\nabla\Psi(\mathbf{r})]. \quad (1.27)$$

Стаціонарні стани у вигляді $\Psi(\mathbf{r},\mathrm{t}) = \Psi(\mathbf{r})e^{i\mu t}$ з хімічним потенціалом μ можуть бути знайдені чисельно за допомогою методу еволюції в уявному часі (imaginary-time-propagation method) [71]. Для отримання стаціонарних станів з різними вихоровими профілями фази в нижньому та верхньому кільцях еволюція в уявному часі ініціювалась наступними початковими умовами:

$$\Psi(\mathbf{r}) = |\Psi_0(x,y,z)|e^{iS(z)\theta}, \quad (1.28)$$

де $\Psi_0(x,y,z)$ є чисельно знайденим розв'язком для нульової завихреності у всьому просторі, θ, як і вище, позначає полярний кут в циліндричних координатах, цілі топологічні заряди m_1 та m_2 вдруковуються відповідно до кутових моментів, які мають верхнє та нижнє кільця: $S(z) = m_1$ для $z < 0$ та $S(z) = m_2$ для $z \geq 0$. Подібна процедура вдруковування топологічних зарядів використовувалась для утворення арахісоподібних зовнішніх потенціалів-пасток в [72].

Динаміка БАК в реальному часі отримується за допомогою "способу розділення кроку Фур'є" (split-step Fourier method). Різниця в населеностях кілець (кількостях частинок) встановлюється ще на етапі отримання початкового стану системи. Спочатку знаходиться стаціонарний стан за допомогою додавання асиметричного зовнішнього потенціалу шляхом додавання до симетричного потенціалу (1.2) в просторі верхнього кільця ($z \geq 0$) доданку $U_\delta > 0$. Після чого, в момент $t = 0$ перед початком еволюції в дійсному часі цей зсув зовнішнього потенціалу вимикається, $U_\delta \to 0$. Кожен доданок U_δ відповідає різним значенням різниці хімічних потенціалів між підсистемами. Для симуляцій в даній роботі використовувалось $U_\delta = 1.1\hbar\omega_r$. Також асиметрія системи моделювалась за допомогою лінійно нахиленого зовнішнього потенціалу

вздовж вісі z. Виявилось, що конкретний спосіб створення асиметрії суттєво не впливає на динаміку системи.

На практиці система з різними кутовими моментами кілець може з'являтись випадково як результат охолодження та переходу речовини в стан Бозе-Айнштайнівського конденсату [73]. Подібні гібридні стани також можуть бути створені і в більш контрольований спосіб. Асиметрія між розподілами густин у верхньому та нижньому кільцях робить можливим збудження завихреності лише в одному з кілець за допомогою лазерного променя, що рухається по колу, "мішаючи" конденсат [74,75]. Таким чином можна приготувати стан у вигляді $(0,1)$ або $(1,0)$. Далі, використовуючи техніку вдруковування фази, можливо створити стан $(-1,1)$ або $(1,-1)$ за допомогою Лагер-Гаусового променя $\mathrm{LG}_{-1,0}$, який резонансно взаємодіє із атомами з нульовою завихреністю.

Так само як і спрощена одновимірна модель представлена вище в формі Рівн. (1.6), тривимірне РГП зберігає Гамільтоніан, повну кількість частинок, $\int|\Psi|^2 d\boldsymbol{r} = N$ (обезрозмірена форма), та повний кутовий момент L_z. Природно, що еволюція кількості частинок та кутових моментів в підсистемах сильно залежить від завихреностей m_1 та m_2. Зокрема, можна побачити періодичні осциляції в станах $(m_1, m_2) = (0,0)$ та $(1,1)$, як видно на Рис. 1.3(a) and (b). Симуляції тривимірного РГП показали, що амплітуда осциляцій залежить від початкової різниці населеностей так само, як це було показано вище за допомогою наближення Галеркіна (див. Рис. 1.8). Як згадувалось вище, БАК в двоямному потенціалі демонструє наявність Джозефсонівських осциляцій [69, 76]. В даній дисертації за допомогою чисельних симуляцій було отримано лінійну залежність різниці фаз між підсистемами у часі для станів з $m_1 = m_2$, з чого можна зробити висновок, що в такому режимі дійсно з'являються осциляції Джозефсона. Такі висновки узгоджуються з результатами отриманими наближенням Галеркіна, див. Рис. 1.4.

Рисунки 1.6(a,b) демонструють, що системи з гібридними завихреностями $(m_1, m_2) = (1, -1)$ та $(0,1)$ не генерують Джозефсонівських осциляцій, що також добре узгоджується з передбаченнями наближення Галеркіна, див. Рис. 1.5.

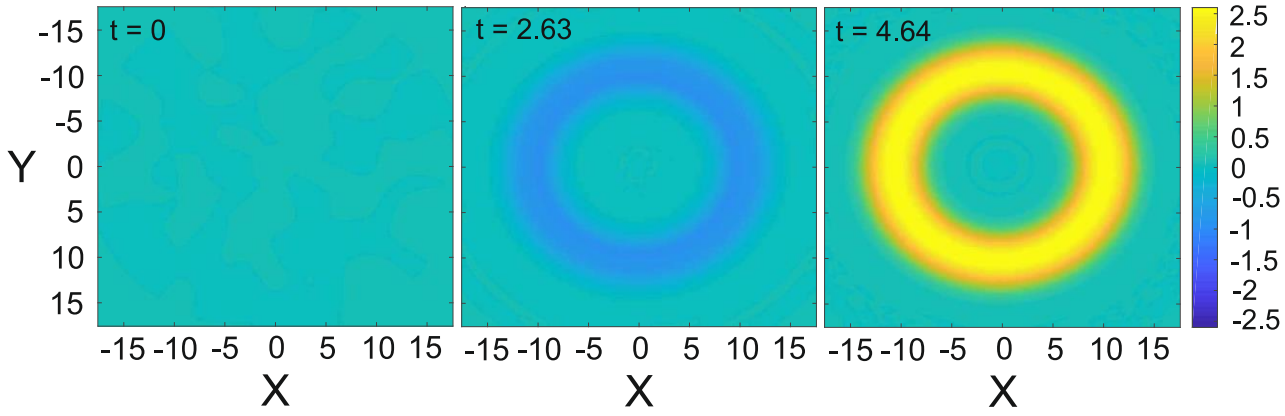

Рис. 1.9 Поперечні перерізи тунельного потоку $j_z(x, y, z = 0)$ в різні моменти часу для стану з $(m_1, m_2) = (1,1)$, отримані завдяки симуляціям Рівн. (1.26).

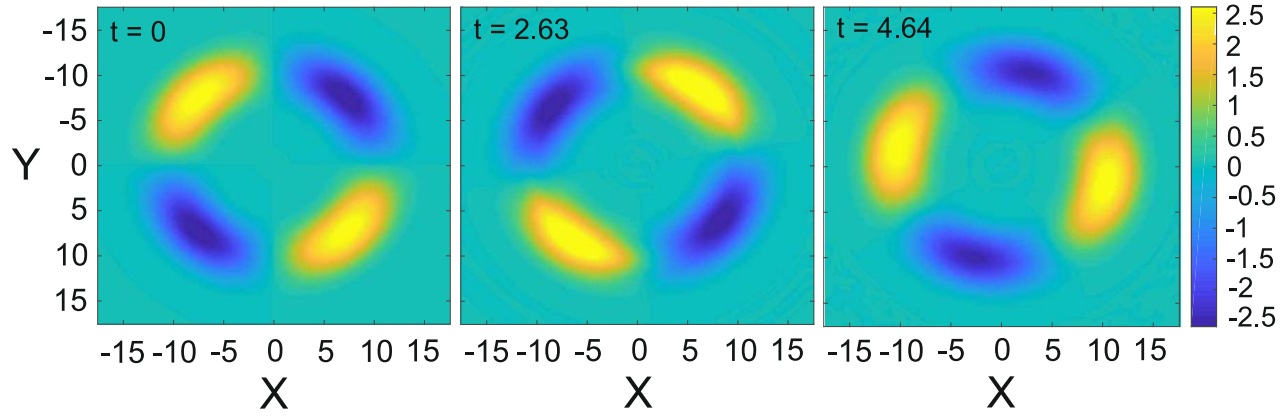

Рис. 1.10 Поперечні перерізи тунельного потоку $j_z(x, y, z = 0)$ в різні моменти часу для стану з $(m_1, m_2) = (1, -1)$, отримані завдяки симуляціям Рівн. (1.26).

Просторові структури тунельних потоків між кільцями можна адекватно ілюструвати за допомогою зображення перерізів розподілу квантово-механічного струму $j_z(z, y, z = 0)$, який визначається Рівн. (1.27). Набір таких перерізів взятих в різні моменти часу, які утворені чисельними симуляціями Рівн. (1.26), зображені на Рис. 1.9, 1.10 та 1.11. Кутові розподіли $j_z(x, y, z = 0)$

в області бар'єру між кільцями для всіх типів гібридних систем знаходяться в чудовому узгодженні з передбаченнями наближення Галеркіна, див. Рис. 1.9-1.11 та 1.7.

Отже, чисельні симуляції РГП та в наближенні Галеркіна передбачають однакові розвитки динамік системи кілець з різними завихреностями: у випадках статичних кілець $(0,0)$ та кілець, що обертаються в одну сторону $(1,1)$, можна спостерігати формування Джозефсонівських осциляцій повного тунельного потоку між кільцями, в той час, як для кілець, що обертаються в протилежні сторони $(1,-1)$, так само як і для випадку $(0,1)$, повний тунельний потік зникає, що нагадує відомий ефект в системах з циліндричним Джозефсонівським контактом [15,16].

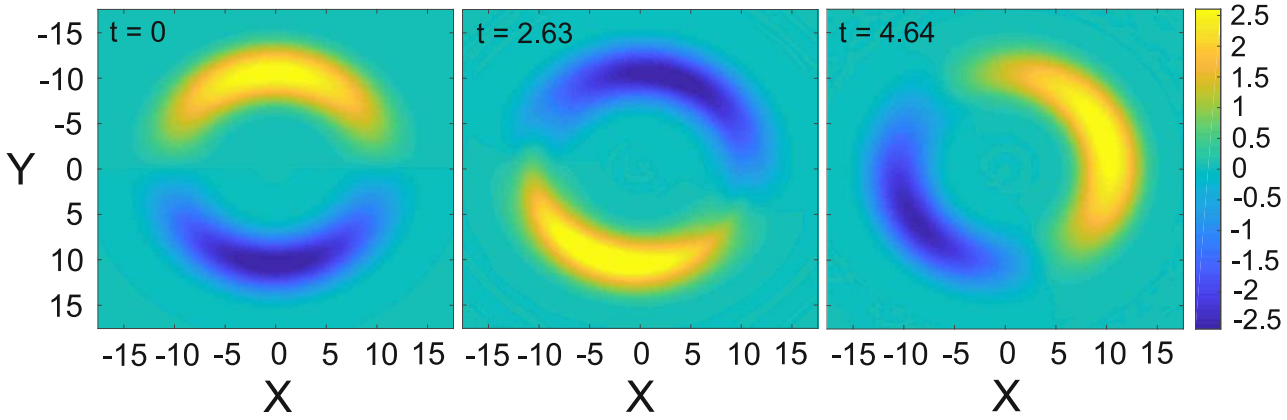

Рис. 1.11 Поперечні перерізи тунельного потоку $j_z(x,y,z=0)$ в різні моменти часу для стану з $(m_1,m_2)=(0,1)$, отримані завдяки симуляціям Рівн. (1.26).

Для глибшого розкриття теми динаміки в гібридних системах знову використаємо вираз для квантово-механічного потоку. Підставимо в (1.27) анзац (1.3) для тривимірної хвильової функції, з $\Phi_+ = |\Phi_+|e^{-i\mu_+ t}$, $\Phi_- = |\Phi_-|e^{-i\mu_- t}$ (хвильові функції стаціонарних станів) та $\phi = e^{im_1\theta}$ і $\psi = e^{im_2\theta}$. Отримуємо:

$$j_z \sim \sin[(\mu_+ - \mu_-)t + (m_2 - m_1)\theta]. \qquad (1.29)$$

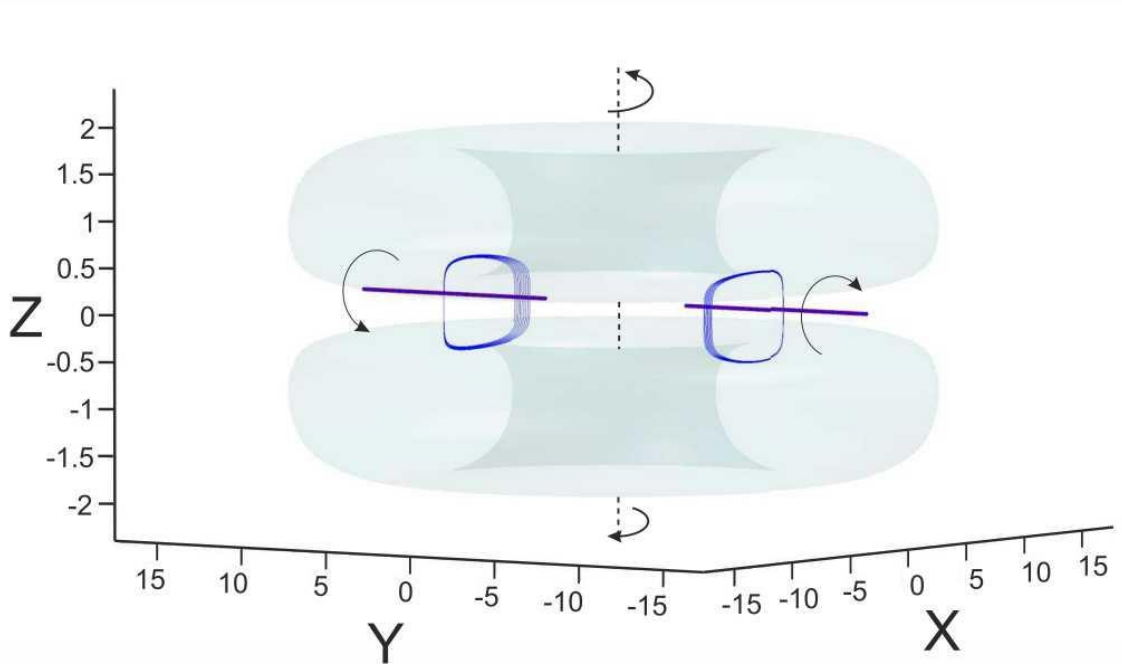

Рис. 1.12 Зображена ізоповерхня густини кілець та ядра вихорів в системі без асиметрії з $(m_1, m_2) = (1, -1)$. Можна бачити вертикально орієнтовану пару вихор-антивихор (відповідають завихреностям кілець $(1, -1)$) та горизонтально орієнтовані флюксони (Джозефсонівські вихори), отримані завдяки симуляціям Рівн. (1.26). Лінії потоків конденсату навколо Джозефсонівських вихорів зображені синіми кривими зі стрілками.

Цей простий вираз узгоджується як з тривимірними симуляціями, див. Рис. 1.9, 1.10 та 1.11, так і з передбаченнями наближення Галеркіна, див. Рис. 1.7(b,c). Зокрема, з Рівн. (1.29) слідує, що повний тунельний потік, який протікає між кільцями, для станів $(1, -1)$ та $(0,1)$ дійсно зникає:

$$\mathrm{J}_{total} = \int_0^{2\pi} j_z d\theta = 0, \tag{1.30}$$

що і було показано в тривимірному аналізі (Рис. 1.6) та за допомогою наближення Галеркіна (Рис. 1.5).

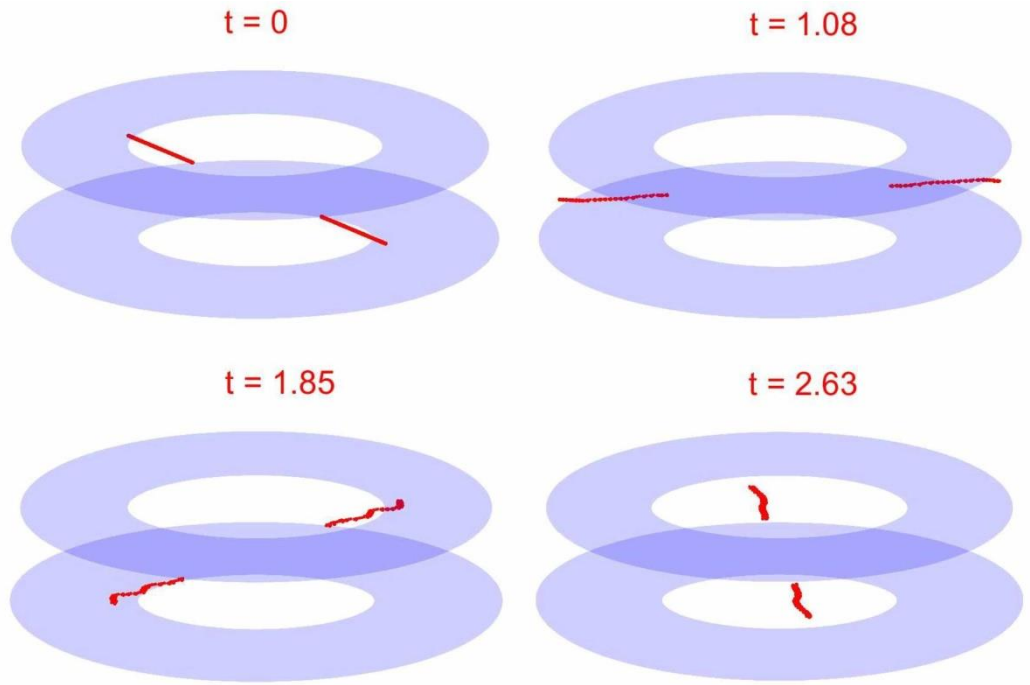

Рис. 1.13 Зображено ізоповерхні густини кілець та ядра Джозефсонівських вихорів, що відповідають асиметричному початковому стану в системі $(1,-1)$ для різних моментів часу. Ядра флюксонів обертаються (внаслідок наявності різниці хімічних потенціалів між підсистемами) і викривлюються.

З іншого боку, для станів $(m_1, m_2) = (1,1)$ та $(0,0)$ ($\phi = e^{i\theta}$, $\psi = e^{i\theta}$, або $\phi = 1, \psi = 1$, відповідно в Рівн. (1.3)), рівняння (1.27) та (1.30) дають AC ефект Джозефсона: $\mathrm{J}_{total} \sim \sin[(\mu_+ - \mu_-)t]$, що узгоджується з результатами, що отримані в обох моделях. Отже, можна стверджувати, що в загальному випадку, стани з (m_1, m_2) де $m_1 = m_2$ утворюють Джозефсонівські осциляції тунельних потоків між кільцями, в той час як системи з $m_1 \neq m_2$ утворюють нульовий повний тунельний потік між підсистемами.

Кутовий розподіл тунельного потоку j_z для гібридних станів $(1,-1)$ та $(0,1)$ можна побачити на Рис. 1.10 та 1.11. Така періодична структура тунельних потоків зумовлює утворення одного Джозефсонівського вихору (флюксону) для системи з $(0,1)$ та пари вихор-антивихор для системи з $(1,-1)$, див.

Рис. 1.12. Для симетричного початкового стану (кількості частинок в кільцях однакові) можна спостерігати стаціонарні Джозефсонівські вихори. Цей результат є схожим на отриманий в дослідженнях [24], де стаціонарні вихори були теоретично отримані в періодичній структурі лінійно зв'язаних одновимірних БАК. Однак, у випадку несиметричної початкової умови отримуємо, що ядра флюксонів обертаються та викривлюються, див. Рис. 1.13. З Рівн. (1.29) явно видно, що азимутальна циклічна частота визначається різницею хімічних потенціалів між кільцями. Це передбачення знаходиться в чудовому узгодженні з великою серією чисельних симуляцій, що були зроблені в рамках даної дисертації для різних значень початкового дисбалансу населеностей між підсистемами.

1.3 Нелінійна динаміка Джозефсонівських вихорів в надплинних кільцях, що зливаються

1.3.1 Модель

При моделюванні нерівноважної динаміки (наприклад, квантової турбулентності [43] або виникнення вихорів [77]), дисипативні ефекти, навіть якщо вони слабкі, грають велику роль в релаксації систем до рівноважних станів. Зокрема, дисипація змушує ядра вихорів дрейфувати до периферії хмари БАК [77-81]. Дисипативні ефекти виникають в БАК, який поміщено в пастку, внаслідок взаємодії конденсату з тепловою компонентою. В умовах, що близькі до термодинамічної рівноваги, для слабкої дисипації можна вивести дисипативне рівняння Гросса-Пітаєвського [82-83]:

$$(i-\gamma)\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi+V_{ext}(\boldsymbol{r},t)\psi+g|\psi|^2\psi-\mu\psi, \qquad (1.31)$$

де $\gamma \ll 1$ є феноменологічним параметром дисипації, а всі інші змінні та константи - такі самі як і для (1.1). Така форма дисипативного РГП активно використовувалась в попередніх роботах на тему вихорової динаміки в конденсатах (див. [43, 77, 84, 85]). В даній дисертаційній роботі припускається, що γ є просторово однорідним параметром, а значення $\gamma = 0.03$ береться як в роботах [43, 77]. Було перевірено, що результати подані нижче суттєво не залежать від конкретного значення $\gamma \ll 1$.

Як і в попередньому розділі розглядаємо тороїдальний конденсат, розділений горизонтальним бар'єром на дві кільцеподібні компоненти. Використовується потенціал-пастка у вигляді:

$$V_{ext}(\rho,z,t)=\frac{1}{2}M\omega_r^2(\rho-\rho_0)^2+\frac{1}{2}M\omega_z^2z^2+V_b(z,t), \qquad (1.32)$$

де горизонтальний бар'єр описується як

$$V_b(z,t) = U_b(t)\exp(-\frac{(z-z_0)^2}{2a^2}), \tag{1.33}$$

а залежна від часу амплітуда бар'єру

$$U_b(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{t_d}\right)u_b, & \text{при } t \le t_d, \\ 0, & \text{при } t > t_d. \end{cases} \tag{1.34}$$

Тут час виключення бар'єру $t_d = 0.015$ с, а z_0- це можливий зсув бар'єру вздовж вісі z.

Проведемо обезрозмірення Рівн. (1.31) як це було зроблено у випадку Рівн. (1.26), внаслідок чого отримуємо обезрозмірене дисипативне РГП:

$$(i-\gamma)\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + V_{ext}\psi + g|\psi|^2\psi - \mu\psi, \tag{1.35}$$

з обезрозміреним зовнішнім потенціалом

$$V_{ext} = \frac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2 + \frac{1}{2}A^2z^2 + \frac{V_b}{\hbar\omega_r}, \tag{1.36}$$

де фактор стиснення системи вздовж вісі z дорівнює

$$A = \frac{\omega_z}{\omega_r}. \tag{1.37}$$

Динаміка вихорів, що спостерігається під час та після злиття кілець, суттєво залежить від параметру A. В даній дисертаційній роботі спочатку висвітлюються ефекти у випадку сильно стисненого вздовж вісі z конденсату (млинцеподібна форма) з типовими значеннями частот зовнішнього потенціалу [74,86]: $\omega_r = 2\pi \times 123$ Гц та $\omega_z = 2\pi \times 600$ Гц, а отже $A = 4.88$. Після того розглядається еволюція для систем з $A < 1$. Безрозмірні параметри зовнішнього потенціалу в Рівн. (1.33) та (1.34) обрані наступним чином: $a = 0.3,\ u_b = 80$.

Надалі всюди в тексті використовуються наступні позначення для безрозмірних величин: ψ - хвильова функція, (x, y, z) - просторові координати, t - час.

Стаціонарні стани, як і раніше, знаходяться чисельно виходячи з Рівн. (1.26) за допомогою методу еволюції в уявному часі з $\gamma = 0$. Для отримання системи кілець з різними завихреностями використовується анзац, схожий на той, який було застосовано вище (1.28):

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi_0(x, y, z)|e^{iS(z)\phi}, \tag{1.38}$$

де ϕ - полярний кут в циліндричних координатах, m_1 та m_2 - цілі топологічні заряди, $S(z) = m_1$ для $z < z_0$ та $S(z) = m_2$ для $z \geq z_0$.

Кількості частинок N_1 та N_2 в верхньому та нижньому кільцях визначаються, відповідно, як

$$N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z_0} |\Psi_0(x, y, z)|^2 dz,$$

$$N_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{z_0}^{\infty} |\Psi_0(x, y, z)|^2 dz, \tag{1.39}$$

Відмітьте, що за допомогою вертикального зміщення $z_0 > 0$ горизонтального бар'єру (1.33) можна легко утворити стан системи, де кількість частинок в одному кільці N_1 (із завихреністю m_1) більша за кількість в іншому N_2 (із завихреністю m_2), і навпаки, якщо обрати $z_0 < 0$. Для опису цього дисбалансу зручно, як і раніше, використовувати параметр

$$P = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2). \tag{1.40}$$

Доречно згадати двокомпонентні системи з некогерентною нелінійною взаємодією між компонентами, які окремо зберігають свою норму впродовж

динаміки. В таких системах існують стаціонарні стани з різними завихреностями та хімічними потенціалами компонент. Зокрема, системи такого типу можуть існувати в станах з “прихованою завихреністю”, коли норми у компонент однакові, а завихреності протилежні, а отже кутовий момент всієї системи дорівнює нулю. Такі системи активно вивчаються в БАК [48-55,62] та оптиці [56-58].

1.3.2 Еволюція надплинних потоків, що зливаються

Амплітуда бар'єру $U_b(t)$ в потенціалі (1.32) зменшується з часом до повного зникнення в момент $t = t_d$, коли два кільця конденсату зливаються в один тороїдальний конденсат.

В даній дисертаційній роботі розглядаються різні режими дисипативної еволюції за допомогою зміни параметра γ в Рівн. (1.31). В наближенні відсутності дисипації, коли $\gamma = 0$, та при сталому зовнішньому потенціалі повна норма $N = N_1 + N_2$, енергія

$$E = \int \left[\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + V_{ext}|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4\right] d\boldsymbol{r}, \tag{1.41}$$

та z-компонента повного кутового моменту системи,

$$\boldsymbol{L} = -\frac{i}{2}\int \{\psi^*[\boldsymbol{r}\times\nabla\psi] - \psi[\boldsymbol{r}\times\nabla\psi^*]\}\, d\boldsymbol{r}, \tag{1.42}$$

зберігаються в чисельних симуляціях, що висвітлені в даній дисертаційній роботі, з дуже гарною точністю. Як видно на Рис. 1.14 в бездисипативному випадку ($\gamma = 0$), повна енергія спадає при $0 < t \leq t_d$ до тих пір, поки потенціальний бар'єр між кільцями повністю не зникне, та залишається сталою при $t > t_d$.

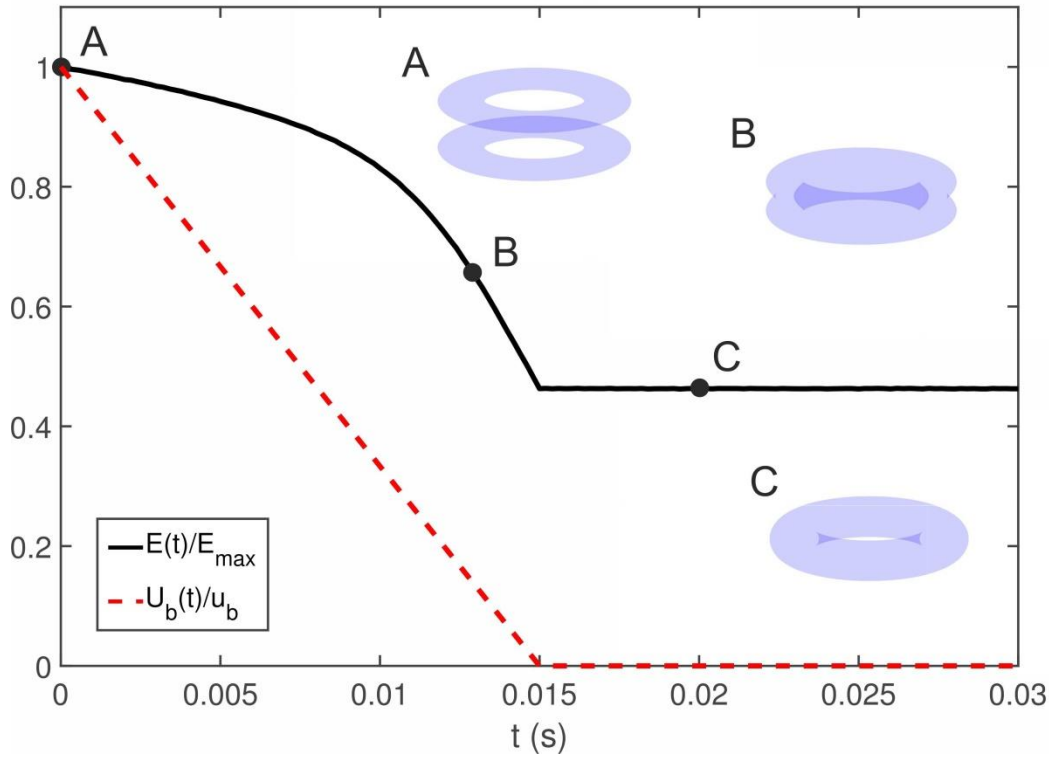

Рис. 1.14 Відношення повної енергії (визначеної в Рівн. (1.41)) до початкового значення енергії $E(t)/E(0)$ (чорна суцільна крива) для кілець, які зливаються, з завихреностями $(0,0)$ від часу в бездисипативній системі ($\gamma = 0$, $\mathrm{A} = 4.88$, див. Рівн. (1.37)). Спадання енергії при $t \leq t_d$ відбувається внаслідок зменшення потенціального бар'єру (1.34), що розділяє кільця. Відповідна амплітуда бар'єру $U_b(t)/U_b(0)$, нормована на початкове значення, показана червоною пунктирною лінією. Рисунки-вставки: приклади 3D ізоповерхонь постійного значення густини конденсату в моменти часу, що відповідають точкам A, B, та C позначеним на енергетичній кривій.

Система, що описується Рівн. (1.35) з $\gamma > 0$ не зберігає ані енергії, ані числа частинок. Хімічний потенціал $\mu(t)$ системи в симуляціях в даній дисертаційній роботі підлаштовувався на кожному часовому кроці так, щоб число частинок конденсату повільно спадало в часі: $N(t) = N(0)\exp(-\frac{t}{t_0})$, де $t_0 = 10$ с

відповідає $1/e$ часу життя конденсату, що використовувався в експерименті [87]. Повне число частинок встановлюємо у кількості $N(0) = 6 \times 10^5$.

Ціль чисельного аналізу полягає у двох речах: (а) По-перше, простежити вихорову 3D динаміку в процесі релаксації системи, що слідує за зникненням бар'єру, який розділяє кільця; (б) По-друге, визначити фінальний стан після злиття кілець та релаксаційної еволюції для різних значень початкової асиметрії (1.40).

1.3.3 Млинцеподібний тороїдальний конденсат

Рисунки 1.15 та 1.16 демонструють типові приклади динаміки злиття млинцеподібних (сильно стиснених у вертикальному напрямі) конденсатів (фактор стиснення $A = 4.88$, див. Рівн. (1.37)) для випадків коли початкова населеність (кількість частинок) в нижньому кільці з завихреністю $m_1 = 1$, відповідно, слабко або сильно домінує ($P = 0.06$ та $P = 0.49$, див Рівн. (1.40)) над населеністю верхнього кільця, яке має завихреність $m = 0$.

Для детектування ядер вихорів використовується алгоритм “розгортання фази” в кожній точці сітки в різних площинах: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ або $z = \text{const}$. Для вертикально орієнтованих вихорових ліній (задетектованих в площинах $z = \text{const}$) використовується червоний (вихори) та синій (антивихори) кольори. Для горизонтально орієнтованих вихорів (задетектованих в нах $x = \text{const}$ або $y = \text{const}$) використовується чорний колір. Важливо зазначити, що алгоритм “розгортання фази” не працює для детектування точного положення вихору у регіонах де густина конденсату дуже мала (в даному випадку важливим є регіон центрального отвору). Тому замість отримання розгорток фази в кожній точці на основі найближчих точок зсув фази навколо центрального отвору в площині $z = \text{const}$ обраховувався при

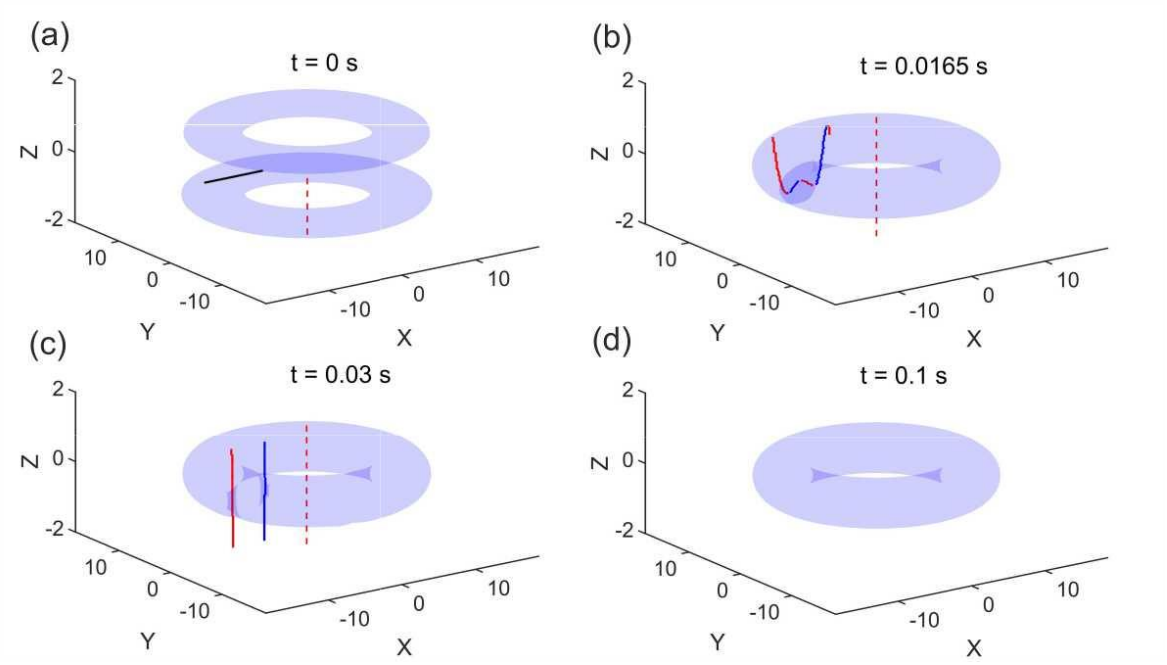

Рис. 1.15 Еволюція кілець конденсату, що зливаються, за умови, що в початковий момент населеність в нижньому кільці з $m_1 = 1$ трохи більша за населеність верхнього кільця з $m_2 = 0$ (параметр асиметрії (1.40) $P = 0.06$, параметр дисипації $\gamma = 0.03$). Показані чотири рисунки з 3D ізоповерхнями постійного значення густини конденсату. Ядро Джозефсонівського вихору, що лежить горизонтально між кільцями в момент часу $t = 0$, відмічене чорною лінією. Ядро вихору, що знаходиться в тороїдальному отворі й відповідає завихреності $m_1 = 1$ нижнього кільця, відмічене червоною пунктирною лінією. Впродовж злиття флюксон (Джозефсонівський вихор) викривлюється та розділяється на вертикально орієнтований вихор (червона суцільна лінія), який впродовж динаміки рухається до зовнішньої периферії конденсату, та антивихор (синя суцільна лінія), що рухається до центрального отвору тороїда. Антивихор анігілює з центральною вихоровою лінією, що веде до фінального стану системи з нульовим кутовим моментом (див. також Рис. 1.17).

обході по великому контуру, що проходить по колу радіусом $\rho = \rho_1$, де ρ_1 це внутрішній радіус Томаса-Фермі (наближення, в якому “край” конденсату шу-

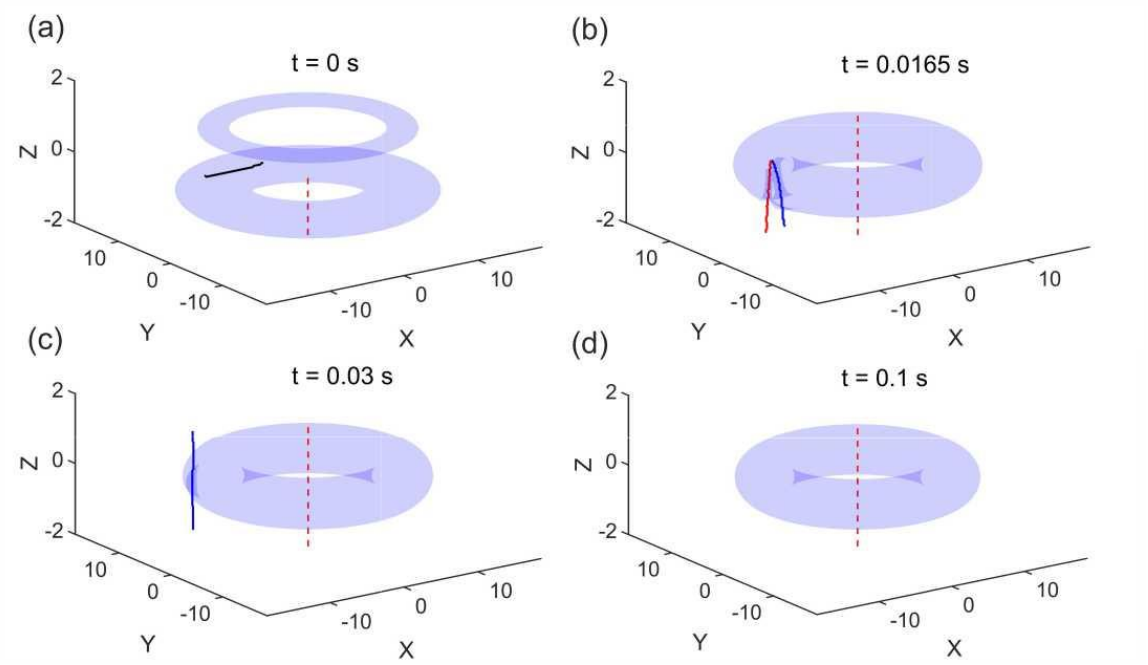

Рис. 1.16 Те саме, що і для Рис. 1.15 у випадку, коли населеність нижнього кільця з $m_1 = 1$ в початковий момент сильно більше за населеність верхнього ($P = 0.49$). В цьому випадку і вихор, і антивихор, що утворюються в процесі викривлення і розділення початкового Джозефсонівського вихору, покидають систему рухаючись до зовнішньої периферії конденсату. Відповідно, через те, що початковий вертикальний вихор, відмічений червоною пунктирною лінією, залишається в центрі системи, фінальне кільце стає однозарядним ($m = 1$), див. також Рис. 1.17.

кається за допомогою нехтування кінетичним членом в РГП (1.35)). Якщо набіг фази при обході складає 2π, то відмічаємо, що в центрі контуру знаходиться вихор.

Нижнє кільце в момент $t = 0$ несе надплинний потік з топологічним зарядом $m = 1$, відповідно до чого, воно містить однозарядний вихор, центр якого знаходиться у тороїдальному отворі в центрі кільця (вертикальні червоні пунктирні лінії на Рис. 1.15 та 1.16).

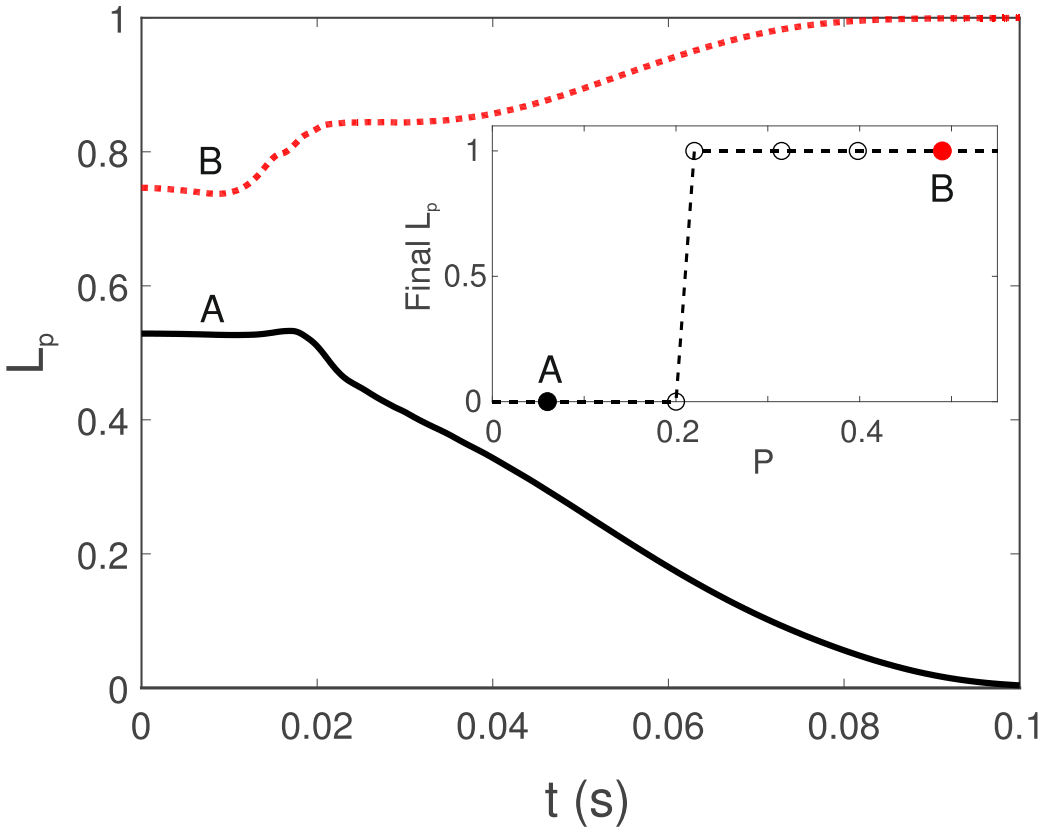

Рис. 1.17 Еволюція повного кутового моменту на частинку, $L_p = L_z/N$, для станів з початковими завихреностями $(m_1 = 1, m_2 = 0)$ та різними значеннями початкових асиметрій населеності, визначених в Рівн. (1.40): А) $P = 0.06$; В) $P = 0.49$. Параметр дисипації $\gamma = 0.03$. Графік-вставка показує залежність фінального кутового моменту системи на частинку L_p від початкової асиметрії P. Кільце з домінуючою населеністю, що несе кутовий момент на частинку $m = 1$ перетягує друге кільце, що було початково нерухомим, у свій стан при $P > P_{cr} \approx 0.21$.

Внаслідок того, що початкові стани верхнього та нижнього кілець мають різні завихреності, $m_1 \neq m_2$, аксіальний розподіл тунельного потоку між кільцями утворює $|m_1 - m_2|$ горизонтально орієнтованих Джозефсонівських вихорів, які локалізовані між кільцями в області низької густини, що було показано вище. При еволюції системи внаслідок злиття кілець Джозефсонівські вихори

вигинаються і розпадаються на набори вертикальних вихорів та антивихорів, див. Рис. 1.15(b,c) та 1.16(b,c).

Отже, Рис. 1.15 та 1.16 демонструють, що початкові стани з горизонтально орієнтованими Джозефсонівськими вихорами та вертикально орієнтованими вихоровими лініями, що відповідають надплинним потокам m_1 та m_2, розпадаються на серії вертикально орієнтованих вихорів та антивихорів. Схожі змієподібні нестабільності та розпади Джозефсонівських вихорів на вихорові диполі (пари вихор-антивихор) також спостерігались в БАК зі спін-орбітальним зв'язком [39]. Подальша еволюція вихорів залежить від двох факторів: (а) взаємодія між сусідніми вихорами (притяжіння для пар вихор-вихор та відштовхування для пар вихор-антивихор), та (б) дрейф вихорових ліній з областей великих густин до регіонів нульової густини внаслідок дисипації. Під дією слабкої дисипації вихорові лінії покидають області високої інтенсивності рухаючись по спіралеподібним траекторіям. Таким чином повільний дрейф вихорових ліній може відбуватись як в сторону зовнішньої периферії, де вони розпадаються на елементарні збудження, так і у внутрішню область системи (до тороїдального отвору). Така дисипативна динаміка вихорів та антивихорів напряму впливає на фінальне значення кутового моменту системи: якщо у центральний отвір тороїдального конденсату попадає вихор, то він додає до повної завихреності системи одиничний топологічний заряд, а якщо попадає антивихор, то він одиничний топологічний заряд віднімає.

Як можна побачити з Рис. 1.17, кутовий момент на частинку $L_p = L_z/N$ (повний кутовий момент визначений в Рівн. (1.42)) для початкового стану зі *слабкою асиметрією* ($P = 0.06$, $z_0 = 0.02$) зникає з часом як результат релаксації, що чудово узгоджується із динамікою цієї системи, яку можна спостерігати на Рис. 1.15: на Рис. 1.15(c,d) видно, що вихорова лінія (суцільна червона лінія) рухається до зовнішньої периферії з низькою густиною конденсату та зникає, в той час як антивихор (синя суцільна лінія) рухається до центру системи та

анігілює з початковим вихором (червона пунктирна лінія). Система еволюціонує в енергетично найнижчий безвихоровий стан, що зображено на Рис. 1.15(d).

У випадку *сильної асиметрії* ($P = 0.49,\ z_0 = 0.175$) значення L_p впродовж еволюції прямує до $L_p = 1$, див. Рис. 1.17. Як видно на Рис. 1.16(c,d), Джозефсонівські вихори викривлюються та розділяються на диполі (пари вихор та антивихор), які покидають конденсат в сторону зовнішньої периферії. Фінальний стан утворюється початковим центральним вихором (червона пунктирна лінія), що відповідає однозарядному надплинному потоку $m = 1$, як це видно на Рис. 1.16(d).

Систематичні симуляції демонструють, що в млинцеподібній двокільцевій системі існує порогове значення для початкового параметру асиметрії, P_{cr}, яке визначає фінальний стан після релаксації (див. графік-вставку на Рис. 1.17). Внаслідок довгої дисипативної еволюції система релаксує в стан з нульовим кутовим моментом при $P < P_{cr}$, а при $P > P_{cr}$ домінуюча компонента з $m_1 = 1$ визначає фінальний стан і система релаксує до значення кутового моменту на частинку $m = 1$. Порогове значення P_{cr} для параметрів даної системи знаходиться в інтервалі $0.20 < P_{cr} < 0.22$.

Отже, більш населене кільце, яке несе надплинний потік $m = 1$, може перетягнути у свій стан початково нерухоме кільце. Цей результат не суперечить закону збереження енергії. Потенціальна енергія конденсату зменшується зі зменшенням бар'єру, що розділяє кільця. Отже, повна енергія початкової системи є більшою ніж енергія фінальної системи, і у випадку $L_p = 0$, і для $L_p = 1$. Як відомо, для тороїдальних конденсатів надплинний потік системи з топологічними зарядами $0 \leq m \leq m_{max}$ відповідає стійким станам з локальним мінімумом енергії, де максимальний топологічний заряд m_{max} залежить від параметрів конденсату (див. [75,79]). При зменшенні потенціального бар'єру між

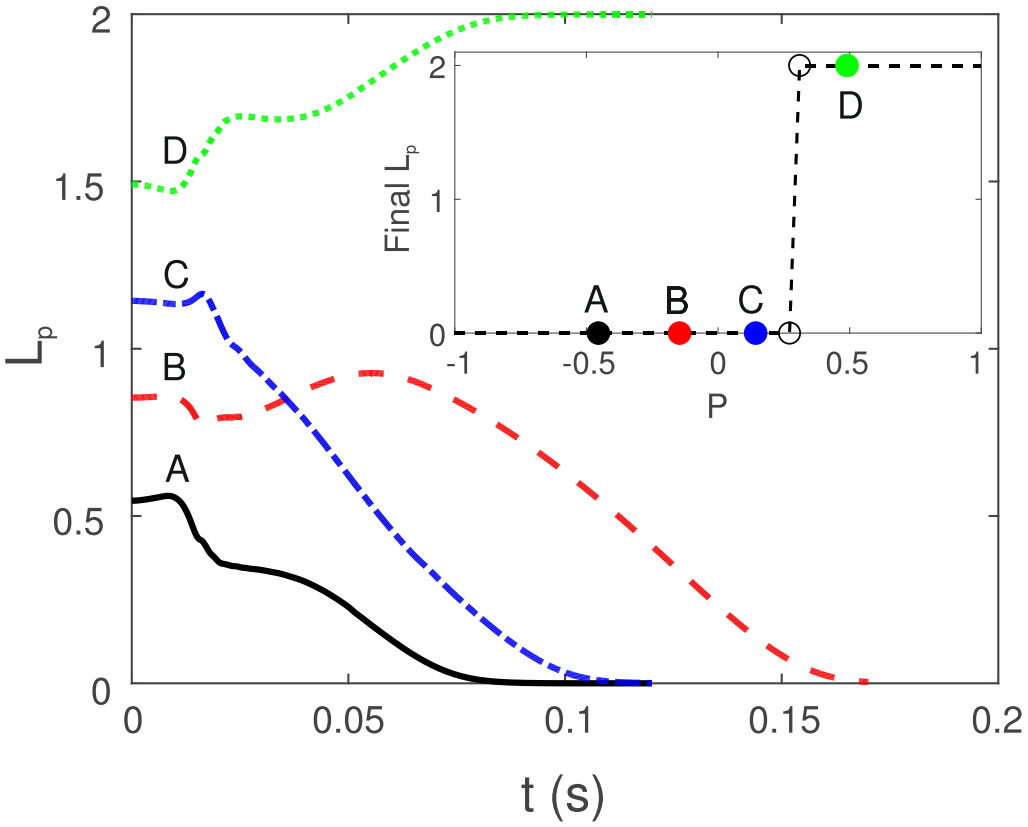

Рис. 1.18 Еволюція повного кутового моменту на частинку, $L_p = L_z/N$, для станів з початковими завихреностями $(m_1 = 2, m_2 = 0)$ та різними значеннями початкових асиметрій населеності, визначених в Рівн. (1.40): A) $P = -0.45$; B) $P = -0.15$; C) $P = 1.14$; D) $P = 0.49$. Параметр дисипації $\gamma = 0.03$. Графік-вставка показує залежність фінального кутового моменту системи на частинку L_p від початкової асиметрії P. При $P > P_{cr} \approx 0.29$ система релаксує в стан з подвійною завихреністю $(m = 2)$, при $P < P_{cr} \approx 0.29$ система релаксує в нерухомий стан $(m = 0)$, а фінальний стан з завихреністю $m = 1$ не спостерігається.

кільцями із зарядами $m_1 = 1$ та $m_2 = 0$, залежно від початкового значення асиметрії P, запускається релаксація до однокільцевої системи або в найнижчому енергетичному стані з нульовою завихреністю $(L_p = 0)$, або в стійкому стані з $L_p = 1$.

Також було виконано подібний аналіз для системи з початковими топологічними зарядами ($m_1 = 2,\ m_2 = 0$). Рисунок 1.18 зображає еволюцію кутового моменту на частинку для різних початкових значень асиметрії P. Графік-вставка на Рис. 1.18 показує залежність фінального кутового моменту на частинку L_p від початкового значення асиметрії P. Варто зазначити, що ситуація із $(2,0)$ дуже схожа на попередній випадок (система з початковими топологічними зарядами ($m_1 = 1,\ m_2 = 0$)), адже існує порогове значення початкової асиметрії і при $P > P_{cr} \approx 0.29$ система релаксує у двозарядний стан ($m = 2$). Фінальний стан із $m = 1$ не спостерігається навіть для симетричних початкових умов $P = 0$ (початковий кутовий момент системи на частинку $L_p = 1$). Причина криється в тому, що внаслідок симетрії даної системи з топологічними зарядами ($m_1 = 2,\ m_2 = 0$), між кільцями на початку еволюції існує два горизонтальних Джозефсонівських вихори, які в процесі динаміки розпадаються на вертикальні вихори та антивихори симетрично відносно центру системи. Ці вихори та антивихори, в залежності від початкового дисбалансу населеностей P, або всі покидають систему дрейфуючи на зовнішню периферію (що приводить до фінального стану $m = 2$, адже центральний вихор, що відповідає початковій завихреності $m = 2$ не може покинути систему), або ж діляться на вихори та антивихори, що покидають систему, та два антивихори, що дрейфують до центру системи, де анігілюють з початковим центральним вихором із завихреністю $m = 2$, що призводить до фінального стану $m = 0$. Докладно це питання буде розглянуте далі в темі про вплив порушення симетрії на фінальний стан системи.

Цікаво порівняти результати даної дисертаційної роботи для злиття 3D кільцеподібних конденсатів, де квантовані вихори сильно впливають на релаксацію, з динамікою в системі двох концентричних планарних 2D конденсатів, які вивчались в [88,89]. В цих дослідженнях повідомлялось про появу спірале-

подібного темного солітону, якщо один з конденсатів першопочатково мав ненульовий кутовий момент.

1.3.4 Видовжений тороїдальний конденсат

Наступна ціль - порівняти еволюцію кілець, що видовжені в вертикальному (вісь z) напрямі (малі значення параметру стиснення A (1.37)), з результатами, які були отримані для млинцеподібного (великі значення параметру стиснення A (1.37)) конденсату вище. Потрібно зрозуміти роль геометрії зовнішнього потенціалу у динаміці Джозефсонівських вихорів в процесі злиття кілець конденсату.

Випадок сильно видовженого 3D конденсату частково досліджувався у 2D моделі в роботі [47], отже можна очікувати формування решітки вихорів, що подібна на ті, які вивчались для 2D однокомпонентного конденсату [47,90] або утворення вихорових листів у двокомпонентних конденсатах [91]. Решітка двовимірних вихорів відповідає набору флюксонів між потоками з різними завихреностями в 3D випадку.

Симуляції чітко показують, що в результаті злиття видовжених конденсатів з різними завихреностями виникають гібридні 3D стани, що будуються з вертикально розділених частин конденсату з різними завихреностями. Типовий приклад утворення гібридного стану показано на Рис. 1.19 для системи з початковими завихреностями $m_{1,2} = \pm 1$ (надплинні потоки, що обертаються в протилежних напрямках), параметр стиснення $A = 0.16$ (див. Рівн. (1.37)), та нульовою початковою асиметрією між кільцями, $P = 0$ (див. Рівн. (1.40)). Строго кажучи, гібридні стани є тимчасовими, адже через певний час вони перетворюються на звичайні квантовані стани (з певною негібридною завихреністю або без). Однак, гібридні стани є довгоживучими і зберігаються впродовж дуже довгої еволюції та не розпадаються навіть у випадку сильних збурень. Збуре-

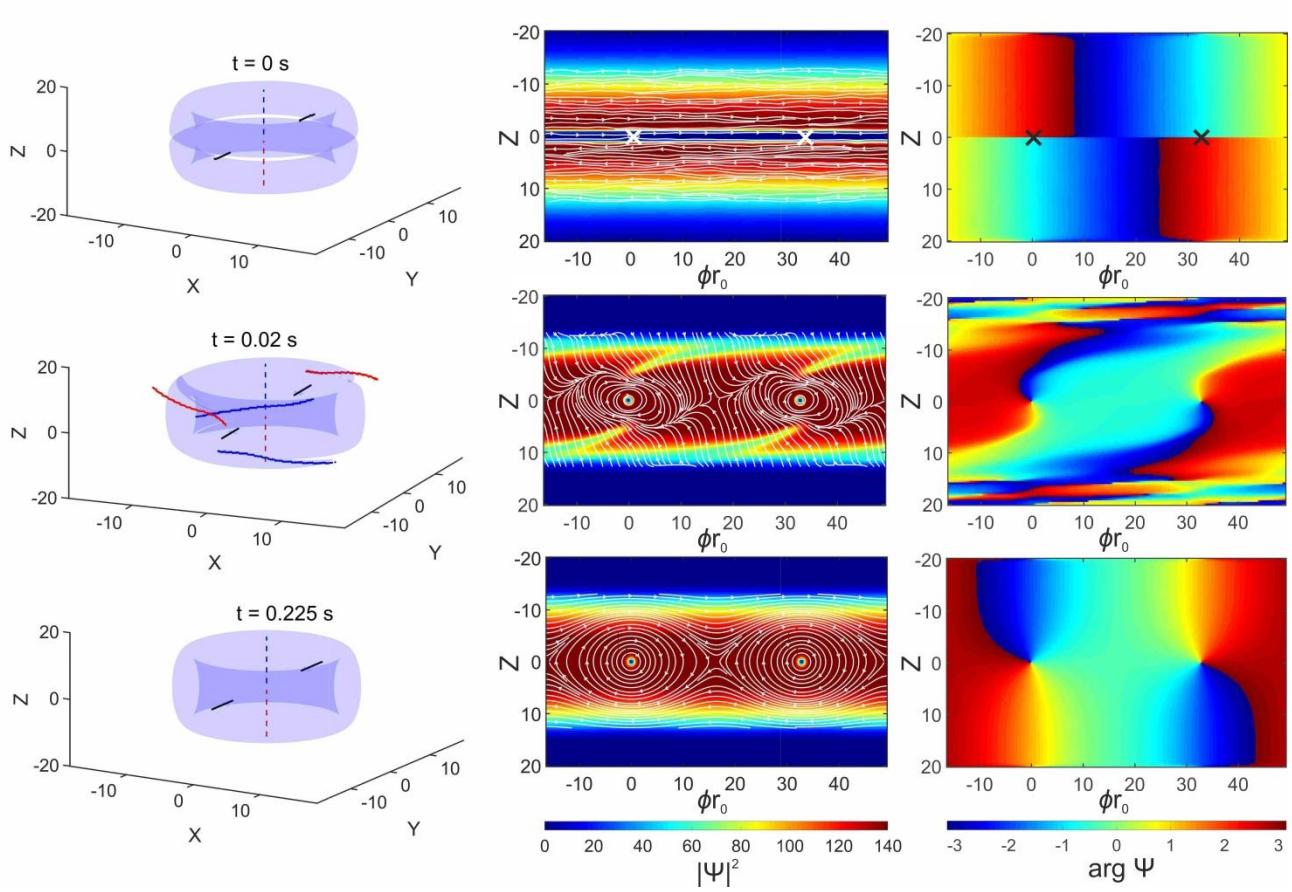

Рис. 1.19 Рисунки для трьох моментів часу, які ілюструють злиття сильно видовжених кілецеподібних конденсатів з параметром стиснення, $A = 0.16$ (див. Рівн. (1.37)), завихреностями $m_{1,2} = \pm 1$ початкових підсистем та симетричними початковими умовами населеностей підсистем ($P = 0$), параметр дисипації $\gamma = 0.03$. Показані 3D ізоповерхні густини конденсату (ліва колонка), і перерізи-розгортки розподілу густини (середня колонка) та фази (права колонка) для циліндричних поверхонь з радіусом ρ_0 [див. Рівн. (1.36)], ϕ - кутова координата. В результаті злиття початкових кільцеподібних конденсатів утворюються довгоживучі гібридні стани.

ний гібридний стан релаксує назад у незбурений. Швидкість вертикального дрейфу флюксонів з областей високої густини на периферію визначається параметром дисипації γ та градієнтом густини конденсату в вертикальному (вісь

z) напрямку: (а) чим більше дисипація, тим швидше флюксон по спіралі дрейфує до периферії; (б) більший градієнт густини стимулює швидший дрейфовий рух флюксону. Майже рівномірний розподіл густини вертикально видовженого конденсату в області найбільшої густини системи (широка область навколо $z = 0$) є сповільнюючим фактором для руху флюксонів, що сильно подовжує життя гібридного стану. Часи життя гібридів залежать від початкової асиметрії P. Для типових початкових умов $P \approx 0$ навіть збурений гібридний стан може існувати впродовж декількох секунд без сильних ознак деградації, що в більшості випадків довше ніж час життя конденсату в експериментальних установках.

Сімейства довгоживучих гібридів та їх стійкість можуть бути охарактеризовані за допомогою залежностей повної кількості частинок в системі від хімічного потенціалу гібрида та енергією гібрида від повної кількості частинок, що і зображено на Рис. 1.20.

Результати даної дисертаційної роботи різко контрастують з результатами 2D симуляцій в роботі [47], де еволюція вихорового листа призводила до появи нестабільності Кельвіна-Гельмгольца. Проте, варто зазначити, що розпад вихорового листа та розвиток НКГ було продемонстровано в роботі [47] для $|m_1 - m_2| = 20$, а отже система в початковому стані мала 40 вихорів. Але навіть для системи з такою великою кількістю вихорів, як показано в [47], при відсутності збурень вихоровий лист в системі живе доволі довго; однак, під дією шумових збурень (амплітуда яких була менша за 1 відсоток модуля хвильової функції в кожній точці) відбувався розвиток НКГ і система вихорів розпадалась.

Отже, виникає логічне питання: чи буде з'являтись НКГ в системі, в якій $|m_1 - m_2| \sim 1$? Виявляється, що за таких умов НКГ не народжується навіть за умови дії відносно сильних шумів з амплітудами до $\sim 5\%$ від хвильової функції

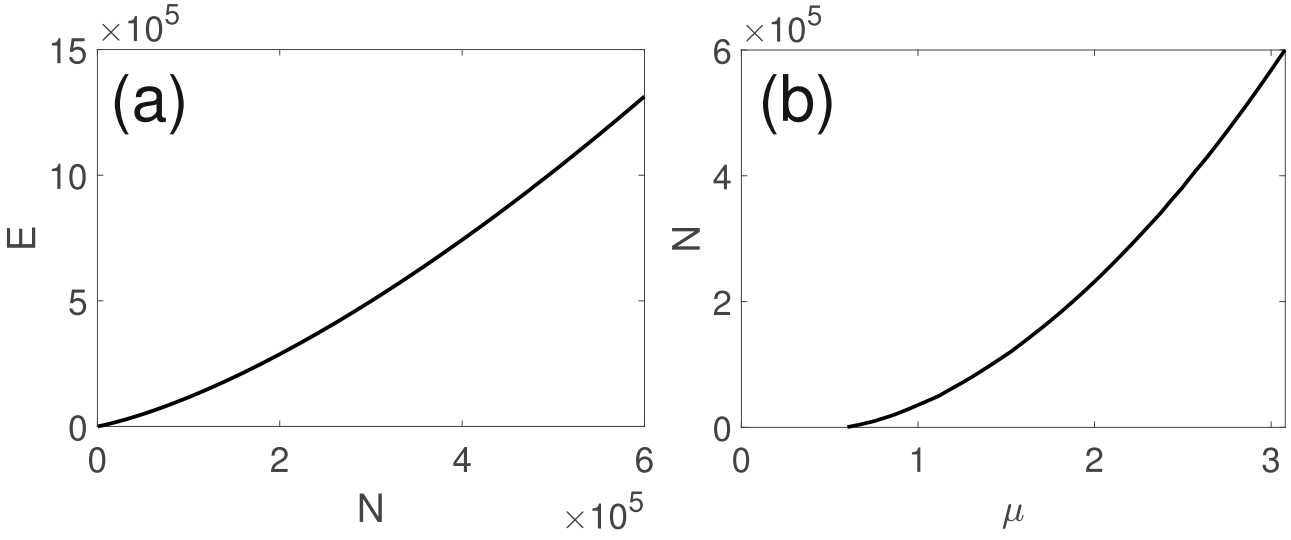

Рис. 1.20 (a) Повна енергія гібридного стану в залежності від кількості частинок в системі; (b) Повна кількість частинок в залежності від хімічного потенціалу гібрида. Представлені графіки виконані для систем з $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $P = 0$, $A = 0.16$.

незбуреного стану.

Як показано на Рис. 1.19 у випадку вертикально видовженого конденсату Джозефсонівські вихори зберігають своє початкове горизонтальне положення, на відміну від стисненого у вертикальному напрямі конденсату, у випадку якого ДВи викривлюються та розділяються на вертикальні вихори та антивихори, що добре видно на Рис. 1.15 та 1.16.

Симуляції показують, що розвиток змієподібної нестабільності Джозефсонівських вихорів для видовженого конденсату (параметр стиснення $A < 1$) є сильно пригніченим. Виявилось, що у випадку сильно видовженої тороїдальної пастки з $A < 0.6$ ДВи підтримують радіальну орієнтацію впродовж дуже довгого часу після злиття кілець. Для більш детального розуміння фізичної природи пригнічення змієподібної нестабільності є сенс розглянути простий енергетичний аналіз. Як відомо, енергія прямої вихорової лінії в БАК пропорційна дов-

жині цієї лінії та росте зі збільшенням густини конденсату, в якій даний вихор перебуває. Отже, вихорова лінія, що орієнтована в радіальному напрямку має максимум енергії, якщо знаходиться в площині $z = 0$ (після злиття кілець), тоді як вертикально орієнтований вихор досягає максимальної енергії якщо знаходиться на відстані ρ_0 від вісі z (в області пікової густини конденсату, див. Рівн. (1.36)). Внаслідок цього, максимальні енергії вертикального та радіального вихорів відносяться між собою як радіальна, $R_{TF} = \sqrt{8\mu/(M\omega_r^2)}$, та вертикальна, $Z_{TF} = \sqrt{8\mu/(M\omega_z^2)}$, товщини конденсату в наближенні Томаса-Фермі у відповідних перетинах системи. Іншими словами, відношення максимальних енергій цих вихорів дорівнює параметру стиснення конденсату $A = \frac{R_{TF}}{Z_{TF}} = \frac{\omega_z}{\omega_r}$. Виходячи з цієї оцінки, флюксони волітимуть зберігати горизонтальну орієнтацію, якщо система є видовженою у вертикальному напрямі, та розділятимуться на вертикальні вихори і антивихори внаслідок змієподібної нестабільності у випадку стисненого конденсату. Симуляції демонструють, що така властивість вихорів не залежить від повної кількості частинок, проте сильно залежить від параметра стиснення системи, як і передбачає енергетичний аналіз.

Для видовженого конденсату горизонтальна орієнтація Джозефсонівських вихорів є енергетично вигідною навіть за повної відсутності бар'єру між кільцями, внаслідок чого Джозефсонівські вихори знаходяться в області високої густини конденсату. В той самий час, вертикально орієнтовані вихори, що відповідають початковим завихреностям (надплинним потокам в кільцях до злиття) залишаються ув'язненими в центральному отворі тороїдальної системи. Як наслідок, з'являється можливість отримати довгоживучі квазістабільні стани у формі вищезгаданих гібридів, що є якісно схожими на ті, які були отримані внаслідок зовсім іншого механізму в роботі [72]. Можна визначити гібридний стан як топологічну структуру з двома вертикально орієнтованими вихорами (m_1, m_2) та $|m_1 - m_2|$ горизонтально орієнтованими Джозефсонівськими

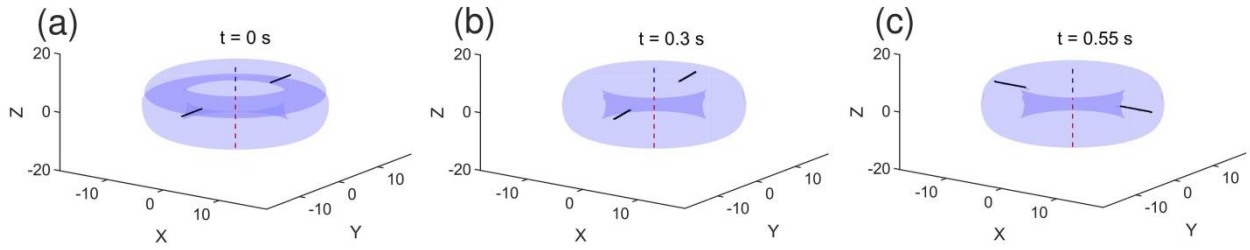

Рис. 1.21 Приклад стабільної еволюції вихорового гібриду. Залишковий листовий бар'єр не лише стабілізує ДВи (їх ядра показані горизонтальними чорними лініями) від вертикального дрейфу, але й забезпечує можливість контрольованої маніпуляції повним кутовим моментом гібридної системи. В початковому стані (a) система $(+1,-1)$, що зображена на даних рисунках, мала сильну асиметрію, її кутовий момент на частинку був $L_p = 0.59$. На рисунку (b) зображений результат злиття (кутовий момент на частинку $L_p = 0.58$) початкових кілець за умови зменшення бар'єру між кільцями до невеликого ненульового значення. В інтервалі часів $t > 0.3$ с цей бар'єр повільно опускається, його координата вздовж вертикальної осі зменшується, внаслідок чого кутовий момент системи на частинку поступово неперервно варіюється. На рисунку (c) зображений стан в момент часу $t = 0.55$ с, в якому кутовий момент системи на частинку дорівнює $L_p = 0.46$.

вихорами, що розділяють дві області з надплинними потоками m_1 та m_2.

Цікаво, що, як показано на Рис. 1.21, Джозефсонівські вихори можуть бути закріплені та повністю стабілізовані, якщо амплітуду бар'єру впродовж злиття кілець прибирати до певного ненульового значення та підтримувати цей залишковий бар'єрний потенціал з локальним максимумом його значення (локальний мінімум для густини конденсату) для $z = z_0$ сталим в часі. Як результат, можна отримати “повністю стабільний” 3D гібридний стан з будь-яким кутовим моментом системи на частинку в інтервалі $m_1 < L_p < m_2$. Значення ку-

тового моменту на частинку також можна неперервно змінювати вже після злиття кілець за допомогою відносно повільної (щоб вихори не вистрибнули з локальної пастки) зміни положення бар'єру, z_0, як це показано на Рис. 1.21 для $t > 0.3$ с. Стабілізовані Джозефсонівські вихори є не тільки топологічними модами, які є фундаментально важливими у фізиці надплинності та надпровідності, але також можуть бути використані для проєктування топологічно захищених кубітів, див. також роботу [92].

1.4 Порушення симетрії в системі взаємодіючих кільцеподібних надплинних потоків Бозе-Айнштайнівського конденсату

1.4.1 Спонтанне порушення симетрії в стаціонарній системі слабкозв'язаних потоків з топологічними зарядами

Розглянемо стаціонарний стан слабкозв'язаних кілець із завихреностями $m_1 = -m_2$. Рисунок 1.22 показує три різні стаціонарні стани отримані за допомогою методу еволюції в уявному часі для сильно стисненої ($A = 4.88$) в z напрямі системи $m_1 = 1, 2, 3$ та $P = 0$. Різні напрями потоків в нижньому та верхньому кільцях, як було показано вище, ведуть до утворення Джозефсонівських вихорів. Повна кількість флюксонів між кільцями залежить від топологічних зарядів кілець і визначається як $N_J = |m_1 - m_2|$. Для глибшого аналізу систем такого типу розглянемо тунельний потік частинок конденсату через бар'єр між кільцями.

Густину квантовомеханічного потоку, як і раніше, визначаємо за допомогою Рівн. 1.27. Як було показано вище в темі про двомодовий аналіз, у випадку БАК, що утримується у вигляді паралельних слабко зв'язаних коаксіальних кілець, азимутальні розподіли вертикальної проєкції тунельного потоку між кільцями j_z можуть бути описані в наступному вигляді:

$$j_z \sim \sin[\omega t + (m_2 - m_1)\theta + \Delta], \tag{1.43}$$

де обезрозмірена кутова швидкість флюксонів,

$$\omega = \mu_1 - \mu_2, \tag{1.44}$$

визначається різницею хімічних поенціалів кілець, а Δ - постійна різниця фаз між кільцями.

Позиції ядер флюксонів визначені розподілом тунельного потоку, що

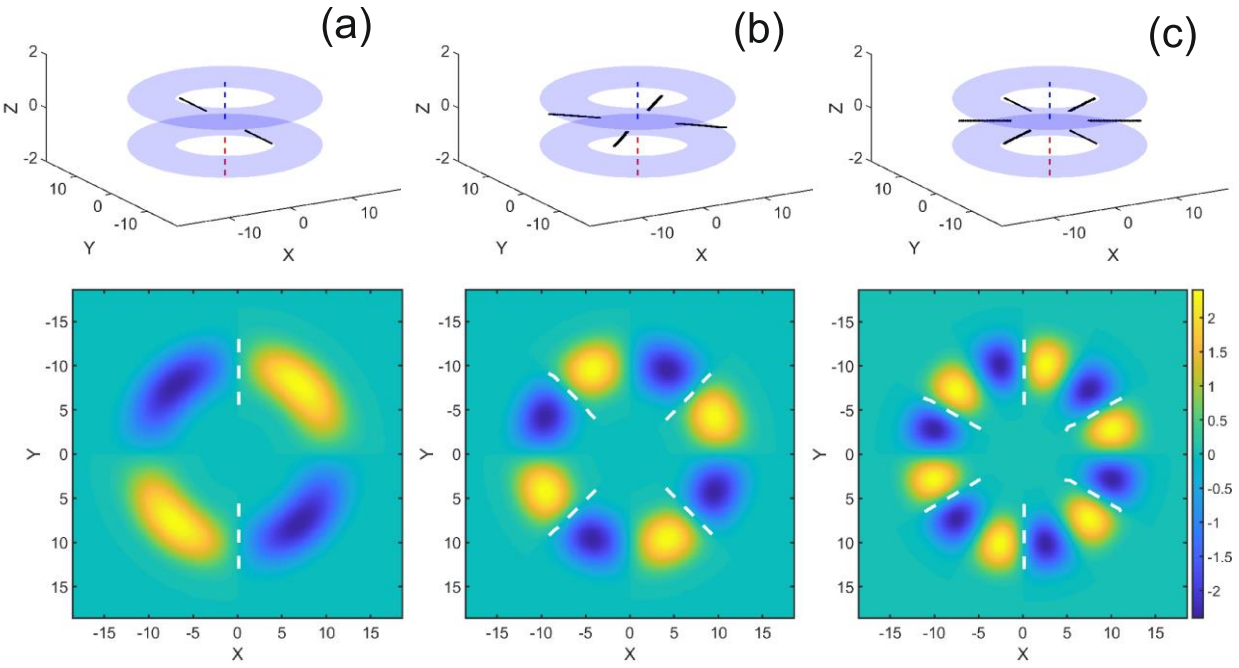

Рис. 1.22 Гібридні симетричні ($P = 0$) вихорові стаціонарні стани: (a) $(m_1, m_2) = (+1, -1)$, (b) $= (+2, -2)$, (c) $= (+3, -3)$. Показані ізоповерхні густини (верхній ряд) та z-компоненти відповідних густин тунельних потоків через бар'єр між кільцями, $j_z(x, y, z = 0)$ (нижній ряд). Ядра Джозефсонівських вихорів позначені чорними лініями у верхньому ряду та білими пунктирними лінями у нижньому ряду. Вертикальні червоні та сині пунктирні лінії у верхньому ряду позначають протилежно направлені надплинні потоки, що відповідають завихреностям кілець (m_1, m_2).

задається рівнянням (1.27). Обертання цього розподілу навколо вісі z призводить до обертання радіально орієнтованих Джозефсонівських вихорів навколо тієї ж вісі без зміни відносного положення ядер флюксонів. З Рівн. (1.43) слідує, що така ситуація можлива лише у випадку наявності асиметрії населеностей ($P \neq 0$, а отже різниця хімічних потенціалів не дорівнює нулю і, як наслідок, $\omega \neq 0$, див Рівн. (1.44)), внаслідок якої флюксони виконують обертовий рух навколо вісі z. Початкове вертикальне положення флюксонів визначається координатою z_0 центру бар'єру, що розділяє кільця. Натомість кутові координа-

ти Джозефсонівських вихорів є довільними та визначаються значенням Δ. Примітно, що просторова структура тунельного потоку та утворення Джозефсонівських вихорів спонтанно порушують азимутальну симетрію стаціонарних гібридних вихорових станів навіть в умовах повністю симетричного зовнішнього потенціалу, що утримує конденсат, див. [72]. Далі буде розглядатись лише випадок $\Delta = 0$. Відповідні розподіли тунельних потоків та позицій вихорів для систем з $P = 0$ позначені на Рис. 1.22.

Примітно, що гібридні стаціонарні стани, які також відіграють роль початкових умов для симуляцій динаміки, характеризуються симетрією при обертанні навколо вісі z на кут $2\pi k/N_J$ (дискретна обертова симетрія), де k - ціле число, а $N_J = |m_1 - m_2|$ - парне число радіально орієнтованих Джозефсонівських вихорів. В наступному розділі аналізуватиметься вплив даної симетрії на еволюцію кілець в нашій системі за умови їх злиття.

1.4.2 Роль симетрії для кілець, що зливаються

В цій частині основною темою є симуляція динаміки млинцеподібних кілець ($A = 4.88$), що зливаються, з топологічними зарядами $(m_1, m_2) = (+1, -1)$. Головною задачею є дослідження впливу порушення симетрії на еволюцію даної системи.

Для вивчення ефектів пов'язаних із порушенням симетрії в динаміці вихорів при злитті кілець вводимо у рівняння (1.33) для амплітуди бар'єру між кільцями окрім лінійного спадання бар'єру (1.34) ще й монотонне обертання листового зовнішнього потенціалу бар'єра навколо вісі x. Тоді залежність амплітуди бар'єра від часу буде дорівнювати:

$$V_b(z,t) = U_b(t)\exp\left(-\frac{(\zeta - z_0)^2}{2a^2}\right), \qquad (1.45)$$

де

$$\zeta = z\cos(\Omega t) - y\sin(\Omega t). \tag{1.46}$$

Якщо $\Omega = 0$ (іншими словами, $\zeta = z$ в Рівн. (1.46)), то зовнішній потенціал, який утримує конденсат, є симетричним відносно обертання навколо вісі z. Кутова швидкість Ω в симуляціях, що висвітлені в даній дисертації, лежить в межах від $\Omega_0 = 0$ Гц (горизонтальний бар'єр) до $\Omega_2 = 2\pi \times 0.23$ Гц. Фінальний нахил бар'єру до горизонтальної площини (x, y) в момент часу $t = t_d$ (амплітуда бар'єру в цей момент стає рівною 0, див. Рівн. (1.34)) є достатньо малою величиною і повного обороту площини бар'єру не відбувається.

Рисунок 1.23(a) підсумовує результати вивчення впливу симетрії на злиття кілець. Чорні лінії з колами демонструють фінальні значення кутового моменту на частинку, $L_p = L_z/N$, для системи $(+1, -1)$ як функцію параметра асиметрії P для випадку $\Omega_0 = 0$ Гц (без порушення аксіальної симетрії).

Зауважимо наступні важливі моменти: (i) нерухомий ($L_p = 0$) фінальний стан з найнижчою енергією не утворюється навіть для значень параметру асиметрії $P \approx 0$ (початковий повний кутовий момент системи близький до нуля). Замість цього, система еволюціонує в один з двох станів - з одним вихором ($m = +1$) або з одним антивихором ($m = -1$), що ув'язнені в центральному отворі тороїдального конденсату. (ii) Для початкових станів із параметром асиметрії, який менше критичного значення,

$$|P| < P_{cr} \approx 0.1755, \tag{1.47}$$

фінальний кутовий момент, визначається менш населеним кільцем, що є контрінтуїтивним результатом. За умови $|P| > P_{cr}$ фінальний стан визначається більш населеним кільцем. Цей неочікуваний результат пояснено нижче.

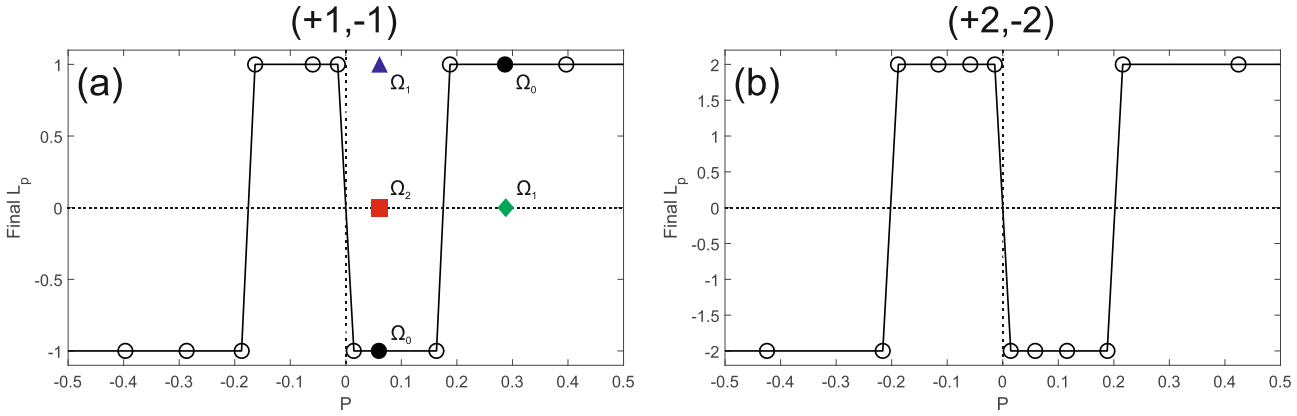

Рис. 1.23 Залежність фінального значення повного кутового моменту на частинку, $L_p = L_z/N$, для кілець з початковими завихреностями (m_1, m_2), що зливаються, від початкового дисбалансу населеностей P: (a) $(+1,-1)$, (b) $(+2,-2)$. Суцільна чорна лінія з чорними колами представляє фінальні стани для аксіально симетричного ($\Omega = 0$ в Рівн. (1.46)) зовнішнього потенціалу. Контрінтуїтивним є те, що аксіально симетрична система ніколи не еволюціонує до нерухомого стану ($L_p = 0$) з найнижчою енергією навіть для маленьких значень параметрів асиметрії $|P| \ll 1$. Завихреність фінального стану визначається менш населеною компонентою для $|P| < P_{cr} \approx 0.1755$ у випадку системи $(+1,-1)$ і $|P| < P_{cr} \approx 0.21$ для $(+2,-2)$. Більш населена компонента для обох систем визначає фінальний стан у випадку $|P| > P_{cr}$. Вплив порушення симетрії показано для системи $(+1,-1)$ за допомогою прикладів фінальних станів для двох значень початкової асиметрії $P = 0.06$ та $P = 0.29$. У випадку $P = 0.06$ заповнене чорне коло відповідає горизонтальному бар'єру (асиметрія відсутня, бар'єр не обертається, $\Omega_0 = 0$ Гц), див. Рис. 1.24, синій трикутник та чорний квадрат відповідають бар'єру, що обертається навколо вісі x з кутовими швидкостями $\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц (див. Рис. 1.25) та $\Omega_2 = 2\pi \times 0.11$ Гц (див. Рис. 1.26), відповідно. У випадку $P = 0.29$ чорне заповнене коло відповідає $\Omega_0 = 0$ Гц, зелений ромб відповідає $\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц. Важливо зазначити, що для $P > P_{cr}$ фінальний стан із $L_p = -1$ (аналогічно для $P < -P_{cr}$ стан із $L_p = 1$) не спостерігається навіть для систем із порушеною симетрією.

Такий самий аналіз було виконано й для системи з протилежно спрямованими надплинними потоками $(m_1, m_2) = (+2, -2)$, в якій аксіальна симетрія не порушується ($\Omega_0 = 0$ Гц). Як видно з Рис. 1.23(b), залежність топологічного заряду фінального стану від початкового параметра асиметрії P є аналогічною до випадку системи $(+1, -1)$. У такому випадку можливі виключно фінальні стани $L_p = +2$ або $L_p = -2$. Критичне значення параметра асиметрії $P_{cr} \approx 0.21$.

Відмітьте, що система із завихреностями (2,0), яка розглядалась в даній дисертації вище (див. Рис. 1.18), еволюціонує лише в кінцеві стани $m = 0$ або $m = 2$, в той час, як проміжний стан $m = 1$ не реалізується для жодних параметрів асиметрії P. Більш населена компонента з $P_1 = 2$ визначає фінальний кутовий момент якщо початковий параметр асиметрії більший за певне P_{cr}. Неможливість появи фінального стану з проміжним значенням $m = 1$ пояснювалась вище з точки зору симетрії розташування вертикальних вихорів, що утворюються з Джозефсонівських вихорів після злиття кілець.

Типова вихорова динаміка для систем з горизонтальним бар'єром (порушення симетрії відсутнє, $\Omega = 0$) показана на Рис. 1.24 для параметра асиметрії $P = 0.06$. Початкова пара Джозефсонівських вихорів викривлюється, ділиться на вихорові диполі та переорієнтовується з горизонтального положення в вертикальне, адже, як було пояснено вище, горизонтальна орієнтація флюксонів є енергетично невигідною у сильно стисненій у вертикальному напрямі системі. Як видно на Рис. 1.24(b), початковий центральний антивихор (показаний пунктирною синьою лінією в центрі верхнього менш населеного кільця на Рис. 1.24(a)) розділяється на два антивихори (сині криві на кінцях Джозефсонівських вихорів) та вихор (червона пунктирна лінія) як тільки бар'єр між кільцями зникає. Цей процес дозволяє центральному вихору, який спочатку знаходився лише в нижній частині системи (в центрі нижнього більш населеного кільця), зайняти також верхню частину системи. Рисунок 1.24(d) показує стан, коли розділення та переорієнтація початкових Джозефсонівських вихорів є заверше-

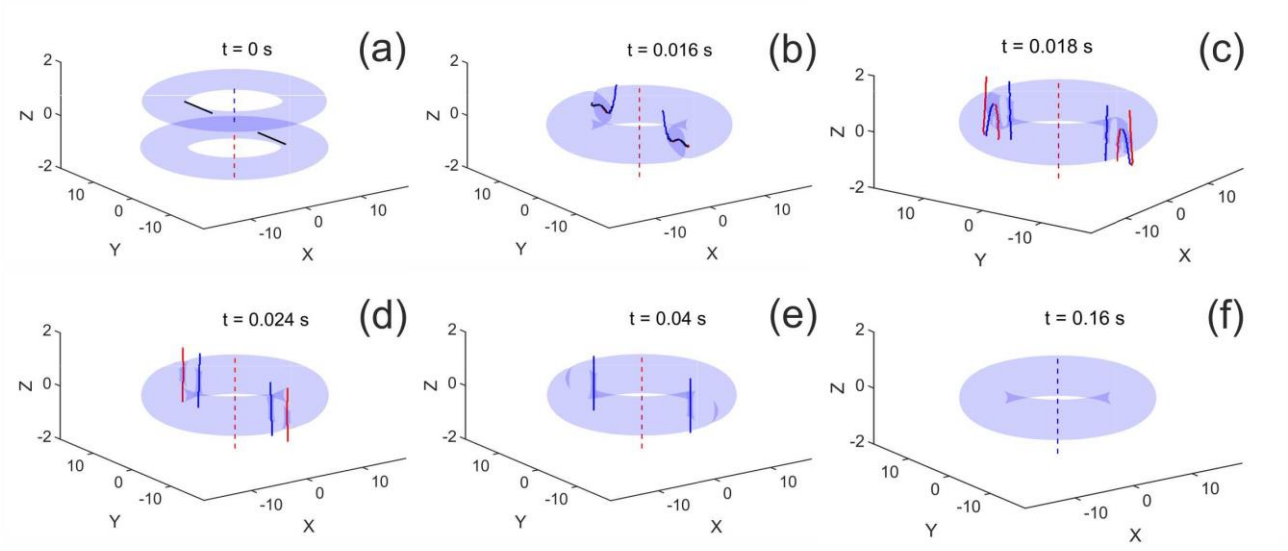

Рис. 1.24 Еволюція системи кілець $(m_1 = +1, m_2 = -1)$, що зливаються, без порушення симетрії ($\Omega = 0$ в Рівн. (1.46)). Початковий бар'єр, який розділяє кільця, є виключеним при $t > t_d = 0.015$ с. Червоні (сині) лінії показують позиції ядер вихорів (антивихорів). Населеність нижнього кільця з $m_1 = +1$ трохи більше ніж населеність верхнього з $m_2 = -1$ (параметр асиметрії $P = 0.06$). Як показано на Рис. 1.23(a) за допомогою чорного заповненого кільця фінальний стан має завихреність $m = -1$. Зауважимо, що у випадку системи $(+1, -1)$ з аксіально симетричним зовнішнім потенціалом існує дискретна обертова симетрія Джозефсонівських вихорів (до злиття) та позицій вихорових та антивихорових ядер (після злиття) стосовно обертів навколо вісі z на кут π. Симетричний дрейф двох діаметрально протилежних антивихорів до центрального отвору тороїдального конденсату веде до анігіляції центрального вихору та релаксації системи до фінального антивихорового стану $m = -1$.

ними. Вертикально орієнтовані вихори та антивихори рухаються з областей високої густини в області з низькою густиною внаслідок дисипації, а отже система релаксує у доступний стан з нижчою енергією. Цей процес проілюстровано на Рис. 1.24(d--f): обидва вихори (червоні суцільні лінії, що показані на Рис.

1.24(d)) зникають на периферії конденсату, в той час, як обидва антивихори (сині суцільні лінії) рухаються до внутрішнього краю тороїдального конденсату, після чого один з цих антивихорів анігілює із центральним вихором (червона пунктирна лінія). В результаті, фінальний стан (див. Рис. 1.24(f)) визначається менш населеною підсистемою з початковою завихреністю $m = -1$.

Як сказано вище, цей результат є контрінтуїтивним, адже початковий стан нижнього кільця із завихреністю $m_1 = +1$ є більш населеним частинками конденсату, ніж стан верхнього кільця з $m_2 = -1$. Проте, розумно очікувати, що підсистема з $m_1 = +1$ визначає фінальний стан, якщо населеність цього стану значно перевищує населеність стану $m_2 = -1$ (принаймні в ліміті $P \to 1$). Дійсно, якщо значення початкового дисбалансу населеностей є більшим за порогове значення, що визначається рівнянням (1.47), фінальний стан є однозарядним ($m = +1$) надплинним потоком (див. Рис. 1.23(a)).

Аналіз симетрії вихорової динаміки дає можливість зрозуміти незвичні властивості надплинних потоків, що зливаються. Динаміка вихорів зберігає дискретну обертову симетрію, причиною якої є симетрія зовнішнього потенціалу. Зокрема, на Рис. 1.24 видно, що динаміка вихорів підкоряється симетрії поворотів навколо вісі z на кут π. Таким чином, крім центральної вихорової лінії (червона пунктирна лінія на Рис. 1.24(b)), що відповідає завихреності більш населеної компоненти, в центральний отвір тороїдального конденсату може потрапити або ні одного, або парне число вихорів (антивихорів), що утворились після розпаду ДВів (у випадку системи, в якій потоки обертаються в протилежних напрямках, $m_1 = -m_2$). Для прикладу, при $P < P_{cr}$ симетричний дрейф двох діаметрально протилежних антивихорів в сторону центрального отвору (як видно на Рис. 1.24(e)) веде до анігіляції центрального вихору з одним з антивихорів, і, як наслідок, система релаксує в фінальний антивихоровий стан (див. Рис. 1.24(f)). При $P > P_{cr}$, утворені з початкових флюксонів вихори та антивихори, які схожі на показані на Рис. 1.24(d), після злиття кілець є локалізо-

ваними ближче до зовнішнього краю конденсату, якщо порівнювати із випадком $P < P_{cr}$, що був розглянутий вище. Таким чином, всі ці вихори та антивихори дрейфують до зовнішньої периферії й зникають там, внаслідок чого фінальний стан після релаксації визначається центральним вихором, що відповідає початково більш населеному кільцю з $m = +1$.

Підсумовуючи можна сказати, що фінальний топологічний заряд системи L_p визначається більш населеною компонентою, якщо $|P| > P_{cr}$, і менш населеною, якщо $|P| < P_{cr}$, в той час як проміжний нерухомий стан з найменшою енергією $L_p = 0$ є забороненим для аксіально симетричної системи. Виходячи із симетрії початкових флюксонів та релаксаційної динаміки, варто очікувати, що ці властивості зберігаються для всіх систем з надплинними потоками, що обертаються в різні сторони з однаковими за модулем завихреностями ($m_1 = +m, m_2 = -m$), що й продемонстровано, наприклад, для системи $m_1 = +2$, $m_2 = -2$ на Рис. 1.23(b). Варто зазначити, що ці властивості зумовлені не дисипативними ефектами, а визначаються суто симетрією системи.

Добре відомо, що тороїдальний конденсат, який несе певний надплинний потік, є прикладом квантової мультистабільної системи з локальними мінімумами енергії для цілих значень кутового моменту на частинку L_p (див. [93]). Таким чином, в результаті злиття двокільцевої системи можуть реалізовуватись фінальні стани з різними топологічними зарядами. Однак, вищенаведені результати також демонструють, що деякі значення кутового моменту (завихреності) не можуть бути отримані в симетричних системах за допомогою злиття компонент з різними завихреностями. З цього виникає логічне запитання: чи можна отримати стани, заборонені в аксіально симетричній системі, шляхом порушення симетрії зовнішнього потенціалу, який утримує дану систему?

Звісно, є багато способів порушити симетрію зовнішнього потенціалу. В цій дисертаційній роботі симетрія в системі з початковими завихреностями

компонент $(+1,-1)$ порушувалась за допомогою повільного обертання бар'єру (див. Рівн. (1.46)), який розділяє компоненти, навколо горизонтальної осі під час поступового зменшення бар'єру в нуль, що забезпечує злиття компонент. Обертання бар'єру є простим збуренням, яке може бути доволі просто реалізованим експериментально. Порушення азимутальної симетрії зовнішнього потенціалу веде до перерозподілу густини конденсату в процесі злиття кілець, що сильно впливає на подальшу релаксаційну динаміку вихорів, які утворюються з початкових флюксонів після зникнення бар'єру.

Очевидно, що атомарна хмара в реальному експерименті ніколи не є повністю симетричною через недосконалість зовнішнього потенціалу та наявності флуктуацій параметрів системи чи густини конденсату. Саме тому, виникає питання: чи є незвичні прояви впливу симетрії системи, передбачені вище, експериментально спостережуваними, або ж, можливо, фінальні стани системи після злиття будуть сильно залежати від будь-яких збурень, що порушують симетрію? Для відповіді на це питання було виконано ряд симуляцій, що включали сильні та слабкі збурення, які порушували симетрію системи. В результаті було отримано, що якщо бар'єр обертається дуже повільно ($\Omega/(2\pi) \ll 0.1$ Гц в Рівн. (1.46)), то таке порушення симетрії не викликає жодних значних ефектів у динаміці вихорів і фінальний стан системи є таким же, як і у випадку повністю симетричної системи ($\Omega = 0$). Вплив порушення симетрії стає значним з подальшим ростом швидкості обертання бар'єру.

Типові приклади релаксаційної динаміки для малої різниці населеностей $P = 0.06$ та порушеної симетрії показані на Рис. 1.25 для $\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц (фінальний топологічний заряд $m = +1$) та на Рис. 1.26 для $\Omega_2 = 2\pi \times 0.23$ Гц (система релаксує до нерухомого стану з найнижчою можливою енергією, $m = 0$). Нагадуємо, що для того ж параметру різниці населеностей $P = 0.06$,

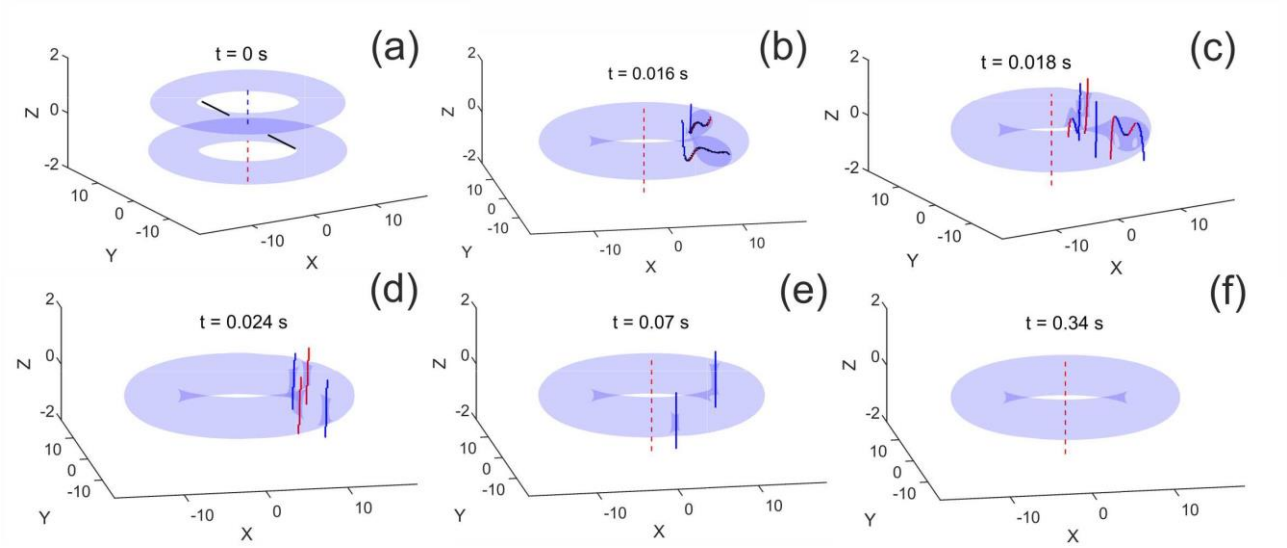

Рис. 1.25 Еволюція кілець, що зливаються, під впливом порушення симетрії, яке викликане обертанням площини бар'єру (1.46) навколо вісі x з кутовою швидкістю $\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц. Примітно, що під впливом такого порушення симетрії система еволюціонує до фінального стану з топологічним зарядом $m = +1$, в той час, як для тієї ж системи з тим самим параметром $P = 0.06$, але для симетричного випадку ($\Omega_0 = 0$ Гц), фінальним станом є антивихоровий стан з $m = -1$ (див. Рис. 1.24).

але у відсутності порушення симетрії ($\Omega = 0$) фінальним станом системи є $m = -1$ (див. Рисунки 1.23(a), 1.24).

Примітно, що у випадку систем, в яких порушується симетрія шляхом обертання площини бар'єру, в кінці злиття кілець позиції вихорів та антивихорів, що утворились з початкових флюксонів, вже не є діаметрально протилежними, як це було у випадку симетричних систем ($\Omega = 0$ Гц). Якщо $\Omega \neq 0$ Гц, початкові Джозефсонівські вихори рухаються один до одного поки не розпадуться внаслідок змієподібної нестабільності на вертикальні вихори та антивихори (див. Рисунки 1.25(b,c) та 1.26(b,c)).

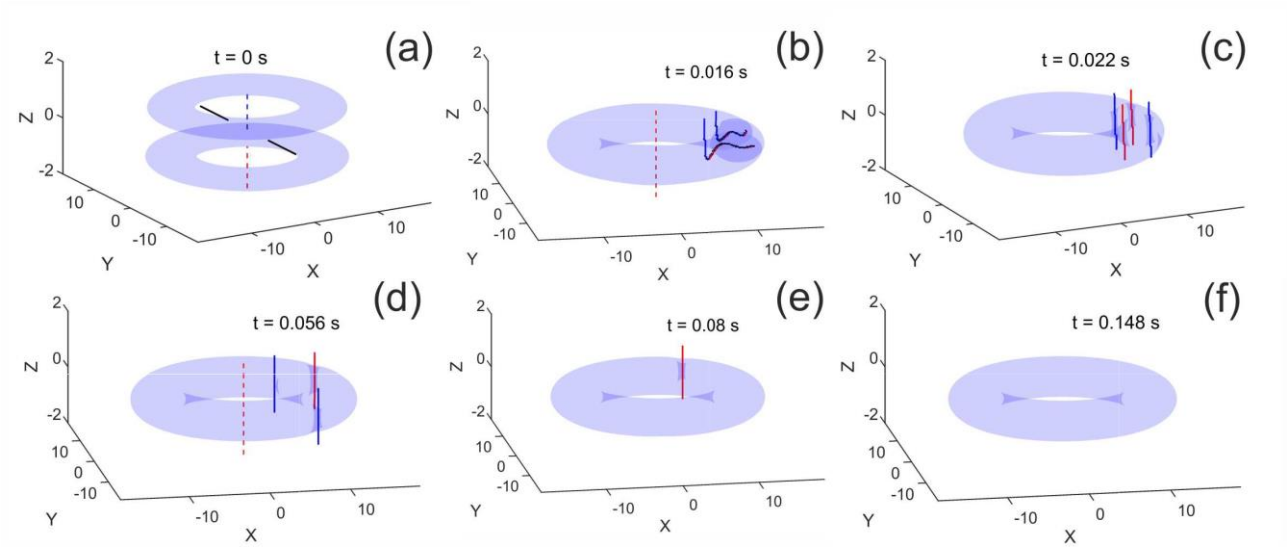

Рис. 1.26 Еволюція кілець, що зливаються, під впливом більш сильного порушення симетрії (кутова швидкість бар'єру $\Omega_2 = 2\pi \times 0.23$ Гц) ніж у випадку Рис. 1.25. Параметр різниці населеностей такий же як і у випадках представлених на Рисунках 1.24 та 1.25, а саме $P = 0.06$. Сильне порушення симетрії викликає еволюцію системи до стану з нульовою завихреністю, на відміну від випадку симетричної системи ($\Omega_0 = 0$ Гц), що еволюціонує до стану $m = -1$, та системи зі слабко порушеною аксіальною симетрією ($\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц), що еволюціонує у фінальний стан з $m = +1$.

Нагадаємо, що початкові стани мають різні завихреності, $m_1 = +1$ та $m_2 = -1$, в їх вертикально розділених бар'єром компонентах (див. Рис. 1.25 (a)). Обидва завихрення мають спільну вертикальну вісь, а між ними в просторі бар'єру існує $|m_1 - m_2|$ радіально орієнтованих Джозефсонівських вихорів. Примітний момент в еволюції системи під дією слабкого порушення симетрії, що зображена на Рис. 1.25(b): як тільки бар'єр зникає, центральне вихорове ядро (червона пунктирна лінія на Рис. 1.25(a)), що походить від завихреності нижнього кільця, продовжує існувати при $t > t_d$ (див. Рис. 1.25(b)), в той час, як центральний антивихор (синя пунктирна лінія на Рис. 1.25(a)), що початково належить верхньому кільцю, розділяється на один вихор (центральний) та два

антивихори, що показані за допомогою суцільних синіх ліній, які приєднуються до кінців флюксонів на Рис. 1.25(b). Як результат, в центральному отворі тороїдального конденсату утворюється суцільне ядро вихору (червона пунктирна лінія на Рис. 1.25(b)), що пронизує всю систему у вертикальному напрямку. Такі ж трансформації спостерігались до цього у випадку злиття в симетричній системі ($\Omega = 0$ Гц), див. Рис. 1.24(b), і у випадку системи під дією сильного порушення симетрії ($\Omega_2 = 2\pi \times 0.23$ Гц), див. Рис. 1.26(b). Однак, у системі без порушення симетрії з'єднані флюксони та антивихори лежать діаметрально протилежно. На противагу цьому, чим більше в системі порушується аксіальна симетрія (чим більше значення Ω), тим ближчими після злиття опиняються один до одного ці дві вихорові конструкції.

Отже, у випадку слабкого порушення симетрії ($\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц) найближчий до вертикальної вісі антивихор рухається до центрального отвору та анігілює з центральним вихором, як видно на Рис. 1.25(c). Після цього, один з вихорів (суцільна червона лінія, що є найближчою до вертикальної вісі на Рис. 1.25(d)) дрейфує до центрального отвору (Рис. 1.25(e)), в той час, як інші вихори та антивихори рухаються до зовнішньої периферії та пропадають там. Як результат, завихреність системи прямує до фінального значення $m = +1$ (Рис. 1.25(d--f)).

При збільшенні кутової швидкості Ω симетрія системи порушується ще сильніше, що дозволяє перевести систему у нерухомий стан $m = 0$ з найменшою енергією, який ніколи не спостерігається у випадку як аксіально симетричного потенціалу ($\Omega_0 = 0$ Гц), так і у випадку слабкого порушення симетрії ($\Omega_1 = 2\pi \times 0.11$ Гц). Як можна побачити на Рис. 1.26(a--c) для $\Omega_2 = 2\pi \times 0.23$ Гц вихорова динаміка загалом нагадує випадок слабкого порушення симетрії (див. Рис. 1.25); проте, подальша еволюція веде до утворення стану з нульовою завихреністю $m = 0$. Причиною цьому є те, що центральний вихор (ядро якого тимчасово змістилося ближче до внутрішнього краю конденсату) та антивихор

(утворений після розпаду одного з флюксонів), які є найближчими до вертикальної вісі (Рис. 1.26(c)), дрейфують до центрального отвору та анігілюють (Рис. 1.26(c--e)). Інші вихори та антивихори покидають систему рухаючись до зовнішнього краю тороїдального конденсату (Рис. 1.26(d--f)).

1.5 Висновки

В даному розділі розглянуто Джозефсонівський контакт між двома атомарними коаксіальними паралельними кільцеподібними конденсатами. Аналіз виконано використовуючи апроксимацію Галеркіна та прямі систематичні симуляції 3D РГП. Ці підходи продемонстрували, що в системах де завихреності кілець, $m_1 = m_2$, є однаковими, спостерігається AC ефект Джозефсона з рівномірним аксіальним розподілом тунельного струму між кільцями. Було досліджено залежність амплітуди Джозефсонівських коливань в залежності від дисбалансу населеностей для різних бар'єрів між кільцями. Було показано, що в гібридних станах з різними завихреностями ($m_1 \neq m_2$) повний тунельний потік зникає, а кутовий розподіл тунельного потоку є періодичною функцією кутової координати. Примітно, що зникнення повного тунельного потоку супроводжується утворенням Джозефсонівських вихорів (флюксонів), які знаходяться в області низької концентрації конденсату в центрі бар'єру між кільцями. При наявності різниці населеностей між кільцями флюксони починають обертатись навколо аксіальної вісі та викривлюватись.

Було досліджено динаміку систем із сильним зв'язком між кільцями конденсату. Аналіз показав, що еволюція надплинних кільцевих потоків, які зливаються, істотно визначається тривимірною динамікою Джозефсонівських вихорів. Було продемонстровано, що поведінка флюксонів та кінцевий стан системи після злиття кілець конденсату залежить від початкового дисбалансу між кільцями і відношенням між лінійними розмірами системи в аксіальному та радіальному напрямках. На відміну від ситуації зі злиттям класичних потоків, у розглянутій дисипативній квантовій системі можна спостерігати переходи в стани з вищим значенням кутового моменту ніж у системи на початку еволюції. Виявляється, для видовжених в аксіальному напрямку (сигароподібних) систем завихреність кінцевого стану завжди визначається завихреністю більш населе-

ного кільця, тоді як для стиснених в аксіальному напрямку (млинцеподібних) систем існують ненульові порогові значення дисбалансу (визначаються параметрами системи та початковими завихреностями кілець), по різні сторони від яких кінцеві стани системи є відмінними. У випадку млинцеподібних конденсатів було досліджено системи із початковими завихреностями $(0,1), (0,2), (1,-1)$ та $(2,-2)$.

В розрізі дослідження систем, що сильно видовжені у аксіальному напрямку, було розглянуто формування *динамічних вихорових гібридів*, що є довгоживучими перехідними істотно тривимірними станами з аксіально розділеними надплинними потоками з різними кутовими моментами (ми розглядали стан $m_1 = 1, m_2 = -1$) та Джозефсонівськими вихорами, які їх розділяють. Під дією слабкої дисипації, що спричинює повільний вертикальний дрейф флюксонів, гібридні системи повільно деградують з часом в стан із завихреністю, що задається домінуючою початковою компонентою. Примітно, що Джозфсонівські вихори можуть бути закріплені та стабілізовані за допомогою залишкового потенціального бар'єру між компонентами, що призводить до формування повністю стабільних тривимірних гібридних систем.

Також було досліджено динаміку квантових вихорів в системах БАК, в яких відбувається порушення аксіальної симетрії. Показано, що утворення тунельних потоків та Джозефсонівських вихорів в двокільцевих системах асоціюється зі спонтанним порушенням неперервної аксіальної симетрії до дискретної кутової симетрії. За допомогою дисипативної моделі усередненого поля було детально вивчено релаксаційні процеси для надплинних потоків з протилежними завихреностями, $(+1,-1)$ та $(+2,-2)$, які зливаються.

Виявилось, що коли населеність в одному з кілець трохи домінує над населеністю в іншому (відповідний дисбаланс населеностей не досягає порогово-

го значення, $|P| < P_{cr}$), то при відсутності порушення аксіальної симетрії фінальний стан системи визначається завихреністю менш населеного кільця.

З іншого боку, для $|P| < P_{cr}$ в залежності від величини збурення, що порушує аксіальну симетрію, можна отримати будь-який фінальний стан (у випадку системи $(+1, -1)$ можна отримати фінальні завихреності $m = +1, 0, -1$).

Для значень дисбалансу населеностей, що більші за критичне значення, $|P| > P_{cr}$, під дією порушення аксіальної симетрії можливими є не всі фінальні стани (у випадку системи $(+1, -1)$ можна отримати фінальні завихреності $m = +1, 0$ для $P > 0$, та $m = 0, -1$ для $P < 0$).

Важливим розвитком даної роботи був би розгляд вищенаведених ефектів із врахуванням хаотичної взаємодії теплової хмари неконденсованих атомів із конденсатом, що проявляється в появі шуму. Вивчення динаміки злиття кілець конденсату під дією невеликих випадкових збурень є актуальним в контексті сучасних досліджень топологічно захищених структур, якими в цьому випадку є квантовані вихори.

За результатами розділу було опубліковано статті [3-5].

РОЗДІЛ 2
ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИЙ ЕФЕКТ В ГАНТЕЛЕПОДІБНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

2.1 Вступ

Ефект Джозефсона вперше був відкритий у системі двох надпровідників, макроскопічні хвильові функції яких є слабко зв'язаними через тунельний бар'єр між ними [94,95]. Стаціонарний ефект Джозефсона в БАК експериментально спостерігався [69, 96] в атомарних хмарах, що утримуються в двоямному потенціалі, де різниця хімічних потенціалів зв'язаних конденсатів призводить до появи осцилюючого потоку атомів через бар'єр. Джозефсонівські контакти також відомі в області дослідження екситонних конденсатів [97].

Вражаючий прогрес у дослідженнях надхолодних атомарних газів породжує нову область досліджень - атомтроніку. Електроніка займається переміщенням та взаємодією електричних зарядів, тоді як атомтронні пристрої використовують для цього нейтральні атоми. У майбутньому може стати можливим виробляти атомтронні пристрої, які є аналогічними батареям, діодам і транзисторам, а також фундаментальним логічним затворам. Сьогодні ефекти, які є звичними для електронних пристроїв, знаходять свої аналоги і в області дослідження БАК. Атомтронні схеми з потенціальними бар'єрами (тунельні контакти або слабкі ланки) придатні для використання в якості аналогів надпровідного інтерференційного квантового пристрою (SQUID), який би міг реагувати на обертальні рухи [69].

Нещодавні експерименти з атомарними БАКами у гантелеподібних потенціалах-пастках [98,99], що складаються з двох потенціальних ям і вузького каналу між ними, та у тороїдальних конденсатах, розділених двома слабкими

ланками [86,100], показали, що квантові вихори збуджені за допомогою надкритичного атомарного потоку призводять до появи ефективного опору в цих атомарних ланцюгах та можуть розглядатись як резонатори. На основі вивчення турбулентного режиму з утворенням квантованих вихорів у БАК розглядається можливість створення атомтронних приладів [101].

Отже, відкриваються перспективи для вивчення Джозефсонівських ефектів в кільцеподібних та гантелеподібних геометріях БАК та пошуку умов експериментального спостереження цих ефектів.

В даній частині дисертації висвітлено результати по дослідженню турбулентного режиму та АС ефекту Джозефсона в гантелеподібній геометрії БАК за допомогою чисельного розв'язку РГП.

2.2 Модель

Як і в попередніх розділах даної дисертації, динамічні властивості ультрахолодного розрідженого атомарного БАК описуються за допомогою рівняння Гросса-Пітаєвського:

$$i\hbar\frac{\partial\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2+V(\boldsymbol{r})+g\left|\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\right|^2\right]\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r},t). \qquad (2.1)$$

Норма хвильової функції конденсату $\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r},t)$ еквівалентна кількості частинок: $N=\int|\widetilde{\Psi}|d\boldsymbol{r}$.

Кількість частинок та енергія (див. Рівн. (1.41)),

$$E=\int\left[\frac{\hbar^2}{2M}\left|\nabla\widetilde{\Psi}\right|^2+V(\boldsymbol{r})\left|\widetilde{\Psi}\right|^2+\frac{g}{2}\left|\widetilde{\Psi}\right|^4\right]d\boldsymbol{r}, \qquad (2.2)$$

є інтегралами руху Рівн. (2.1) для постійного в часі зовнішнього потенціалу $V(\boldsymbol{r})$.

Для стаціонарного стану у вигляді $\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=e^{i\mu t/\hbar}\Psi(\boldsymbol{r})$ отримуємо стаціонарне РГП,

$$\mu\Psi(\boldsymbol{r})\ =\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2+V(\boldsymbol{r})+g|\Psi(\boldsymbol{r})|^2\right]\Psi(\boldsymbol{r}), \qquad (2.3)$$

де μ – хімічний потенціал.

В даному розділі розглядається поява ефектів Джозефсона в конденсаті, що знаходиться в оптичній гантелеподібній пастці $V(\boldsymbol{r})$, параметри для якої взяті з роботи [102],

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2}M(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)+V_{well}+V_b+V_{channel}, \qquad (2.4)$$

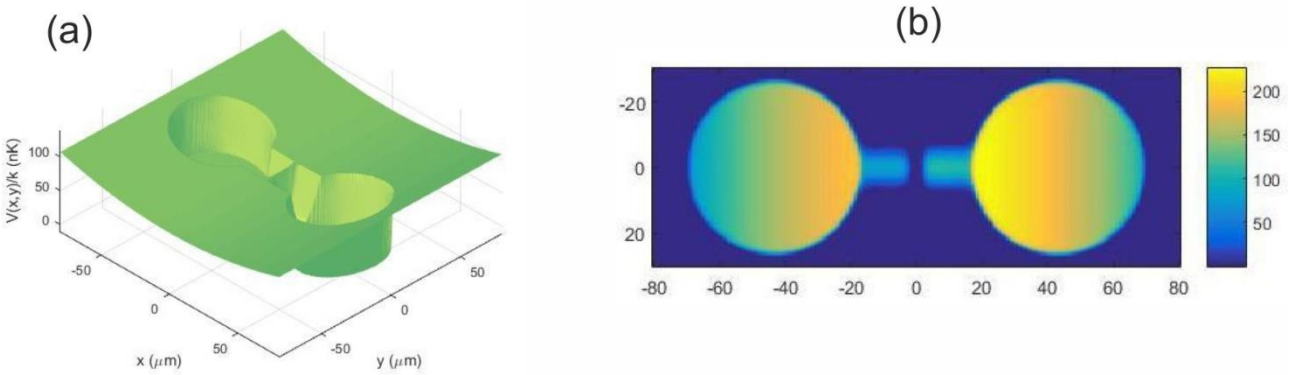

Рис. 2.1 (a) Потенціал V в горизонтальній площині (x, y) з оптичним бар'єром. (b) Переріз розподілу густини конденсату в площині $z = 0$. В каналі між двома потенціальними ямами знаходиться вузький відштовхувальний бар'єр.

де V_{well} - частина потенціалу, що відповідає за формування обох потенціальних “ям”, $V_{channel}$ - частина потенціалу, що відповідає за формування каналу між підсистемами, V_b - частина потенціалу, що відповідає за формування бар’єру в каналі, що з’єднує підсистеми.

Потенціал V (див. Рівн. (2.4)) зображено на Рис. 2.1. Для дослідження Джозефсонівських ефектів в цьому розділі використовується додатковий потенціальний бар'єр у вигляді

$$V_b = U_a \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \tag{2.5}$$

де $U_a/k = 90.4, a = 1$ μм, k – постійна Больцмана.

2.3 Турбулентний режим

Якщо помістити N частинок в праву “яму” зовнішнього потенціалу та нуль частинок в ліву частину (див Рис. 2.2), то у випадку відсутності бар'єру в каналі з'являється потік частинок з правої частини до лівої, кількості атомів у потенціальних ямах будуть прагнути до вирівнювання.

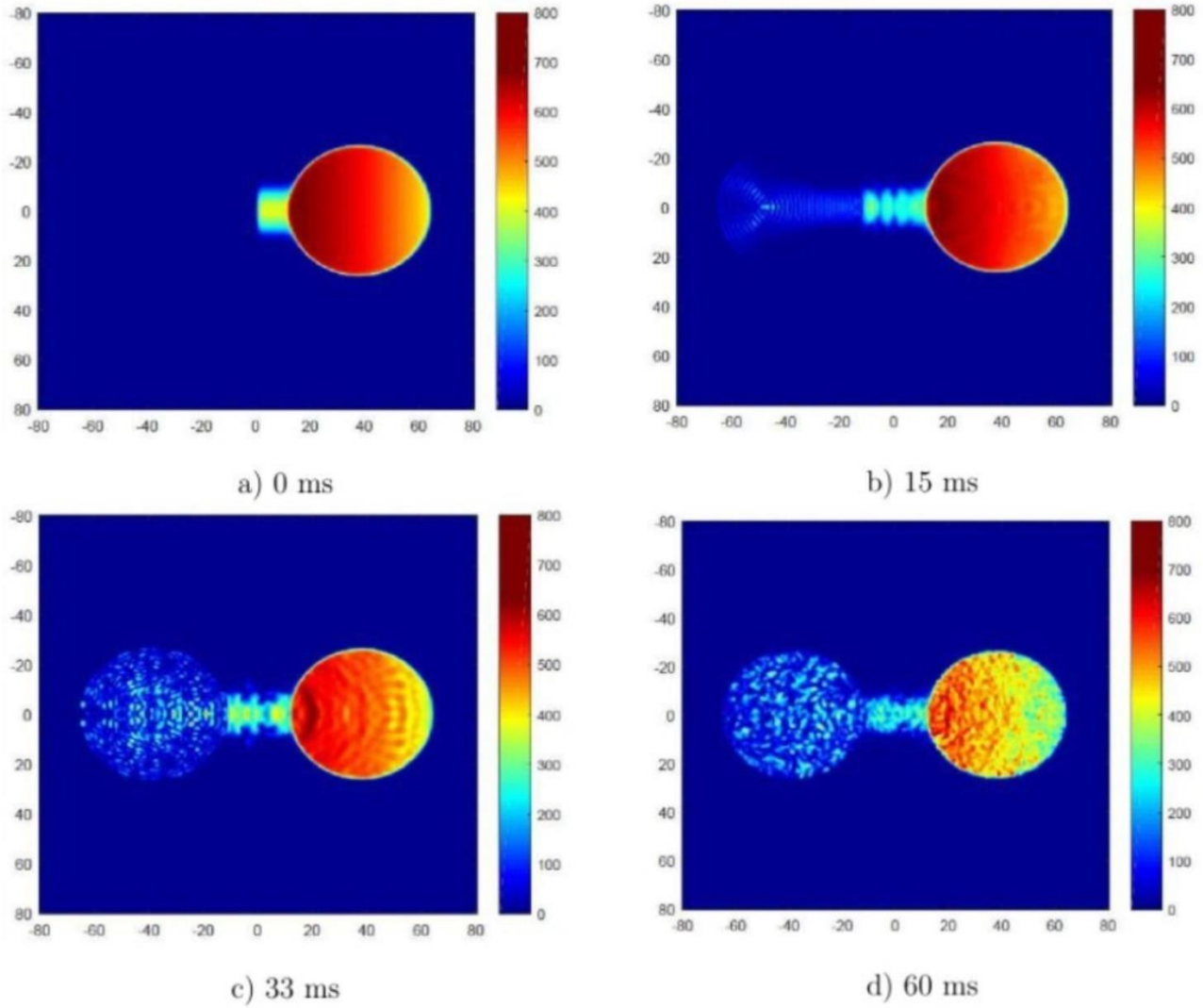

Рис. 2.2 Перерізи розподілу густини конденсату в площині $z = 0$ для різних моментів часу. В момент часу $t = 15$ мс можна спостерігати інтерференційну картину. Остаточно система переходить до турбулентного режиму, в якому потік частинок через канал між підсистемами стимулює утворення вихорів.

Було виконано 3D симуляції для параметрів з роботи [102], результати яких знаходяться в хорошому узгодженні з 2D моделюванням з даної роботи [102]. Проте, коли існує рух конденсату вздовж вісі z або ж коли стиснення у вертикальному напрямі (вздовж осі z) не є сильним, то 2D симуляції не завжди працюють добре. Отже, результат представлений у даній дисертації є більш точним, а метод більш загальним.

Як наслідок великої початкової різниці між кількостями частинок в підсистемах, було отримано турбулентну динаміку. Інтерференційна картина та вихори конденсату в турбулентному режимі під час проникнення БАК з правої частини системи в ліву (вирівнювання концентрацій конденсату в підсистемах) є добре видними на Рис. 2.2.

2.4 AC ефект Джозефсона

Для спостереження AC ефекту Джозефсона потрібно використовувати систему із бар'єром між потенціальними ямами та створювати ненульову різницю між хімічними потенціалами підсистем. Різна кількість атомів в потенціальні ями поміщалась за допомогою наступного методу: спершу знаходились стаціонарні розв'язки зі зміщеним потенціалом (до потенціалу лівої ями додавалось постійне значення U_δ), після чого моделювалась динаміка вже для незміщеного потенціалу.

Якщо створити початковий стан із N_1 атомами в лівій підсистемі та N_2 атомами ($N_1 \neq N_2$) в правій підсистемі, то виникають періодичні коливання кількості атомів в цих підсистемах. На Рис. 2.3(a) проілюстровано типову динаміку горизонтальної компоненти потоку частинок j_{x0}, де

$$\vec{j} = -\frac{i}{2}\int \left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right) d\boldsymbol{r}. \tag{2.6}$$

Для підтвердження, що дані осциляції є AC ефектом Джозефсона, було проведено велику серію чисельних симуляцій для різних значень U_δ, кожне з яких відповідає певній величині різниці хімічних потенціалів між підсистемами. У випадку кожної симуляції впродовж досліджуваної динаміки різниця хімічних потенціалів майже не змінювалась, адже використовувались невеликі значення зміщення потенціалу $U_\delta \ll V_{well}$ (див. Рівн. 2.4). Важливо відзначити, що в даному режимі нема турбулентного потоку. Частота осциляцій атомарного потоку була отримана з періодичного сигналу за допомогою Швидкого перетворення Фур'є (Fast Fourier Transform). Частота як функція хімічного потенціалу показана хрестами на Рис. 2.3(b). Суцільна лінія відповідає середньоквадратичній апроксимації чисельних результатів.

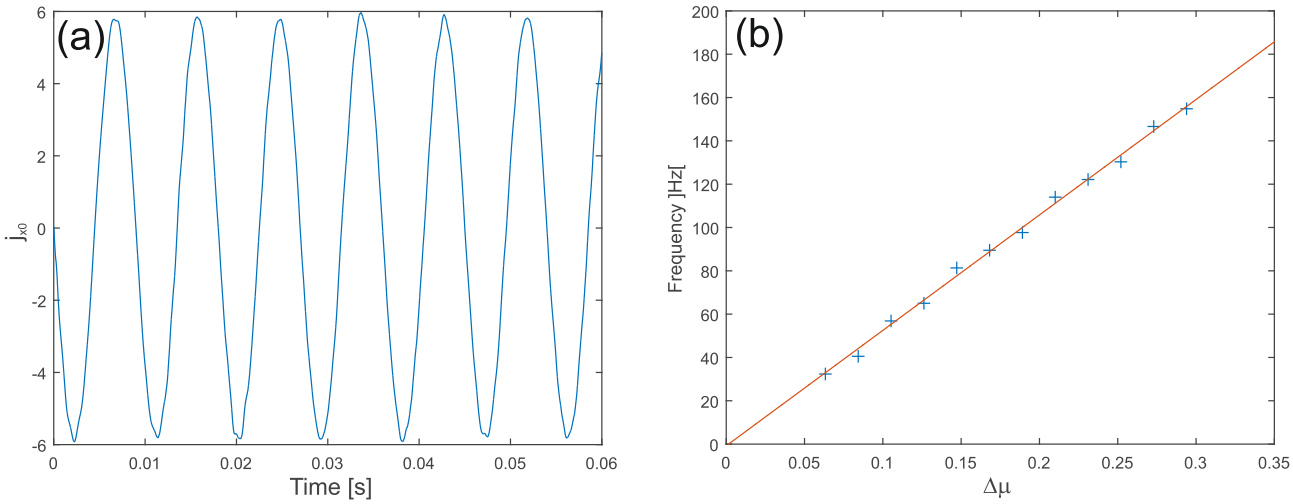

Рис. 2.3 Чисельні результати для АС ефекту Джозефсона в гантелеподібному БАК. (a) Залежність тунельного потоку через бар'єр від часу. (b) Залежність частоти коливання тунельного потоку від безрозмірної різниці хімічних потенціалів між підсистемами $\delta\mu/(\hbar\omega_z)$.

З теорії АС ефекту Джозефсона відомо, що частота коливань залежить від різниці хімічних потенціалів між підсистемами лінійним чином $\omega = \delta\mu/\hbar$. Чисельна оцінка для кута нахилу залежності частоти коливань від різниці хімічних потенціалів дає результат $\omega_a/(2\pi) = 532.9$ Гц, що знаходиться в чудовому узгодженні з теоретично очікуваним значенням $\omega_z/(2\pi) = 529$ Гц.

2.5 Висновки

В даному розділі за допомогою чисельних методів було розглянуто атомарні хмари БАК в гантелеподібних оптичних пастках. Показано, що надкритичний атомарний потік в такій геометрії створює вихорові збудження. Отримана 3D симуляція нерівноважної динаміки, яка спостерігалась на експерименті, гарно узгоджується не тільки із самим експериментом, але й з 2D апроксимацією, що відома в літературі.

При створенні постійної різниці хімічних потенціалів між підсистемами спостерігаються осцилюючі атомарні потоки крізь бар'єр, що розташовано у вузькому каналі між потенціальними ямами. Було виконано серію чисельних симуляцій для різних дисбалансів хімічних потенціалів, які показали, що спектр осциляцій відповідає режиму AC ефекту Джозефсона. Дані теоретичні результати не лише уточнюють фізичну основу експериментів з ефектами Джозефсона в атомарних БАК, але також пропонують параметри конденсату, які можуть бути використані для спостереження ефекту Джозефсона змінного струму в доступних атомтронних схемах.

За результатами розділу було опубліковано статтю [1].

РОЗДІЛ 3
УТВОРЕННЯ ВИХОРІВ В ОПТИЧНО НЕЛОКАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

3.1 Вступ

Вихорові кільця є топологічними структурами із замкненим ядром, які грають ключову роль в розпаді надплинних потоків та у квантовій турбулентності в фізиці конденсованого стану, наприклад в атомарних Бозе-Айнштайнівських конденсатах [103-105]. Спонтанна генерація оптичних вихорових кілець була передбачена теоретично в самофокусуючих середовищах [106], як регулярна послідовність вихорових петель, що перпендикулярні напрямку поширення радіально збуреного солітону. Це спонтанне утворення вихорів є наслідком нелінійного накопичення фази між піками солітону: сингулярність фази впродовж еволюції пучка вздовж вісі z виникає якщо різниця фаз між піком інтенсивності та периферією пучка досягає значення π. Схожий висновок про природу спонтанного утворення вихорів було отримано в нещодавніх експериментальних спостереженнях просторово-часових оптичних вихорових кілець [107]. На відміну від просторово-часових вихорів або вихорових кілець у рідинах, нелінійна фаза безперервної хвилі самосфокусованого світлового променя розбиває фронт хвилі на послідовність оптичних вихорових петель, що статичні у часі. В даній дисертації підтверджується загальна природа цього явища за допомогою теоретичної демонстрації того, що вихорові кільця можуть бути згенеровані на периферії фундаментального солітону, який поширюється в нелокальному нелінійному середовищі.

На противагу ситуації з локальними нелінійними середовищами, в яких солітони високих порядків (higher-order solitons) страждають від нестабільності,

що порушує симетрію [108], нелокальність може такі нестабільності нівелювати [109,110] та навіть підтримувати деякі екзотичні стани, наприклад кластери, які утворені добре відомими Лаггер- та Ерміт-Гауссовими лінійними модами [111,112]. Лаггер-Гауссові радіально-симетричні пучки з центральними світлими областями (зони високої інтенсивності), що оточені темними (зони низької інтенсивності) та світлими концентричними кільцями різних розмірів, вперше були відкриті в роботі [113] в локальних Керрівських нелінійних середовищах. Незважаючи на нульовий кутовий момент, під час поширення цих мод розвивається азимутальна нестабільність [114,115], при якій подібно до нестабільності вихорових солітонів [108] яскраві кільця розпадаються на кілька фундаментальних солітонів.

Темні кільця солітонів Лагерра являють собою циліндричну крайову фазову дислокацію. Однією із задач цього розділу є дослідження того, як збурення та нелінійна динаміка можуть впливати на такі топологічні структури ("темні циліндри") та як дані процеси можуть стосуватись утворення вихорових кілець, про які було сказано вище. Стаціонарні солітони високих порядків, які не обертаються, досліджувались у роботі [116] за допомогою наближеного варіаційного методу у нелокальному середовищі з Гаусовим відгуком. Особливістю середовища з нелокальним Гауссовим відгуком є те, що солітони високих порядків можуть демонструвати динаміку зі стійкими періодичними коливаннями між двома або більше просторово локалізованими станами з абсолютно різними симетріями [111,116]. Ця ситуація відрізняється від ефектів у нелінійних середовищах із нелокальною тепловою функцією відгуку [109]. В середовищах із нелокальним тепловим відгуком солітони з вузлами інтенсивності ("темними циліндрами") досі не були отримані, що викликає зацікавлення для проведення глибокого дослідження.

В даному розділі висвітлюється знаходження солітонів високих порядків за допомогою чисельного розв'язку стаціонарного нелінійного рівняння

Шредінгера (NLSE) з тепловою оптичною нелокальністю. Виконується дослідження стабільності оптичних солітонів в нелокальному режимі, зокрема демонструється спонтанне утворення зовнішніх вихорових кілець. Також показується, що коли циліндрична крайова дислокація фази навколо пучка зазнає топологічних перетворень, радіально-симетричне збурення призводить до народження послідовності пар вихорово-антивихорових кілець.

3.2 Стаціонарні стани в нелінійних нелокальних середовищах

Світлий просторовий солітон є хвильовим променем зі скінченним поперечним перерізом, який поширюється в нелінійному середовищі без зміни структури.

Динаміка та стабільність просторових солітонів стосовно колапсу [117] є добре дослідженою в різних нелінійних середовищах, включаючи дисипативні системи [118,119]; див. огляд та детальне обговорення порогів самофокусування та нестабільності колапсу [120].

В просторово нелокальних середовищах нелінійний відгук залежить від інтенсивності хвильового пакета на певній великій просторовій області. Нелокальність природно виникає в багатьох нелінійних середовищах. Зокрема, нелінійний відгук викликається нагріванням та іонізацією, і, як відомо, він є важливим в середовищах з тепловою нелінійністю, такими як термічне скло [121,122] та плазма [123].

Нелокальний відгук є ключовою особливістю орієнтаційних нелінійностей, які зумовлені молекулярними взаємодіями на великих дальностях в нематичних фазах рідких кристалів [124]. Потенціал міжатомної взаємодії в Бозе-Айнштайнівських конденсатах з диполь-дипольними взаємодіями також відомий як істотно нелокальний [125-127]. Відгук Бозе-Айнштайнівського конденсату на поширення крізь нього електромагнітних хвиль індукує істотно нелокальні ефективні взаємодії [128]. В усіх подібних системах нелокальна нелінійність може бути відповідальною за велику кількість цікавих ефектів, таких як ефект протидії колапсу [129,130] та стабілізація різних когерентних структур.

Базові безрозмірні рівняння, які описують поширення огинаючої елек-

тричного поля $\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$, що пов'язана із температурним збуренням $\theta(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$, мають наступну форму [109]:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Delta_{\perp}\Psi+\theta\Psi=0,$$

$$\alpha^2\theta-\Delta_{\perp}\theta=|\Psi|^2, \qquad (3.1)$$

де $\Delta_{\perp}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}$. Вони описують поширення світла в об'ємі середовища з тепловим нелінійним відгуком. Подібні ефекти з'являються також, як вже згадувалось вище, при вивченні двомірних світлих солітонів в нематичних рідких кристалах [124] та частково іонізованих плазмах [121].

В ліміті $\alpha^2 \gg 1$ можна знехтувати другим членом в рівнянні для поля θ (3.1) і звести дану систему до стандартного локального нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю. Протилежний випадок, коли $\alpha^2 \ll 1$, може бути названим сильно нелокальним режимом поширення променя. Друге рівняння системи рівнянь (3.1) може бути просто розв'язане за допомогою використання функції Гріна; даний метод представлений в [109] та в [128] для граничного випадку $\alpha = 0$.

Пошук стаціонарного безвихорового розв'язку системи (3.1) виконується в наступному вигляді:

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=\psi_n(r)\exp(i\Lambda z), \qquad (3.2)$$

де $r=\sqrt{x^2+y^2}$ - радіальна координата, Λ - константа поширення променя, n - число нулів (вузлів) профілю функції $\psi_n(r)$. Такі розв'язки описують і фундаментальні оптичні солітони ($n = 0$), і солітони високих порядків з n вузлами, коли $n > 0$. Якщо підставити (3.2) в (3.1), отримуємо наступну систему рівнянь:

$$-\lambda\psi_n+\Delta_r\psi_n+\theta\psi_n=0,$$

$$\theta-\Delta_r\theta=|\psi_n|^2, \qquad (3.3)$$

де $\lambda=\Lambda/\alpha^2$ - перемасштабована константа поширення, $\Delta_r=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$. Тут розглядається випадок $\alpha \neq 0$, який означає, що і поле $\psi_n(r)$, і тепловий розподіл $\theta(r)$ швидко затухають при $r \to \infty$.

Для пошуку фундаментального солітону система рівнянь (3.3) розв'язувалась методом Петвіашвілі [131]. Для отримання солітонів високих порядків було використано метод стрільби (розв'язок системи (3.3) за допомогою підбору крайових умов).

Приклади чисельних розв'язків у формі солітонів з кількістю вузлів $n = 1$ та $n = 2$ показані на Рис. 3.1.

Рисунок 3.2(a) показує потужність променя $P = \int |\psi_n|^2 d^2\boldsymbol{r}$ як функцію перемасштабованої константи поширення λ. Зауважте, що в сильно нелокальному режимі ($\alpha^2 \ll 1$, тобто $\lambda \gg 1$) профіль температурного розподілу є ширшим, ніж ефективний радіус центрального світлого ядра солітону.

Визначимо наступним чином ефективний радіус r_ψ розподілу інтенсивності ($|\psi|^2$) та ефективний радіус r_θ теплового розподілу (θ):

$$r_\psi^2 = \frac{1}{P}\int r^2|\psi_n(r)|^2 d^2\boldsymbol{r}, \quad r_\theta^2 = \frac{\int r^2\theta(r)d^2\boldsymbol{r}}{\int \theta(r)d^2\boldsymbol{r}}. \tag{3.4}$$

Рисунок 3.2(b) показує ефективні радіуси r_ψ та r_θ в залежності від λ. Як r_ψ, так і r_θ монотонно спадають зі зростанням λ.

Поширення фундаментального солітону ($n = 0$) та солітонів високих порядків при наявності збурень було чисельно пораховано використовуючи "спосіб розділення кроку Фур'є" (split-step Fourier method) з контролем збереження інтегралів руху: (i) потужності променя, (ii) імпульсу $\mathbf{I}_\perp = \int \boldsymbol{j}\, d^2\boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{j} = -\frac{i}{2}\{\Psi^*\nabla_\perp\Psi - \Psi\nabla_\perp\Psi^*\}$, (iii) моменту імпульсу $\mathbf{M}_z =$

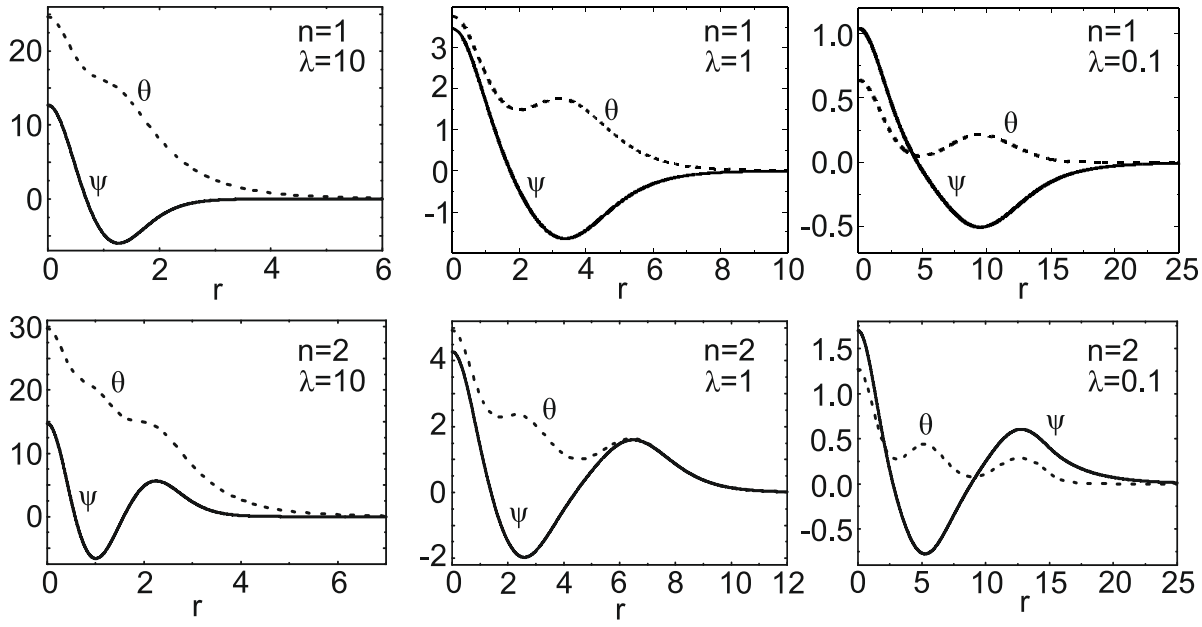

Рис. 3.1 Типові приклади чисельних стаціонарних розв'язків для солітонів з $n = 1$ (солітон з одним кільцем) та $n = 2$ (солітон з двома кільцями).

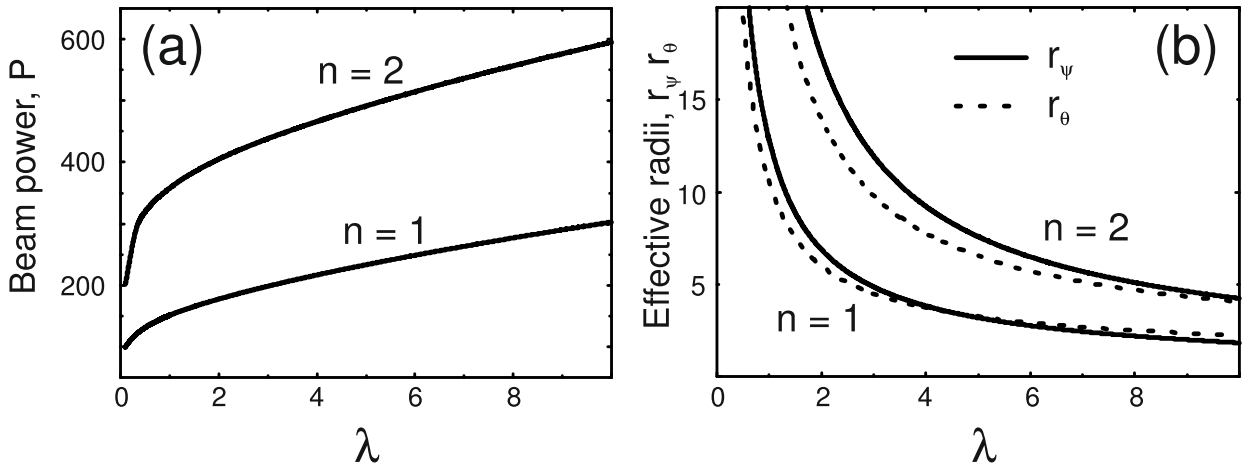

Рис. 3.2 Параметри метастабільних солітонів ($n = 1,2$): (a) Потужність променя (Beam power) в залежності від λ; (b) Ефективні радіуси (Effective radii) r_ψ (суцільні криві) та r_θ (пунктирні криві) в залежності від λ.

$\int [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}]\, d^2\boldsymbol{r}$ та (iv) Гамільтоніану $\mathrm{H} = \int \left\{ |\nabla_\perp \Psi|^2 - \frac{1}{2}\theta\Psi \right\} d^2\boldsymbol{r}$. При аксіально-симетричних збуреннях всі розглянуті структури зберігають поперечний до напрямку поширення пучка імпульс та момент імпульсу рівними нулю.

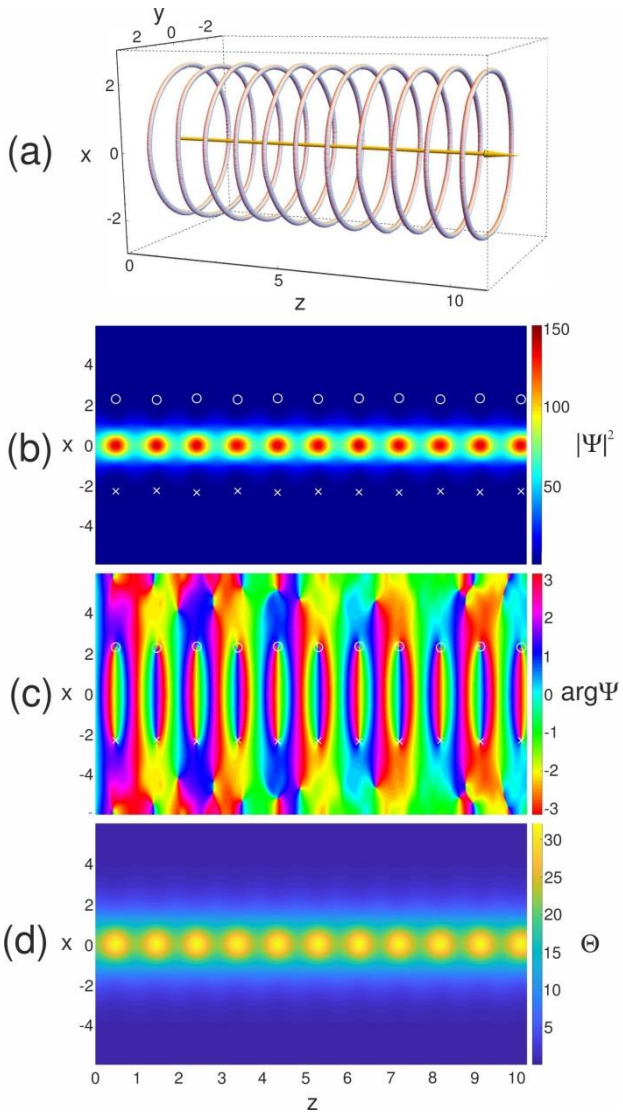

Рис. 3.3 Спонтанна генерація регулярного набору вихорових кілець з'являється в результаті сильного збурення $a = 1.3$ фундаментального солітону. (a) Позиція вихорових ядер. Переріз в площині $y = 0$ для: (b) розподілу інтенсивності $|\Psi(x,z)|^2$; (c) розподілу фази $arg\Psi(x,z)$; (d) розподілу температурного збурення $\Theta(x,z)$.

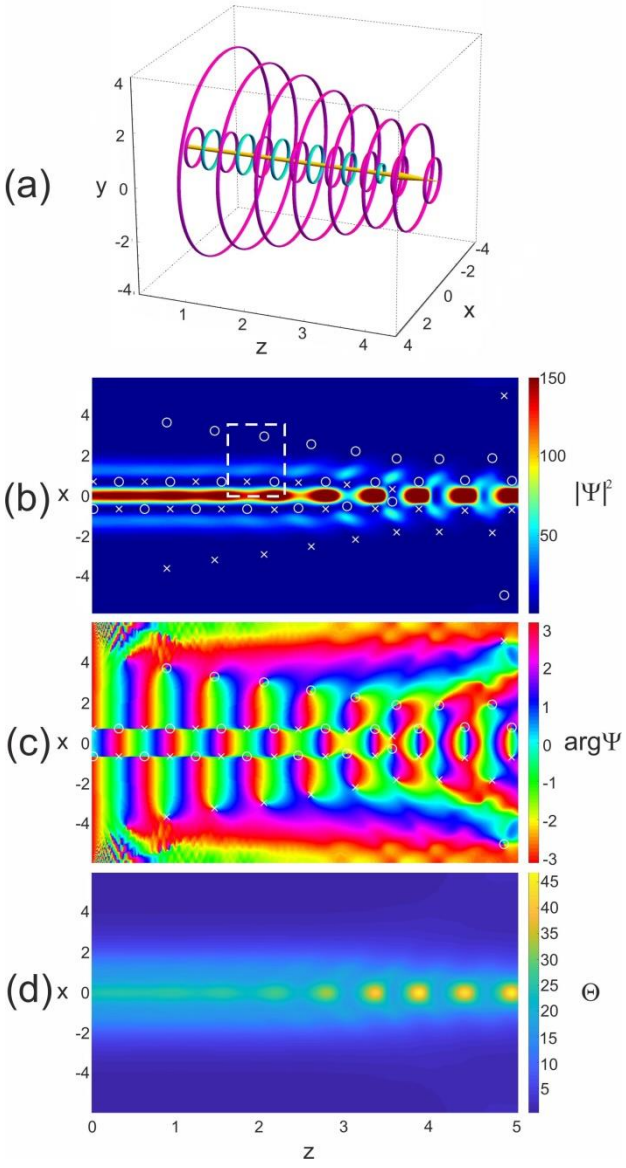

Рис. 3.4 Спонтанна генерація регулярного набору пар кілець вихорів та антивихорів, які з'являються як результат слабкого збурення $a = 1.01$ солітону з одним вузлом ($n = 1$). (a) Позиція вихорових ядер. Переріз в площині $y = 0$ для: (b) розподілу інтенсивності $|\Psi(x,z)|^2$; (c) розподілу фази $arg\Psi(x,z)$; (d) розподілу температурного збурення $\Theta(x,z)$.

3.3 Вихорові кільця на фундаментальних солітонах

В цьому розділі демонструється симуляція еволюції фундаментального солітону вздовж вісі z з початковою умовою у вигляді: $\Psi(r, z = 0) = a^{-1}\psi(r/a)$. Початкове розтягнення (радіальна деформація) з $a \neq 1$ веде до радіальних осциляцій та додаткової нелінійної варіації фази. Рисунок 3.3 демонструє цей процес для збуреного фундаментального солітону з польовою топологічною структурою навколо нього, а саме появою регулярного набору вихорових кілець, подібних до вихорових кілець виявлених в [106] для середовищ з локальною насичувальною нелінійністю. За умови сильного збурення $a = 1.3$ та $\lambda = 10$ (випадок сильної нелокальності) спостерігаються доволі довговічні коливання зі спонтанною генерацією набору вихорових кілець.

3.4 Вихорові кільця та лінії на солітонах високих порядків

Відомо, що фундаментальні солітони є стійкими в нелокальних нелінійних середовищах [129]. Стабільність структур високих порядків (таких як вихорові солітони, зв'язані стани солітонів та інших структур) залежить від конкретного виду нелокальності. Для моделі з Гаусовим типом відгуку приклад розповсюдження однозарядного Лагер-Гаусового проміня LG_1^1 першого порядку ($n = 1$) продемонстровано в [110]. В цьому розділі розглядається динаміка солітонів високих порядків в нелінійних середовищах з тепловим відгуком для різних типів збурення отриманих чисельним методом.

Для спрощення було проаналізовано еволюцію солітону з $n = 1$ вузлом (солітон має крайову дислокацію інтенсивності у вигляді кільця навколо ядра пучка). Спершу, для того, щоб мати можливість порівнювати результати з випадком фундаментального солітону, беремо $\lambda = 10$. Спочатку солітон збурюється радіально з $a = 1.01$, як і в попередньому випадку. Топологічна нестабільність крайової дислокації фази (невизначеність фази в області низької густини першого вузла хвильової функції) призводить до її розщеплення на набір пар вихорових та антивихорових кілець по одній парі на період коливання (див. Рис. 3.4). Виникнення зовнішніх вихорових кілець пов'язане з радіальним звуженням променя і призводить до циркуляції енергії від периферії до ядра променя, через що енергетичний потік утворює точки сідла в області низької інтенсивності, де розташовані внутрішні вихорові кільця (див. Рис. 3.5).

Цей ефект можна пояснити з точки зору топології. У випадку незбуреного солітону з одним вузлом, що поширюється вздовж вісі z, поверхні, на яких реальна та уявна частини поля Ψ дорівнюють нулю, є ідеальними циліндрами, що збігаються. Якщо циліндри збурені радіально, то вони коливаються з однаковою частотою, але, в загальному випадку, з різною фазою, тому вони перети-

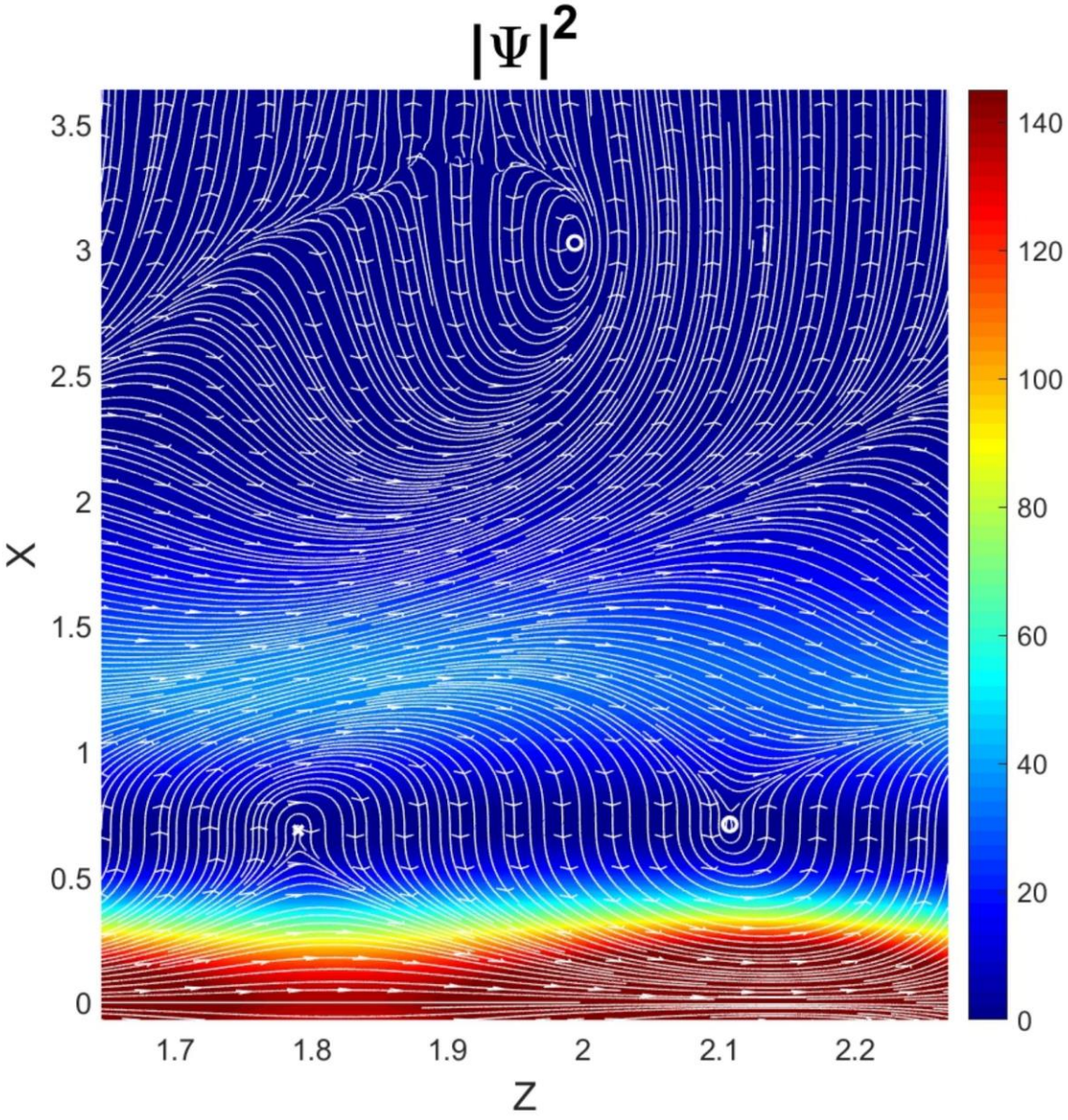

Рис. 3.5 ільшений фрагмент зображення інтенсивності (позначений на Рис. 3.4(b) у вигляді пунктирного прямокутника) з потоками вектору Пойнтінга. Вихорове та антивихорове ядра на цьому розрізі ілюструються відповідно як біле коло та білий хрест.

наються один з одним двічі за період коливань. Тому зовнішні вихорові кільця та внутрішні пари вихорів та антивихорів мають зовсім різне топологічне по-

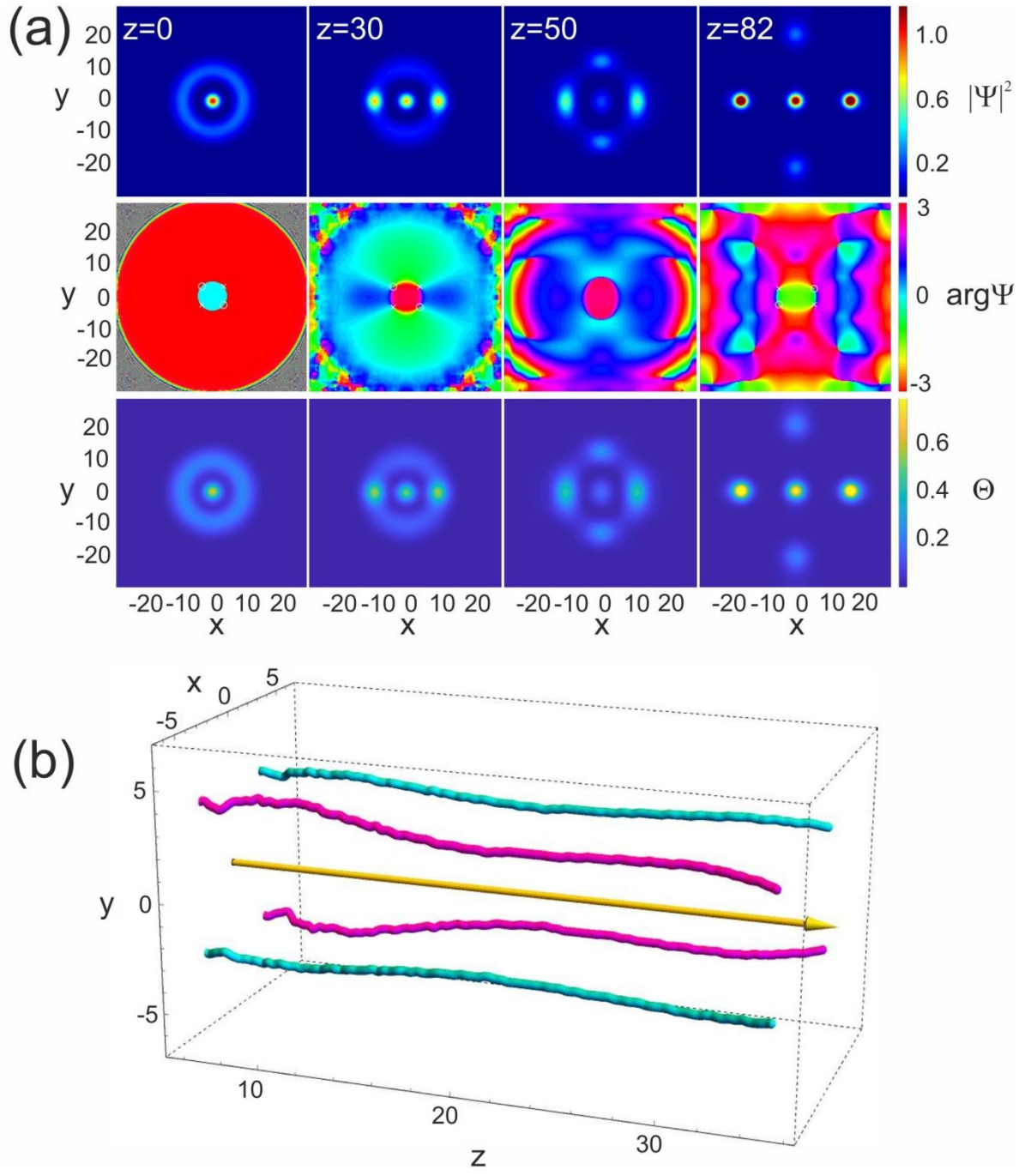

Рис. 3.6 (a) Поперечні перерізи для еволюції оптичного солітону з $n = 1$ вздовж вісі z для різних моментів часу, $\lambda = 0.1$. Показаний розподіл інтенсивності $|\Psi(x,z)|^2$, фази $arg\Psi(x,z)$ та температурного збурення $\Theta(x,z)$. (b) Траєкторії ядер вихору (зелений) та антивихору (червоний), що поширюються вздовж вісі z.

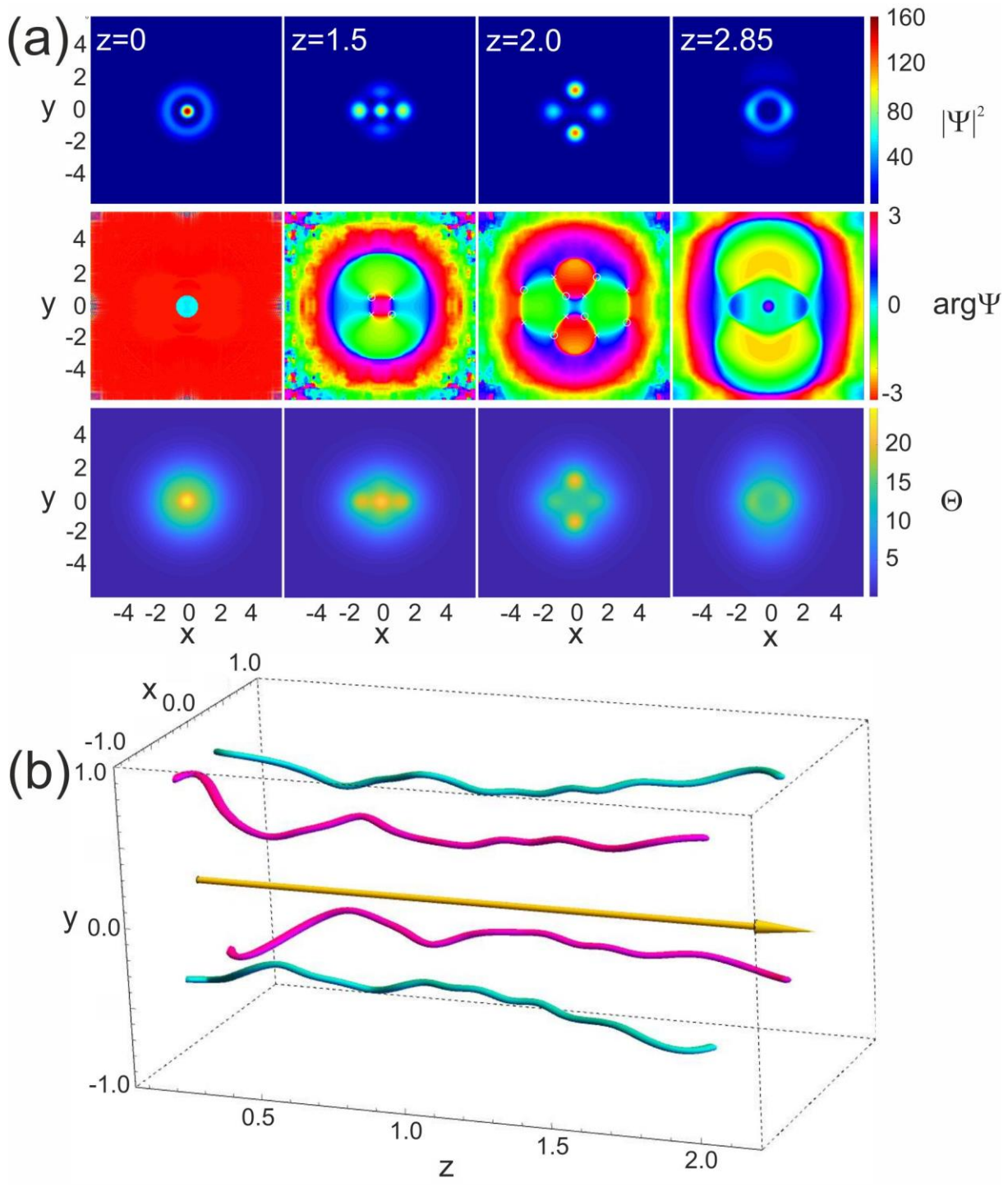

Рис.3.7 Поперечні перерізи для еволюції оптичного солітону з $n = 1$ вздовж вісі z для різних моментів часу, $\lambda = 10$. Показаний розподіл інтенсивності $|\Psi(x,z)|^2$, фази $arg\Psi(x,z)$ та температурного збурення $\Theta(x,z)$. (b) Траєкторії ядер вихору (зелений) та антивихору (червоний), що поширюються вздовж вісі z.

ходження, а існування внутрішніх кілець є специфічною топологічною особливістю солітонів з вузлами.

Ще одним збуренням, яке було використане в даному дослідженні, є квадрупольне збурення, з початковою умовою у вигляді $\Psi(r, z = 0) = \psi(r)(1 + \epsilon * \cos(\mathrm{L}\varphi))$, де $\epsilon = 0.025$ та L=2. Результат еволюції солітону для цього збурення показаний на Рис. 3.6 та Рис. 3.7 у випадках майже локального та сильно нелокального режимів відповідно.

Солітони високих порядків є виключно “метастабільними” в нелокальних середовищах з функцією теплового відгуку. Ці структури навіть у випадку сильних збурень не розпадаються моментально і поширюються на значну відстань. Однак, модуляційна нестабільність, що порушує симетрію, розвивається після декількох коливань променя та призводить до сильної трансформації просторового профілю інтенсивності хвилі. Врешті-решт, азимутальна нестабільність солітону в слабко нелокальному режимі веде до розпаду солітонів високих порядків, що можна бачити на Рис. 3.6.

В чисельних симуляціях у випадку сильно нелокального середовища спостерігалась динаміка з частковим відновленням початкового солітону, який ще не розпався, що є схожим на ситуацію в роботі [116] для моделі, яка базується на гаусовій нелокальності середовища. Однак, на відміну від моделі з гаусовим типом відгуку, солітони високих порядків не виявляють сильних коливань між власними станами різної симетрії в середовищі з тепловою нелокальною нелінійністю. Як видно на Рис. 3.7 солітони високих порядків спочатку трансформуються в Ермітово-Гаусову моду, після чого швидко розпадаються. Солітони з більшою кількістю кілець ($n \geq 2$) розпадаються в подібний спосіб, при цьому відбувається це ще швидше ніж у випадку солітону з одним вузлом.

Загальна особливість різних динамік збурених солітонів в обох режимах це наявність квадрупольного набору вихорових ліній. Вони з'являються в

регіонах низької інтенсивності поля незалежно від величини нелокальності. Існування чотирьох вихорових ліній має також топологічну природу. Коли збурення променя є квадрупольною модою (L=2), поверхня дійсної та уявної частин поля Ψ деформується у два еліптичні циліндри, які перетинаються вздовж чотирьох паралельних ліній вздовж вісі z.

Головною проблемою для експериментального спостереження зовнішніх вихорових кілець є те, що вони знаходяться на периферії променя в області низької інтенсивності поля Ψ. Внутрішні вихорові кільця та лінії живуть достатньо довго в сильно нелокальному режимі, і вони можуть бути легко задетектовані в центральній області променя.

3.5 Висновки

В даному розділі було досліджено різні вихорові комплекси, які спонтанно утворюються зі збурених солітонних структур в нелокальному нелінійному середовищі з тепловою функцією відгуку. Використовуючи прямі чисельні симуляції було отримано солітонні стани з n вузлами (солітони з центральною світлою областю та n коаксіальними світлими кільцями різних розмірів навколо центру). Ці структури швидко розпадаються на декілька фундаментальних солітонів внаслідок аксіальної нестабільності, що порушує аксіальну симетрію системи, проте вони є метастабільними та демонструють динаміку з частковими поновленнями форми структури для сильно нелокального режиму.

Було показано, що у випадку радіально збуреного фундаментального солітону навколо нього на периферії спонтанно утворюються вихорові кільця. Цікавою топологічною особливістю радіально збурених солітонів високих порядків є поява додаткових внутрішніх вихорово-антивихорових пар кілець, перпендикулярних оптичній осі. На відміну від радіальних збурень, режим збурень із квадрупольною симетрією призводить до появи просторово стійких внутрішніх пар вихорових та антивихорових ліній, що спрямовані вздовж оптичної вісі. Ці вихорови та антивихори народжуються парами, внаслідок чого в системі виконується збереження орбітального кутового моменту.

За результатами розділу було опубліковано статтю [2].

ВИСНОВКИ

В дисертації вивчались вихорові структури в нелінійних оптичних середовищах та Бозе-Айнштайнівських конденсатах з різною геометрією. Основні результати полягають у наступному:

- Виявлено, що тунельний потік між двома кільцеподібними коаксіальними вертикально зв'язаними надплинними атомарними конденсатами сильно залежить від топологічного заряду кожного з кілець. Зокрема, у випадку, коли завихреності кілець є різними, повний тунельний потік між підсистемами дорівнює нулю. В той же час, показано, що в даному випадку розподіл тунельного потоку є періодичним по аксіальній координаті, внаслідок чого між кільцями утворюються горизонтальні Джозефсонівські вихори в області низької густини конденсату.

- Показано, що залежність амплітуди тунельного потоку через Джозефсонівський контакт між надплинними підсистемами має екстремум при малих значеннях початкового дисбалансу населеностей.

- Встановлено, що при злитті двох надплинних кільцеподібних потоків із різними завихреностями кінцевий стан сильно залежить від початкового дисбалансу населеностей між кільцями БАК.

- Показана можливість отримання довгоживучих гібридних станів із прихованими завихреностями шляхом злиття надплинних кільцеподібних потоків.

- Досліджено механізм отримання різних кінцевих станів надплинних кільцеподібних потоків, які зливаються, за допомогою порушення аксіальної симетрії системи.

- Показано, що в системі БАК, які взаємодіють через вузький канал, можна отримати Джозефсонівські коливання тунельного потоку.

- Встановлено, що малі збурення фундаментальних оптичних солітонів та солітонів високих порядків, які поширюються в нелінійних середовищах з тепловим відгуком, породжують в областях низької освітленості різні вихорові структури: вихорові кільця та лінії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. A. Yakimenko, O. Matsyshyn, A. Oliinyk, V. Biloshytskyi, O. Chelpanova, and S. Vilchynskii, “Analogues of Josephson junctions and black hole event horizons in atomic Bose-Einstein condensates,” *Low Temperature Physics,* vol. 44, p. 1032, 05 2018.
2. V. Biloshytskyi, A. Oliinyk, P. Kruglenko, A. Desyatnikov, and A. Yakimenko, “Vortex nucleation in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. A,* vol. 99, p. 043835, Apr 2019.
3. A. Oliinyk, A. Yakimenko, and B. Malomed, “Tunneling of persistent currents in coupled ring-shaped Bose–Einstein condensates,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 52, p. 225301, Oct 2019.
4. A. Oliinyk, B. Malomed, and A. Yakimenko, “Nonlinear dynamics of Josephson vortices in merging superfluid rings,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 83, p. 105113, 2020.
5. A. Oliinyk, I. Yatsuta, and A. Yakimenko, “Symmetry breaking in interacting ring-shaped superflows of Bose–Einstein condensates,” *Symmetry*, vol. 11, p. 1312, 10 2019.
6. A. Oliinyk, I. Yatsuta, B. Malomed, and A. Yakimenko “Symmetry breaking in weak- and strong- coupled ring-shaped superflows of Bose-Einstein condensates,” in *X Young Scientists Conference, Problems of Theoretical Physics, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24,* 2019.
7. A. Davidson, B. Dueholm, and N. Pedersen, “Experiments on soliton motion in annular Josephson junctions,” *Journal of Applied Physics*, vol. 60, pp. 1447 - 1454, 09 1986.

8. A. Ustinov, T. Doderer, R. Huebener, N. Pedersen, B. Mayer, and V. Oboznov, "Dynamics of sine-gordon solitons in the annular Josephson junction," *Physical review letters*, vol. 69, pp. 1815 - 1818, 10 1992.
9. Z. Hermon, A. Stern, and E. Ben-Jacob, "Quantum dynamics of a fluxon in a long circular Josephson junction," *Phys. Rev. B*, vol. 49, pp. 9757 - 9762, Apr 1994.
10. A. Ustinov, "Observation of a radiation-induced soliton resonance in a Josephson ring," *JETP Lett.*, vol. 64, p. 191, 1996.
11. A. V. Ustinov, B. A. Malomed, and E. Goldobin, "Backbending current-voltage characteristic for an annular Josephson junction in a magnetic field," *Phys. Rev. B*, vol. 60, pp. 1365 - 1371, Jul 1999.
12. A. Ustinov, "Fluxon insertion into annular Josephson junctions," *Applied Physics Letters*, vol. 80, pp. 3153 - 3155, 04 2002.
13. M. Fistul, A. Wallraff, Y. Koval, A. Lukashenko, and A. Ustinov, "Quantum dissociation of a vortex-antivortex pair in a long Josephson junction," *Physical review letters*, vol. 91, p. 257004, 01 2004.
14. A. Ustinov, C. Coqui, A. Kemp, Y. Zolotaryuk, and M. Salerno, "Ratchetlike dynamics of fluxons in annular Josephson junctions driven by biharmonic microwave fields," *Physical review letters*, vol. 93, p. 087001, 09 2004.
15. M. D. Sherrill and M. Bhushan, "Cylindrical Josephson tunneling," *Phys. Rev.*, vol. 19, p. 1463, 1979.
16. P. B. Burt and M. D. Sherrill, "The DC Josephson currentin cylindrical junctions," *Physics Letters A*, vol. 85, p. 97, 1981.
17. D. Tilley, "Cylindrical Josephson junctions," *Physics Letters*, vol. 20, no. 2, pp. 117 - 118, 1966.
18. S. Watanabe, H. S. van der Zant, S. H. Strogatz, and T. P. Orlando, "Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 97, no. 4, pp. 429 - 470, 1996.

19. E. Trías, J. J. Mazo, F. Falo, and T. P. Orlando, “Depinning of kinks in a Josephson-junction ratchet array,” *Phys. Rev. E*, vol. 61, pp. 2257 - 2266, Mar 2000.

20. J. Brand, T. J. Haigh, and U. Zülicke, “Sign of coupling in barrier separated Bose-Einstein condensates and stability of double-ring systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 025602, Feb 2010.

21. X.-F. Zhang, B. Li, and S.-G. Zhang, “Rotating spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in concentrically coupled annular traps,” *Laser Physics*, vol. 23, p. 105501, 08 2013.

22. J. Polo, A. Benseny, T. Busch, V. Ahufinger, and J. Mompart, “Transport of ultracold atoms between concentric traps via spatial adiabatic passage,” *New Journal of Physics*, vol. 18, p. 015010, Jan 2016.

23. J. Brand, T. Haigh, and U. Zuelicke, “Rotational fluxons of Bose-Einstein condensates in coplanar double-ring traps,” *Physical Review A*, vol. 80, p. 11602(R), 12 2008.

24. C. Baals, H. Ott, J. Brand, and A. M. Mateo, “Nonlinear standing waves in an array of coherently coupled Bose-Einstein condensates,” *Physical Review A*, vol. 98, p. 053603, 2018.

25. L. Amico, D. Aghamalyan, F. Auksztol, H. Crepaz, R. Dumke, and L. Kwek, “Superfluid qubit systems with ring shaped optical lattices,” *Scientific reports*, vol. 4, p. 4298, 03 2014.

26. D. Aghamalyan, L. Amico, and L. Kwek, “Effective dynamics of cold atoms flowing in two ring shaped optical potentials with tunable tunneling,” *Physical Review A*, vol. 88, p. 063627, 06 2013.

27. T. Haug, L. Amico, R. Dumke, and L.-C. Kwek, “Mesoscopic Vortex-Meissner currents in ring ladders,” *Quantum Science and Technology*, vol. 3, p. 035006, May 2018.

28. A. Richaud and V. Penna, “Quantum dynamics of bosons in a two-ring ladder: Dynamical algebra, vortexlike excitations, and currents,” *Physical Review A*, vol. 96, 05 2017.

29. A. Gallemí, A. Mateo, R. Mayol, and M. Guilleumas, “Coherent quantum phase slip in two-component bosonic atomtronic circuits,” *New Journal of Physics*, vol. 18, 09 2015.

30. E. Nicolau, J. Mompart, B. Julía-Díaz, and V. Ahufinger, “Orbital angular momentum dynamics of Bose-Einstein condensates trapped in two stacked rings,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 023331, Aug 2020.

31. M. I. Qadir and T. Zoma, “Symmetric bound states of Josephson vortices in BEC,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 96, no. 2, pp. 208 - 212, 2018.

32. T. W. A. Montgomery, R. G. Scott, I. Lesanovsky, and T. M. Fromhold, “Spontaneous creation of nonzero-angular-momentum modes in tunnel-coupled two-dimensional degenerate Bose gases,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 063611, Jun 2010.

33. S.-W. Su, S.-C. Gou, A. Bradley, O. Fialko, and J. Brand, “Kibble-Zurek scaling and its breakdown for spontaneous generation of Josephson vortices in Bose-Einstein condensates,” *Physical review letters*, vol. 110, p. 215302, 05 2013.

34. B. Ramachandhran, B. Opanchuk, X.-J. Liu, H. Pu, P. Drummond, and H. Hu, “Half-quantum vortex state in a spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate,” *Physical Review A*, vol. 85, p. 023606, 01 2012.

35. H. Sakaguchi and B. Li, “Creation of two-dimensional composite solitons in spin-orbit-coupled self-attractive Bose-Einstein condensates in free space,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 89, p. 032920, 03 2014.

36. A. V. Ustinov, “Solitons in Josephson junctions,” *Physica D*, vol. 123, pp. 315 - 329, 1998.

37. V. M. Kaurov and A. B. Kuklov, “Josephson vortex between two atomic Bose-Einstein condensates,” *PRA*, vol. 71, p. 011601, Jan 2005.

38. V. M. Kaurov and A. B. Kuklov, “Atomic Josephson vortices,” *PRA*, vol. 73, p. 013627, Jan 2006.

39. Gallemí, A. and Guilleumas, M. and Mayol, R. and Mateo, A. Muñoz, “Multi-dimensional Josephson vortices in spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates: Snake instability and decay through vortex dipoles,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 033618, Mar 2016.

40. Z. Chen, Y. Li, and B. A. Malomed, “Josephson oscillations of chirality and identity in two-dimensional solitons in spin-orbit-coupled condensates,” *Phys. Rev. Research*, vol. 2, p. 033214, Aug 2020.

41. J. A. G. Granados, A. M. Mateo, M. Guilleumas, and X. Viñas, “Transverse Josephson vortices and localized states in stacked Bose-Einstein condensates,” *New Journal of Physics*, vol. 21, p. 043036, Apr 2019.

42. W. R. Peltier and C. P. Caulfield, “Mixing efficiency in stratified shear flows,” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 35, pp. 135 - 167, 2003.

43. M. Tsubota, M. Kobayashi, H. Takeuchi, “Quantum hydrodynamics,” *Phys. Rep.*, vol. 522, p. 191, 2013.

44. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, “Crossover between Kelvin-Helmholtz and counter-superflow instabilities in two-component Bose-Einstein condensates,” *PRA*, vol. 82, p. 063604, Dec 2010.

45. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, “Quantum Kelvin-Helmholtz instability in phase-separated two component Bose-Einstein condensates,” *PRB*, vol. 81, p. 094517, Mar 2010.

46. T. Kanai, W. Guo, M. Tsubota, and D. Jin, “Torque and angular momentum transfer in merging rotating Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 105302, Mar 2020.

47. A.W. Baggaley, N.G. Parker, “Kelvin-Helmholtz instability in a single-component atomic superfluid,” *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 053608, 2018.

48. M. Brtka, A. Gammal, and B. A. Malomed, “Hidden vorticity in binary Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 053610, 2010.

49. L. Wen, Y. Qiao, Y. Xu, and L. Mao, “Structure of two-component Bose-Einstein condensates with respective vortex-antivortex superposition states,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 033604, 2013.

50. A. I. Yakimenko, K. O. Isaieva, S. I. Vilchinskii, and M. Weyrauch, “Stability of persistent currents in spinor Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 051602, 2013.

51. S. Ishino, M. Tsubota, and H. Takeuchi, “Counter-rotating vortices in miscible two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 063617, 2013.

52. S. Ishino, M. Tsuboto, and H. Takeuchi, “Matter-wave interactions in twocomponent Bose-Einstein condensates,” *EPL*, vol. 111, p. 30005, 2015.

53. M. Hoashi, Y. Nakamura, and Y. Yamanaka, “Analytical study of parameter regions of dynamical instability for two-component Bose-Einstein condensates with coaxial quantized vortices,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 043622, 2016.

54. S.-L. Xu, Z.-Q. Wang, J.-R. He, L. Xue, and M. R. Belic, “Vector vortex solitons in two-component Bose-Einstein condensates with modulated nonlinearities and a harmonic trap,” *J. Mod. Opt.*, vol. 65, pp. 1542 - 1548, 2018.

55. Y. Li, Z. Chen, Z. Luo, C. Huang, H. Tan, W. Pang, and B. A. Malomed, “Two-dimensional vortex quantum droplets,” *PRA*, vol. 98, p. 063602, Dec 2018.

56. D. Leykam, B. Malomed, and A. S. Desyatnikov, “Composite vortices in nonlinear circular waveguide arrays,” *J. Optics*, vol. 82, p. 053610, 2013.

57. J. R. Salgueiro, “Vector-vortex solitons in nonlinear photonic crystal fibers,” *J. Optics*, vol. 18, p. 074004, 2016.

58. T. Mayteevarunyoo, B. Malomed, and D. Skryabin, “Vortex modes supported by spin-orbit coupling in a laser with saturable absorption,” *New J. Phys.*, vol. 20, p. 113019, 2018.

59. M. Ikuta, Y. Sugano, and H. Saito, “Symmetry-breaking instability of leapfrogging vortex rings in a Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 043610, Apr 2019.

60. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*. Clarendon Press, 2003.

61. I. Lesanovsky and W. von Klitzing, “Spontaneous emergence of angular momentum Josephson oscillations in coupled annular Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 050401, Jan 2007.

62. Z. Chen, Y. Li, N. P. Proukakis, and B. A. Malomed, “Immiscible and miscible states in binary condensates in the ring geometry,” *New Journal of Physics*, vol. 21, p. 073058, Jul 2019.

63. S. Brenner and R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York: Springer, 2002.

64. J. Guermond, P. Minev, and J. Shen, “An overview of projection methods for incompressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 6011 - 6045, 09 2006.

65. J. Wang, L. Zhang, and Y. Zhou, “A simultaneous space-time wavelet method for nonlinear initial boundary value problems,” *Applied Mathematics and Mechanics*, pp. 1 - 20, 09 2018.

66. R. Driben, V. Konotop, B. Malomed, and T. Meier, “Dynamics of dipoles and vortices in nonlinearly coupled three-dimensional field oscillators,” *Physical review. E*, vol. 94, p. 012207, Jul 2016.

67. E. Shamriz, N. Dror, and B. A. Malomed, “Spontaneous symmetry breaking in a split potential box,” *Phys. Rev. E*, vol. 94, p. 022211, Aug 2016.

68. T. Bland, N. G. Parker, N. P. Proukakis, and B. A. Malomed, “Probing quasi-integrability of the Gross-Pitaevskii equation in a harmonic-oscillator potential,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 51, p. 205303, Sep 2018.

69. S. Levy, E. Lahoud, I. Shomroni, and J. Steinhauer, “The A.C. and D.C. Josephson effect in a Bose-Einstein condensate,” *Nature*, vol. 449, pp. 579 - 83, 11 2007.

70. M. Albiez, R. Gati, J. F*ö*lling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. K. Oberthaler, “Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 010402, Jun 2005.

71. W. Bao, and Q. Du, “Computing the ground state solution of Bose-Einstein condensates by a normalized gradient flow,” *SIAM J. Sci.Comput.*, vol. 25, pp. 1674 - 1697, 2004.

72. R. Driben, Y. Kartashov, B. Malomed, and L. Torner, “Three-dimensional hybrid vortex solitons,” *New J. Phys.*, vol. 16, p. 063035, 2014.

73. T. Bland, Q. Marolleau, P. Comaron, B. A. Malomed, and N. P. Proukakis, “Persistent current formation in double-ring geometries,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 53, p. 115301, May 2020.

74. K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb, W. D. Phillips, and G. K. Campbell, “Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 025302, Jan 2013.

75. Yakimenko, Y. M. Bidasyuk, M. Weyrauch, Y. I. Kuriatnikov, and S. I. Vilchinskii, “Vortices in a toroidal Bose-Einstein condensate with a rotating weak link,” *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 033607, Mar 2015.

76. A. I. Yakimenko, Y. M. Bidasyuk, M. Weyrauch, Y. I. Kuriatnikov, and S. I. Vilchinskii, “Analogues of Josephson junctions and black hole event horizons in atomic Bose-Einstein condensates,” *Low Temperature Physics/Fizika Nizkikh Temperatur*, vol. 44, p. 1316, 2018.

77. A. I. Yakimenko, Yu. M. Bidasyuk, O.O. Prikhodko, S.I. Vilchinskii, E.A. Ostrovskaya, and Yu. S. Kivshar, “Optical tweezers for vortex rings in Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 043637, 2013.

78. S. J. Rooney, A. S. Bradley, and P. B. Blakie, “Decay of a quantum vortex: Test of nonequilibrium theories for warm Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 023630, Feb 2010.
79. S. Moulder, S. Beattie, R. P. Smith, N. Tammuz, and Z. Hadzibabic, “Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate,” *PRA*, vol. 86, p. 013629, Jul 2012.
80. A. J. Allen, E. Zaremba, C. F. Barenghi, and N. P. Proukakis, “Observable vortex properties in finite-temperature Bose gases,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 013630, Jan 2013.
81. Y. M. Bidasyuk, A. V. Chumachenko, O. O. Prikhodko, S. I. Vilchinskii, M. Weyrauch, and A. I. Yakimenko, “Stable hopf solitons in rotating Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, p. 053603, Nov 2015.
82. S. Choi, S. A. Morgan, and K. Burnett, “Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 57, p. 4057, 1998.
83. N. P. Proukakis and B. Jackson, “Finite-temperature models of Bose-Einstein condensation,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 41, p. 203002, 2008.
84. R. Carretero-Gonz´alez, N. Whitaker, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, “Vortex structures formed by the interference of sliced condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 023605, 2008.
85. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, “Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 67, p. 033610, 2003.
86. F. Jendrzejewski, S. Eckel, N. Murray, C. Lanier, M. Edwards, C. J. Lobb, and G. K. Campbell, “Resistive flow in a weakly interacting Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 045305, 2014.
87. S. Beattie, S. Moulder, R. J. Fletcher, and Z. Hadzibabic, “Persistent currents in spinor condensates,” *Phys.Rev. Lett.*, vol. 110, p. 025301, 2013.
88. T. Kanai, W. Guo, and M. Tsubota, “Flows with fractional quantum circulation in Bose-Einstein condensates induced by nontopological phase defects,” *PRA*, vol. 97, p. 013612, Jan 2018.

89. T. Kanai, W. Guo, and M. Tsubota, “Merging of Rotating Bose-Einstein Condensates,” *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 195, pp. 37 - 50, Apr 2019.
90. A. Ohta, R. Kashiwa, and H. Sakaguchi, “Vortex lattices generated by the Kelvin-Helmholtz instability in the Gross-Pitaevskii equation,” *PRA*, vol. 82, p. 055602, Nov 2010.
91. K. Kasamatsu, M. Tsubota, “Vortex sheet in rotating two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 79, p. 023606, 2009.
92. S. Das Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, “Topologically protected qubits from a possible non-abelian fractional quantum hall state,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 166802, 2005.
93. A. Yakimenko, S. Vilchinskii, Y. Bidasyuk, Y. Kuriatnikov, K. Isaieva, M. Weyrauch, “Generation and decay of persistent current in a toroidal Bose- Einstein condensate,” *Rom. Rep. Phys.*, vol. 67, pp. 249 - 272, 2015.
94. B. Josephson, “Possible new effects in superconductive tunnelling,” *Phys. Lett.*, vol. 1, pp. 251 - 253, 1962.
95. A. Barone and G. Paterno, “Physics and Applications of the Josephson Effect,” *Journal of Vacuum Science and Technology*, vol. 21, p. 1050, 1982.
96. M. Pigneur, T. Berrada, M. Bonneau, T. Schumm, E. Demler, and J. Schmiedmayer, “Relaxation to a phase-locked equilibrium state in a one-dimensional bosonic josephson junction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 173601, Apr 2018.
97. B. Zenker, H. Fehske, and H. Beck, “Excitonic Josephson effect in doublelayer graphene junctions,” *Phys. Rev. B*, vol. 92, p. 081111, Aug 2015.
98. S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, C. J. Lobb, G. K. Campbell, and W. T. Hill, “Contact resistance and phase slips in mesoscopic superfluidatom transport,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 063619, Jun 2016.
99. G. Gauthier, S. S. Szigeti, M. T. Reeves, M. Baker, T. A. Bell, H. Rubinsztein-Dunlop, M. J. Davis, and T. W. Neely, “Quantitative acoustic models for superfluid circuits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, p. 260402, Dec 2019.

100. C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier, "Experimental realization of Josephson junctions for an atom SQUID," *Phys. Rev.Lett.*, vol. 111, p. 205301, Nov 2013.
101. G. Gauthier, S. Szigeti, M. Reeves, M. Baker, T. Bell, H. Rubinsztein-Dunlop, M. Davis, and T. Neely, "An atomtronic oscillator circuit for quantum gases," 03 2019.
102. A. Li, S. Eckel, B. Eller, K. E. Warren, C. W. Clark, and M. Edwards, "Superfluid transport dynamics in a capacitive atomtronic circuit," *Phys.Rev. A*, vol. 94, p. 023626, Aug 2016.
103. O. G. Chelpanova, Y. I. Kuriatnikov, S. Vilchinskii, and A. I. Yakimenko, "Spatiotemporal vortex rings in atomic Bose-Einstein condensates," *Low Temperature Physics*, vol. 45, p. 908, 2019.
104. W. Wang, R. N. Bisset, C. Ticknor, R. Carretero-Gonz*á*lez, D. J. Frantzeskakis, L. A. Collins, and P. G. Kevrekidis, "Single and multiple vortex rings in three-dimensional Bose-Einstein condensates: Existence, stability, and dynamics," *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 043638, Apr 2017.
105. Y.-K. Liu and S.-J. Yang, "Composite vortex rings in ferromagnetic spin-1 Bose-Einstein condensates," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 132, p. 109546, 2020.
106. A. Desyatnikov, D. Buccoliero, M. Dennis, and Y. Kivshar, "Spontaneous knotting of self-trapped waves," *Scientific reports*, vol. 2, p. 771, 10 2012.
107. N. Jhajj, I. Larkin, E. W. Rosenthal, S. Zahedpour, J. K. Wahlstrand, and H. M. Milchberg, "Spatiotemporal optical vortices," *Phys. Rev. X*, vol. 6, p. 031037, Sep 2016.
108. A. Desyatnikov, L. Torner, and Y. Kivshar, "Optical vortices and vortex solitons," *Prog. Opt.*, vol. 47, 02 2005.
109. A. Yakimenko, Y. Zaliznyak, and Y. Kivshar, "Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media," *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 71, p. 065603, 07 2005.

110. D. Briedis, D. Petersen, D. Edmundson, W. Krolikowski, and O. Bang, “Ring vortex solitons in nonlocal nonlinear media,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 435 - 443, Jan 2005.
111. D. Buccoliero, A. S. Desyatnikov, W. Krolikowski, and Y. S. Kivshar, “Laguerre and Hermite soliton clusters in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 053901, Feb 2007.
112. L. Song, Z. Yang, S. Zhang, and X. Li, “Dynamics of rotating Laguerre-Gaussian soliton arrays,” *Opt. Express*, vol. 27, pp. 26331 - 26345, Sep 2019.
113. Z.K. Yankauskas. Radial field distributions in a selffocusing light beam. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.*, 9:412, 1966.
114. A.A. Kolokolov and A.I. Sykov. Instability in the higher modes of a nonlinear equation. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 4:519, 1975.
115. J. M. Soto-Crespo, D. R. Heatley, E. M. Wright, and N. N. Akhmediev, “Stability of the higher-bound states in a saturable self-focusing medium,” *Phys. Rev. A*, vol. 44, pp. 636 - 644, Jul 1991.
116. A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, and O. O. Prikhodko, “Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. E*, vol. 73, p. 066605, Jun 2006.
117. C. Sulem and P. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 1999.
118. N. Veretenov, S. Fedorov, and N. Rosanov, “Topological vortex and knotted dissipative optical 3D solitons generated by 2D vortex solitons,” *Physical Review Letters*, vol. 119, 12 2017.
119. G. Burlak and B. Malomed, “Stability boundary and collisions of twodimensional solitons in PT-symmetric couplers with the cubic-quintic nonlinearity,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 88, p. 062904, 12 2013.
120. L. Berg*é*, “Wave collapse in physics: Principles and applications to light and plasma waves,” *Physics Reports*, vol. 303, pp. 259 - 370, 09 1998.

121. A. G. Litvak, “Self-focusing of Powerful Light Beams by Thermal Effects,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 4, p. 230, Nov. 1966.
122. F. W. Dabby and J. R. Whinnery, “Thermal self-focusing of laser beams in lead glasses,” *Applied Physics Letters*, vol. 13, no. 8, pp. 284 - 286, 1968.
123. A. G. Litvak, V. A. Mironov, G. M. Fraiman, and A. D. Yunakovskii, “Thermal self-effect of wave beams in a plasma with a nonlocal nonlinearity,” *Sov. J. Plasma Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 1:1, 1 1975.
124. C. Conti, M. Peccianti, and G. Assanto, “Route to nonlocality and observation of accessible solitons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 073901, Aug 2003.
125. L. Santos, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, “Roton-maxon spectrum and stability of trapped dipolar Bose-Einstein condensates,” *Phys.Rev. Lett.*, vol. 90, p. 250403, Jun 2003.
126. I. Tikhonenkov, B. A. Malomed, and A. Vardi, “Anisotropic solitons in dipolar Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 090406, Mar 2008.
127. I. Tikhonenkov, B. A. Malomed, and A. Vardi, “Vortex solitons in dipolar Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 043614, Oct 2008.
128. J. Qin, G. Dong, and B. A. Malomed, “Stable giant vortex annuli in microwave-coupled atomic condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 053611, Nov 2016.
129. S. K. Turitsyn, “Spatial dispersion of nonlinearity and stability of multidimensional solitons,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 64, pp. 226 - 232, 1985.
130. W. Kr*ó*likowski, O. Bang, N. I. Nikolov, D. Neshev, J. Wyller, J. J. Rasmussen, and D. Edmundson, “Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media,” *Journal of Optics B:Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 6, pp. S288-S294, May 2004.
131. V. I. Petviashvili and V. V. Yankov, “Solitons and turbulence,” *Reviews of Plasma Physics*, 1989.

ДОДАТКИ

За матеріалами дисертації опубліковано 6 наукових робіт, що відображають основний зміст дисертаційної роботи: 1 теза у матеріалі міжнародної конференції та 5 статей у фахових періодичних наукових виданнях. З них 5 статей у виданнях, проіндексованих у Scopus та/або Web of Science Core Collection. Дві статті були опубліковані в журналах першого квартилю (Q1), одна стаття в журналі другого квартилю (Q2) та 2 статті в журналах третього квартилю (Q3) відповідно до класифікації SC Imago Journal and Country Rank.

1. A. Yakimenko, O. Matsyshyn, A. Oliinyk, V. Biloshytskyi, O. Chelpanova, and S. Vilchynskii, “Analogues of Josephson junctions and black hole event horizons in atomic Bose-Einstein condensates,” *Low Temperature Physics*, vol. 44, p. 1032, 2018.
2. V. Biloshytskyi, A. Oliinyk, P. Kruglenko, A. Desyatnikov, and A. Yakimenko, “Vortex nucleation in nonlocal nonlinear media,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 043835, 2019.
3. A. Oliinyk, A. Yakimenko, and B. Malomed, “Tunneling of persistent currents in coupled ring-shaped Bose–Einstein condensates,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 52, p. 225301, 2019.
4. A. Oliinyk, I. Yatsuta, and A. Yakimenko, “Symmetry breaking in interacting ring-shaped superflows of Bose–Einstein condensates,” *Symmetry*, vol. 11, p. 1312, 2019.
5. A. Oliinyk, B. Malomed, and A. Yakimenko, “Nonlinear dynamics of Josephson vortices in merging superfluid rings,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 83, p. 105113, 2020.
6. A. Oliinyk, I. Yatsuta, B. Malomed, and A. Yakimenko “Symmetry breaking in weak- and strong- coupled ring-shaped superflows of Bose-Einstein condensates,” in *X Young Scientists Conference, Problems of Theoretical Physics,*

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24, 2019.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових семінарах кафедри квантової теорії поля Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (м. Київ, Україна), на науковій школі від університету Осло в Трускавці (School «The basic ideas and concepts behind the modern High-Energy Physics and Cosmology» (5-16.10.2018), Truskavets, Ukraine) і також були представлені на наукових конференціях та школах]:

1. Workshop on Atomtronics, Centro de Ciencias de Benasque Pedro Pascual, Spain, 2019, May 05 – May 18

2. Workshop on Fundamentals on Quantum Transport, ICTP, Trieste, Italy, 7-11 August, 2017

3. X Young Scientists Conference: Problems of Theoretical Physics, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, Ukraine, December 23-24, 2019

4. College on Energy Transport and Energy Conversion in the Quantume Regime, ICTP, Trieste, Italy, 12-30 August, 2019