

АНОТАЦІЯ

Хома Мар'яна Володимирівна. Задачі для нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – “Математика” (Галузь знань – 11 “Математика та статистика”). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. Розглядаються системи рівнянь, що описують динаміку векторних полів у багатовимірних просторах за наявності умов нестисливості. У даних системах рівнянь присутній нелінійний диференціальний чи інтегро-диференціальний оператор \mathcal{U} . Зокрема, цей оператор \mathcal{U} містить нелінійні доданки степеневого характеру, які мають вигляд $|u|^{q-2}$, де величину $q > 1$ називають показником нелінійності систем, які вивчаються. Дана величина може бути сталою, або залежною від просторової x , чи від просторової і часової змінної (x, t) функцією. В першому випадку такі системи є системами зі *сталим показником нелінійності*, а в другому – зі *змінним показником нелінійності*.

Метою дисертаційної роботи є дослідження систем рівнянь з частинними похідними, які моделюють деякі процеси гідродинаміки і у які містять невідому вектор-функцію, що відповідає за швидкість рідини, а також невідому скалярну функцію, яка відповідає за тиск. Розглянуті системи також включають нелінійний диференціальний та інтегро-диференціальний оператор, який описує внутрішні властивості середовища, математична модель якого розглядається. Також окрім детермінованих моделей, досліджуються стохастичні еволюційні системи, тобто системи рівнянь з частинними похідними, невідомі функції у яких залежать від випадкового параметра, а самі системи містять члени, які враховують вплив на модель випадкового збурення. Такі узагальнення дають змогу описати більш реалістичні процеси, що створюють основу для подальшого аналізу їх розв'язків.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є класи нелінійних еволюційних систем рівнянь з частинними похідними типу систем Стокса зі змінними показниками нелінійності.

Предметом дослідження дисертації є питання однозначної розв'язності і дослідження деяких властивостей розв'язків мішаних задач для

- інтегро-диференціальних параболічних систем рівнянь Стокса зі сталими показниками нелінійності;
- диференціальних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних та які містять випадкове збурення типу білого шуму;
- інтегро-диференціальних систем рівнянь Осколкова-Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних;
- інтегро-диференціальних детермінованих систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних;
- диференціальних стохастичних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності та випадковими збуреннями.

У роботі доведено теореми існування і єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для розглянутих систем. При цьому використано методи теорії рівнянь з частинними похідними та функціонального аналізу. Зокрема, у дисертації використано методи Фаєдо-Гальоркіна, метод монотонності, метод компактності.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та додатку. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження. Також наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано інформацію, де апробовано та опубліковано основні результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації. Підрозділ 1.1 містить допоміжні позначення, які використовуються при формулюванні і доведенні основних результатів дисертаційної роботи. У підрозділі 1.2 розглянуто літературу про розв'язність задач для рівнянь з частинними похідними в звичайних та узагальнених просторах Лебега і Соболева. У підрозділі 1.3 містить опис фізичних процесів, при моделюванні яких виникають системи рівнянь з частинними похідними, які досліджено в дисертаційній роботі. Розглянуто загальні рівняння руху рідин, а саме рівняння нерозривності середовища, загальне рівняння руху суцільного середовища та рівняння теплопереносу. У цьому підрозділі також висвітлено окремі випадки загальної

системи рівнянь гідродинаміки, які після відповідних перетворень приводять до рівнянь Нав'є–Стокса. У підрозділі 1.4 наведено результати щодо розв'язності задач для параболічних систем Стокса та Нав'є–Стокса.

Розділ 2 присвячено задачам для нелінійних параболічних систем Стокса. Показники нелінійності розглянутих у підрозділах 2.1 рівнянь є сталими, а у підрозділі 2.3 – змінними.

У підрозділі 2.1 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаної задачі для параболічних систем рівнянь Стокса зі сталим показником нелінійності. Отримано оцінку цих розв'язків. Ми збудуємо класичні системи Стокса монотонним нелінійним доданком та лінійним інтегральним доданком. Мішану задачу для систем такого вигляду раніше не вивчали.

У підрозділі 2.2 розглянуто основи стохастичного інтегрування та диференціювання, які використано у наступних підрозділах. Цей підрозділ має допоміжний характер.

У підрозділі 2.3 розглянуто системи Стокса зі змінними показниками нелінійності та випадковим збуренням типу білого шуму. Показано існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаних задач для розглянутих систем. Стохастичні диференціальні рівняння з залежним від змінних (x, t) показником нелінійності та білим шумом розглянуто вперше.

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджено системи Осколкова–Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від всіх незалежних змінних.

У підрозділі 3.1 розглянуто мішану задачу для системи рівнянь зі змінним показником нелінійності та малим параметром. Використавши метод Фаєдо–Гальоркіна доведено існування узагальнених розв'язків цієї задачі, а для доведення єдиності використано метод від супротивного. Також на предмет існування розв'язку досліджено задачу, яку отримуємо при прямуванні малого параметра до нуля. Мішана задача для систем Стокса зі змінними показниками нелінійності та малим параметром раніше не розглядалась.

Четвертий розділ дисертації присвячено задачам для еволюційних систем типу Бусінеска–Стокса.

У підрозділі 4.1 розглянуто детерміновану систему Бусінеска–Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від просторової і часової

змінної. Використавши метод Фаедо-Гальоркіна доведено існування узагальнених розв'язків мішаних задач для цих систем. Показано також їхню єдиність. Задачі для інтегро-диференціальних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від (x, t) раніше не вивчалися.

У підрозділі 4.2 переносимо результати підрозділу 4.1 на стохастичну систему Бусінеска-Стокса. Перше рівняння системи збудуємо доданком типу білого шуму. Також доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку для такої задачі. Задачі для таких систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від (x, t) , випадковим параметром і доданком типу білого шуму раніше не вивчалися.

Робота завершується висновками, в яких підсумуються основні результати дослідження та списком використаних джерел.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними. Їх можна застосувати при розв'язуванні задач фінансової математики, теорії біологічних популяцій, оптимального керування тощо.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, нелінійне параболічне рівняння, еволюційне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, стохастичне диференціальне рівняння, випадковий процес, вінерівський процес, білий шум, змінні показники нелінійності, узагальнені простори Лебега і Соболева.

ABSTRACT

Khoma Mariana Volodymyrivna. Problems for nonlinear evolutionary Stokes systems with variable nonlinearity exponents. - Qualifying scientific work on the right of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in the speciality 111 - "Mathematics" (field of studies - 11 "Mathematics and Statistic") – Ivan Franko National University of Lviv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of nonlinear evolutionary Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents. The systems under consideration describe the dynamics of vector fields in multidimensional domains under the incompressibility condition. The dissertation is devoted to the study of nonlinear evolutionary Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents. The systems of equations under consideration describe the dynamics of vector fields in multidimensional domains under incompressibility conditions.

These systems involve a nonlinear differential or integro-differential operator \mathcal{Y} . In particular, the operator \mathcal{Y} contains nonlinear power-type terms of the form $|u|^{q-2}$, where the quantity $q > 1$ is called the nonlinearity exponent of the systems under study.

This exponent may be either constant or depend on the spatial variable x , or on both the spatial and temporal variables (x, t) . In the first case, such systems are referred to as *systems with a constant nonlinearity exponent*, whereas in the second case, they are *systems with a variable nonlinearity exponent*.

The purpose of the dissertation work is to investigate systems involving an unknown vector-valued velocity function as well as an auxiliary scalar pressure function. The considered systems also include nonlinear differential and integro-differential operators describing the internal properties of the medium. In addition to deterministic models, stochastic evolutionary systems incorporating random perturbations are studied. Such generalizations make it possible to describe more realistic processes and provide a basis for further analysis of solutions, in particular, their existence and uniqueness.

The object of the study is classes of nonlinear evolutionary Stokes systems with variable nonlinearity exponents. Existence and uniqueness theorems for solutions to these systems are established.

The subject of the study concerns solvability issues and qualitative properties of generalized solutions to problems for:

- parabolic Stokes systems with constant nonlinearity exponent;
- Stokes systems with variable nonlinearity exponents and random perturbations;
- Oskolkov–Stokes systems with a small parameter;
- deterministic Boussinesq–Stokes systems;
- stochastic Boussinesq–Stokes systems.

The methods of partial differential equations and functional analysis are employed in the dissertation. In particular, the Galerkin method, the contraction mapping principle, and methods of monotonicity and compactness theory are used.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters, conclusions, a list of references, and an appendix. The introduction substantiates the relevance of the research topic and formulates the aim, objectives, subject, object, and research methods. It also presents the scientific novelty, practical significance of the obtained results, the relation of the work to scientific research topics, the personal contribution of the author, and information on the approbation and publication of the main results of the dissertation.

Chapter 1 contains a literature review related to the topic of the dissertation. Section 1.1 presents auxiliary notation used in the formulation and proofs of the main results. Section 1.2 discusses solvability results for partial differential equations in classical and generalized Lebesgue and Sobolev spaces. Section 1.3 describes the physical background of the studied systems, including the continuity equation, the general momentum equation for a continuum, and the heat transfer equation. Particular cases of the general hydrodynamic system leading to the Navier–Stokes equations are also considered. Section 1.4 presents known solvability results for parabolic Stokes and Navier–Stokes systems.

Chapter 2 is devoted to nonlinear parabolic Stokes systems. The nonlinearity exponents of the equations considered in Subsection 2.1 are constant, whereas in Subsection 2.3 they are variable.

In Section 2.1, the existence and uniqueness of weak solutions to mixed boundary value problems for parabolic Stokes systems with constant nonlinearity exponent are proved. An a priori estimate for the corresponding weak solutions is established. The classical Stokes system is perturbed by the addition of a monotone nonlinear term and a linear integral term. Boundary–initial value problems for systems of this type have not been previously investigated. Section 2.2 introduces

the fundamentals of stochastic integration and differentiation required for further analysis. Section 2.3 investigates Stokes systems with variable nonlinearity exponents and random perturbations of white-noise type. The existence and uniqueness of weak solutions to the corresponding mixed boundary–initial value problems are established. Stochastic differential equations with a nonlinearity exponent depending on the variables (x, t) and driven by white noise are considered for the first time.

Chapter 3 investigates Oskolkov–Stokes systems with variable nonlinearity exponents depending on all independent variables.

In Section 3.1 a mixed boundary–initial value problem for a system with a variable nonlinearity exponent and a small parameter is considered. The existence of weak solutions to this problem is proved by means of the Faedo–Galerkin method, while uniqueness is established by a contradiction argument. The limiting problem arising as the small parameter tends to zero is also investigated with respect to the existence of solutions. To the best of our knowledge, mixed problems for Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents and a small parameter have not been previously studied. proves existence and uniqueness of weak solutions to mixed boundary value problems with a small parameter and analyzes the limiting problem as the parameter tends to zero.

Chapter 4 is devoted to problems for evolutionary systems of the Boussinesq–Stokes type.

In Subsection 4.1, a deterministic Boussinesq–Stokes system with variable nonlinearity exponents depending on the spatial and temporal variables is studied. Using the Faedo–Galerkin method, the existence of weak solutions to the corresponding mixed problems is proved, and uniqueness is established. Integro-differential Boussinesq–Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents depending on (x, t) have not been previously investigated.

In Subsection 4.2, the results of section 4.1 are extended to a stochastic Boussinesq–Stokes system. The first equation of the system is perturbed by a white-noise-type term. The existence and uniqueness of weak solutions to the corresponding problem are also proved. Problems for such Boussinesq–Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents depending on (x, t) , a random parameter, and a white-noise-type perturbation have not been previously studied.

The dissertation concludes with a summary of the main results obtained.

Practical significance of the thesis results. The results of the dissertation are of theoretical importance and may be used in the further development of

the theory of partial differential equations. They can be applied to problems in financial mathematics, population biology, optimal control theory, and related fields.

Key words: partial differential equations, nonlinear parabolic equation, evolutionary equation, integro-differential equation, stochastic differential equation, random process, Wiener process, white noise, variable nonlinearity exponents, generalized Lebesgue and Sobolev spaces.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

- 1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2018; 85: 107-119. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.107-119>
- 2) *Khoma M. V., Buhrii O. M.* Stokes system with variable exponents of nonlinearity. Буковинський математичний журнал. 2022; 10 (2): 28-42. <https://doi.org/https://doi.org/10.31861/bmj2022.02.03>
- 3) *Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity and small parameter. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 37-60. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.037-060>

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

- 1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція “Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності” (присвячена пам’яті професорів Панкова О.А. і Трохименка В.С.) (Вінниця, 20-21 травня, 2021): Тези доповідей. – Вінниця, 2021. – С. 42-44.
- 2) *Buhrii O., Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity. International Conference “Mathematics and IT: Research and Education (MITRE-2021)”, dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University (Chisinau, Republic of Moldova, July 01-03, 2021): Book of Abstracts. – Chisinau, 2021. – P. 46-47.
- 3) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності. Міжнародна наукова конф. (присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка) (Чернівці, 28-30 жовтня, 2021): Матеріали конф. – Чернівці, 2021. – С. 55.
- 4) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболева. Міжнародна наукова конф.

“Прикладна математика та інформаційні технології” (присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій) (Чернівці, 22-24 вересня, 2022): Матеріали конф. – Чернівці, 2022. – С. 107-110.

- 5) *Buhrii O., Khoma M.* Stokes system with depending of time variable exponents of nonlinearity. IV International Scientific and Practical Internet Conf. “Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity” (dedicated to the 90th anniversary of the Department of Mathematics and Informatics) (Vinnytsia, May 25-26, 2023): Book of Abstracts. – Vinnytsia, 2023. – P. 78-81.
- 6) *Хома М., Бугрій О., Вовк І.-М.* Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 83-104. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092>
- 7) *Бугрій О. М., Хома М. В.* Системи Бусінеска-Стокса з випадковим збуренням. Всеукраїнська наукова конф. “Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025” (Львів, 8-9 травня, 2025): Тези доповідей. – Львів, 2025. – С. 63.