Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**Хома Мар'яна Володимирівна**

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

# Задачі для нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності

Спеціальність – 111 "Математика"
Галузь знань – 11 "Математика та статистика"

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
________ М. В. Хома

Науковий керівник:
**Бугрій Олег Миколайович**
доктор фізико-математичних наук,
професор

Львів – 2026

# АНОТАЦІЯ

*Хома Мар'яна Володимирівна.* Задачі для нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – "Математика" (Галузь знань – 11 "Математика та статистика"). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. Розглядаються системи рівнянь, що описують динаміку векторних полів у багатовимірних просторах за наявності умов нестисливості. У даних системах рівнянь присутній нелінійний диференціальний чи інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{Y}$. Зокрема, цей оператор $\mathcal{Y}$ містить нелінійні доданки степеневого характеру, які мають вигляд $|u|^{q-2}$, де величину $q > 1$ називають показником нелінійності систем, які вивчаються. Дана величина може бути сталою, або залежною від просторової $x$, чи від просторової і часової змінної $(x, t)$ функцією. В першому випадку такі системи є системами зі *сталим показником нелінійності*, а в другому – *зі змінним показником нелінійності.*

*Метою дисертаційної роботи є* дослідження систем рівнянь з частинними похідними, які моделюють деякі процеси гідродинаміки і у які містять невідому вектор-функцію, що відповідає за швидкість рідини, а також невідому скалярну функцію, яка відповідає за тиск. Розглянуті системи також включають нелінійний диференціальний та інтегро-диференціальний оператор, який описує внутрішні властивості середовища, математична модель якого розглядається. Також окрім детермінованих моделей, досліджуються стохастичні еволюційні системи, тобто системи рівнянь з частинними похідними, невідомі функції у яких залежать від випадкового параметра, а самі системи містять члени, які враховують вплив на модель випадкового збурення. Такі узагальнення дають змогу описати більш реалістичні процеси, що створюють основу для подальшого аналізу їх розв'язків.

*Об'єктом дослідження* дисертаційної роботи є класи нелінійних еволюційних систем рівнянь з частинними похідними типу систем Стокса зі змінними показниками нелінійності.

*Предметом дослідження* дисертації є питання однозначної розв'язності і дослідження деяких властивостей розв'язків мішаних задач для

– інтегро-диференціальних параболічних систем рівнянь Стокса зі сталими показниками нелінійності;
– диференціальних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних та які містять випадкове збурення типу білого шуму;
– інтегро-диференціальних систем рівнянь Осколкова-Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних;
– інтегро-диференціальних детермінованих систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від часової та просторових змінних;
– диференціальних стохастичних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності та випадковими збуреннями.

У роботі доведено теореми існування і єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для розглянутих систем. При цьому використано методи теорії рівнянь з частинними похідними та функціонального аналізу. Зокрема, у дисертації використано методи Фаедо-Гальоркіна, метод монотонності, метод компактності.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та додатку. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження. Також наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано інформацію, де апробовано та опубліковано основні результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації. Підрозділ 1.1 містить допоміжні позначення, які використовуються при формулюванні і доведенні основних результатів дисертаційної роботи. У підрозділі 1.2 розглянуто літературу про розв'язність задач для рівнянь з частинними похідними в звичайних та узагальнених просторах Лебега і Соболєва. У підрозділі 1.3 містить опис фізичних процесів, при моделюванні яких виникають системи рівнянь з частинними похідними, які досліджено в дисертаційні роботі. Розглянуто загальні рівняння руху рідин, а саме рівняння нерозривності середовища, загальне рівняння руху суцільного середовища та рівняння теплопереносу. У цьому підрозділі також висвітлено окремі випадки загальної системи рівнянь гідродинаміки, які після відповідних перетворень приводять до рівнянь Нав'є–Стокса. У підрозділі 1.4 наведено результати щодо розв'язності задач для параболічних систем Стокса та Нав'є-Стокса.

Розділ 2 присвячено задачам для нелінійних параболічних систем Стокса. Показники нелінійності розглянутих у підрозділах 2.1 рівнянь є сталими, а у підрозділі 2.3 – змінними.

У підрозділі 2.1 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаної задачі для параболічних систем рівнянь Стокса зі сталим показником нелінійності. Отримано оцінку цих розв'язків. Ми збурюємо класичні системи Стокса монотонним нелінійним доданком та лінійним інтегральним доданком. Мішану задачу для систем такого вигляду раніше не вивчали.

У підрозділі 2.2 розглянуто основи стохастичного інтегрування та диференціювання, які використано у наступних підрозділах. Цей підрозділ має допоміжний характер.

У підрозділі 2.3 розглянуто системи Стокса зі змінними показниками нелінійності та випадковим збуренням типу білого шуму. Показано існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаних задач для розглянутих систем. Стохастичні диференціальні рівняння з залежним від змінних $(x, t)$ показником нелінійності та білим шумом розглянуто вперше.

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджено системи Осколкова-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від всіх незалежних змінних.

У підрозділі 3.1 розглянуто мішану задачу для системи рівнянь зі змінним показником нелінійності та малим параметром. Використавши метод Фаедо-Гальоркіна доведено існування узагальнених розв'язків цієї задачі, а для доведення єдиності використано метод від супротивного. Також на предмет існування розв'язку досліджено задачу, яку отримуємо при прямуванні малого параметра до нуля. Мішана задача для систем Стокса зі змінними показниками нелінійності та малим параметром раніше не розглядалась.

Четвертий розділ дисертації присвячено задачам для еволюційних систем типу Бусінеска-Стокса.

У підрозділі 4.1 розглянуто детерміновану систему Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать від просторової і часової змінної. Використавши метод Фаедо-Гальоркіна доведено існування узагальнених розв'язків мішаних задач для цих систем. Показано також їхню єдиність. Задачі для інтегро-диференціальних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від $(x, t)$ раніше не вивчалися.

У підрозділі 4.2 переносимо результати підрозділу 4.1 на стохастичну систему Бусінеска-Стокса. Перше рівняння системи збурюємо доданком типу білого шуму. Також доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку для такої задачі. Задачі для таких систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від $(x, t)$, випадковим параметром і доданком типу білого шуму раніше не вивчалися.

Робота завершується висновками, в яких підсумоються основні результати дослідження та списком використаних джерел.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними. Їх можна застосувати при розв'язуванні задач фінансової математики, теорії біологічних популяцій, оптимального керування тощо.

**Ключові слова:** рівняння з частинними похідними, нелінійне параболічне рівняння, еволюційне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, стохастичне диференціальне рівняння, випадковий процес, вінерівський процес, білий шум, змінні показники нелінійності, узагальнені простори Лебега і Соболєва.

# ABSTRACT

*Khoma Mariana Volodymyrivna.* Problems for nonlinear evolutionary Stokes systems with variable nonlinearity exponents. - Qualifying scietific work on the right of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in the speciality 111 - "Mathematics" (field of studies - 11 "Mathematics and Statistic") – Ivan Franko National University of Lviv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of nonlinear evolutionary Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents. The systems under consideration describe the dynamics of vector fields in multidimensional domains under the incompressibility condition. The dissertation is devoted to the study of nonlinear evolutionary Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents. The systems of equations under consideration describe the dynamics of vector fields in multidimensional domains under incompressibility conditions.

These systems involve a nonlinear differential or integro-differential operator $\mathcal{Y}$. In particular, the operator $\mathcal{Y}$ contains nonlinear power-type terms of the form $|u|^{q-2}$, where the quantity $q>1$ is called the nonlinearity exponent of the systems under study.

This exponent may be either constant or depend on the spatial variable $x$, or on both the spatial and temporal variables $(x,t)$. In the first case, such systems are referred to as *systems with a constant nonlinearity exponent*, whereas in the second case, they are *systems with a variable nonlinearity exponent.*

*The purpose of the dissertation work* is to investigate systems involving an unknown vector-valued velocity function as well as an auxiliary scalar pressure function. The considered systems also include nonlinear differential and integro-differential operators describing the internal properties of the medium. In addition to deterministic models, stochastic evolutionary systems incorporating random perturbations are studied. Such generalizations make it possible to describe more realistic processes and provide a basis for further analysis of solutions, in particular, their existence and uniqueness.

*The object of the study* is classes of nonlinear evolutionary Stokes systems with variable nonlinearity exponents. Existence and uniqueness theorems for solutions to these systems are established.

*The subject of the study* concerns solvability issues and qualitative properties of of generalized solutions to problems for:

– parabolic Stokes systems with constant nonlinearity exponent;
– Stokes systems with variable nonlinearity exponents and random perturbations;
– Oskolkov–Stokes systems with a small parameter;
– deterministic Boussinesq–Stokes systems;
– stochastic Boussinesq–Stokes systems.

The methods of partial differential equations and functional analysis are employed in the dissertation. In particular, the Galerkin method, the contraction mapping principle, and methods of monotonicity and compactness theory are used.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters, conclusions, a list of references, and an appendix. The introduction substantiates the relevance of the research topic and formulates the aim, objectives, subject, object, and research methods. It also presents the scientific novelty, practical significance of the obtained results, the relation of the work to scientific research topics, the personal contribution of the author, and information on the approbation and publication of the main results of the dissertation.

Chapter 1 contains a literature review related to the topic of the dissertation. Section 1.1 presents auxiliary notation used in the formulation and proofs of the main results. Section 1.2 discusses solvability results for partial differential equations in classical and generalized Lebesgue and Sobolev spaces. Section 1.3 describes the physical background of the studied systems, including the continuity equation, the general momentum equation for a continuum, and the heat transfer equation. Particular cases of the general hydrodynamic system leading to the Navier–Stokes equations are also considered. Section 1.4 presents known solvability results for parabolic Stokes and Navier–Stokes systems.

Chapter 2 is devoted to nonlinear parabolic Stokes systems. The nonlinearity exponents of the equations considered in Subsection 2.1 are constant, whereas in Subsection 2.3 they are variable.

In Section 2.1, the existence and uniqueness of weak solutions to mixed boundary value problems for parabolic Stokes systems with constant nonlinearity exponent are proved. An a priori estimate for the corresponding weak solutions is established. The classical Stokes system is perturbed by the addition of a monotone nonlinear term and a linear integral term. Boundary–initial value problems for systems of this type have not been previously investigated. Section 2.2 introduces the fundamentals of stochastic integration and differentiation required for further analysis. Section 2.3 investigates Stokes systems with variable nonlinearity exponents and random perturbations of white-noise type. The existence and uniqueness of weak solutions to the corresponding mixed boundary–initial value problems are established. Stochastic differential equations with a nonlinearity exponent depending on the variables $(x,t)$ and driven by white noise are considered for the first time.

Chapter 3 investigates Oskolkov-Stokes systems with variable nonlinearity exponents depending on all independent variables.

In Section 3.1 a mixed boundary–initial value problem for a system with a variable nonlinearity exponent and a small parameter is considered. The existence of weak solutions to this problem is proved by means of the Faedo–Galerkin method, while uniqueness is established by a contradiction argument. The limiting problem arising as the small parameter tends to zero is also investigated with respect to the existence of solutions. To the best of our knowledge, mixed problems for Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents and a small parameter have not been previously studied. proves existence and uniqueness of weak solutions to mixed boundary value problems with a small parameter and analyzes the limiting problem as the parameter tends to zero.

Chapter 4 is devoted to problems for evolutionary systems of the Boussinesq-Stokes type.

In Subsection 4.1, a deterministic Boussinesq–Stokes system with variable nonlinearity exponents depending on the spatial and temporal variables is studied. Using the Faedo–Galerkin method, the existence of weak solutions to the corresponding mixed problems is proved, and uniqueness is established. Integro-differential Boussinesq–Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents depending on $(x,t)$ have not been previously investigated.

In Subsection 4.2, the results of section 4.1 are extended to a stochastic Boussinesq–Stokes system. The first equation of the system is perturbed by a white-noise-type term. The existence and uniqueness of weak solutions to the corresponding problem are also proved. Problems for such Boussinesq–Stokes-type systems with variable nonlinearity exponents depending on $(x,t)$, a random parameter, and a white-noise-type perturbation have not been previously studied.

The dissertation concludes with a summary of the main results obtained.

**Practical significance of the thesis results.** The results of the dissertation are of theoretical importance and may be used in the further development of the theory of partial differential equations. They can be applied to problems in financial mathematics, population biology, optimal control theory, and related fields.

**Key words:** partial differential equations, nonlinear parabolic equation, evolutionary equation, integro-differential equation, stochastic differential equation, random process, Wiener process, white noise, variable nonlinearity exponents, generalized Lebesgue and Sobolev spaces.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

## Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2018; 85: 107-119. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.107-119
2) *Khoma M.V., Buhrii O.M.* Stokes system with variable exponents of nonlinearity. Буковинський математичний журнал. 2022; 10 (2): 28-42. https://doi.org/https:/doi.org/10.31861/bmj2022.02.03
3) *Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity and small parameter. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 37-60. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.037-060

## Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція “Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності” (присвячена пам’яті професорів Панкова О.А. і Трохименка В.С.) (Вінниця, 20-21 травня, 2021): Тези доповідей. – Вінниця, 2021. – С. 42-44.
2) *Buhrii O., Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity. International Conference “Mathematics and IT: Research and Education (MITRE-2021)”, dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University (Chisinau, Republic of Moldova, July 01-03, 2021): Book of Abstracts. – Chisinau, 2021. – P. 46-47.
3) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності. Міжнародна наукова конф. (присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка) (Чернівці, 28-30 жовтня, 2021): Матеріали конф. – Чернівці, 2021. – С. 55.
4) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Міжнародна наукова конф.

"Прикладна математика та інформаційні технології" (присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій) (Чернівці, 22-24 вересня, 2022): Матеріали конф. – Чернівці, 2022. – С. 107-110.

5) *Buhrii O., Khoma M.* Stokes system with depending of time variable exponents of nonlinearity. IV International Scientific and Practical Internet Conf. "Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity" (dedicated to the 90th anniversary of the Department of Mathematics and Informatics) (Vinnytsia, May 25-26, 2023): Book of Abstracts. – Vinnytsia, 2023. – P. 78-81.

6) *Хома М., Бугрій О., Вовк І.-М.* Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 83-104. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092

7) *Бугрій О. М., Хома М. В.* Системи Бусінеска-Стокса з випадковим збуренням. Всеукраїнська наукова конф. "Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025" (Львів, 8-9 травня, 2025): Тези доповідей. – Львів, 2025. – С. 63.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності і властивостей розв'язків задач для нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. Основну увагу зосереджуємо на системах, у яких показник нелінійності може залежати від просторових і часової змінних. Прикладом такої системи є:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{Y}u + \nabla\pi = F, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ – невідома вектор-функція, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ – невідома скалярна функція, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ – дивергенція функції $u$, $\nabla\pi = (\frac{\partial \pi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \pi}{\partial x_n})$ – градієнт $\pi$, $F$ – деяка вектор-функція, $\mathcal{Y}$ – нелінійний диференціальний чи інтегро-диференціальний оператор. Тут $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – деяка обмежена область з досить гладкою межею $\partial\Omega$, $n \in \mathbb{N}$ та $T > 0$.

Оператор $\mathcal{Y}$, зокрема, містить нелінійні доданки степеневого характеру, які мають вигляд $|u|^{q-2}u$, де величину $q > 1$ називають показником нелінійності системи (0.1). Вона може бути або сталою, або залежною від $x$ чи від $(x,t)$ фунцією. В першому випадку матимемо на увазі, що система (0.1) є системою *зі сталим показником нелінійності*, а в другому – *зі змінним показником нелінійності*.

Систему (0.1) стандартно доповнюють крайовою умовою Діріхле та початковою умовою на першу невідому функцію $u$:

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

де $\Sigma_{0,T} := \partial\Omega \times (0, T)$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – деяка задана функція. Щоб однозначно ідентифікувати другу невідому функцію $\pi$, систему доповнюють інтегральною умовою

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\, dx = 0, \quad t \in (0, T). \tag{0.3}$$

Отриману задачу досліджують в узагальненому формулюванні, зокрема, шукають розв'язок у відповідних узагальнених просторах Лебега і Соболєва, які складаються з функцій, інтегровних зі степенем $q$, що також може бути функцією незалежних змінних.

Систему (0.1) та відповідну їй мішану задачу (0.1)-(0.3) для зручності називатимемо детермінованою системою чи, відповідно, детермінованою мішаною задачею. Це зумовлено тим, що поряд з ними у дисертаційній роботі досліджуються мішані задачі для систем вигляду

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{Y}u + \nabla\pi = F + b_t, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{0.4}$$

де $b_t = b_t(x, t, \omega)$ – доданок типу білого шуму, $\omega$ – випадковий параметр. Системи типу (0.4) та відповідну їм мішану задачу (0.2)-(0.4) для зручності називатимемо стохастичною (випадковою) системою чи, відповідно, стохастичною (випадковою) мішаною задачею.

Отож, у дисертаційній роботі досліджено питання однозначної розв'язності мішаних задач для диференціальних та інтегро-диференціальних детермінованих та стохастичних систем Стокса і деяких їх узагальнень, а саме, систем Осколкова-Стокса та Бусінеска-Стокса.

Лінійні рівняння з частинними похідними і нелінійні рівняння з частинними похідними зі сталими показниками нелінійності є досить добре вивченими. Ними, зокрема, займалися В.В. Городецький, В.С. Ільків, Ж.-Л. Ліонс (J.-L. Lions), О.В. Мартинюк, М.І. Матійчук, В.А. Михайлець, О.О. Мурач, І.Д. Пукальський, А.М. Самойленко, В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко, Дж. Сімон (J. Simon), М.М. Симотюк, І.В. Скрипник, І.І. Скрипник, А.Ф. Тедеєв та ін.

Еволюційні рівняння зі змінними показниками нелінійності почали досліджувати з 90-х років XX ст. Їм присвячено праці таких математиків як М.М. Бокало, Т.М. Бокало, О.М. Бугрій, Н.В. Бугрій, Г.П. Доманська, А. Кальтенбах (A. Kaltenbach) О. Ковачек (O. Kováčik), С.П. Лавренюк, Р.А. Машиєв, Н.П. Процах, П.Я. Пукач, М. Ружічка (M. *Růžička*) О.Т. Холявка, та ін.

Стохастичному численню та стохастичним диференціальним рівнянням присвячено праці таких вчених як А. Бенсусан (A. Bensoussan), О.М. Бугрій, Н.В. Бугрій, В.А. Власов, О.В. Доманська, Р. Темам (R. Temam) та ін.

Актуальність дисертаційної роботи зумовлена необхідністю розвитку аналітичних методів досліджень систем Стокса та їх узагальнень, а саме досліджень питань про існування і єдиність узагальнених розв'язків задач для цих систем, дослідження властивостей цих розв'язків. Вирішенню цих питань і присвячена дисертація.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертація виконана на кафедрі математичної статистики і диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках держбюджетної теми “Аналіз моделей детермінованої та стохастичної природи” (номер державної реєстрації: 0125U001357). Напрямок дослідження, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою роботи* є дослідження умов існування та єдиності узагальнених розв'язків задач для нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності.

*Завдання* дослідження полягають у:

1) встановити умови існування та єдиності розв'язків детермінованих мішаних задач для параболічних систем Стокса та їх узагальнень зі змінними показниками нелінійності;

2) встановити поведінку розв'язків відповідних задач з малим параметром при прямуванні цього параметра до нуля;

3) поширити отримані результати на випадок відповідних стохастичних систем Стокса та їх узагальнень, збурених доданками типу білого шуму.

*Об'єктом* дисертаційного дослідження є класи нелінійних еволюційних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності. Доведено теореми існування і єдиності розв'язків цих систем.

*Предметом дослідження* є умови існування та єдиності узагальнених розв'язків нелінійних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі використано методи теорії рівнянь з частинними похідними та методи функціонального аналізу. Зокрема, у дисертації використано методи Фаедо-Гальоркіна, метод монотонності, метод компактності.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі одержані наукові результати є новими та оригінальними дослідженнями. У дисертаційній роботі вперше:

- встановлено умови існування та єдиність узагальнених розв'язків детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Стокса зі сталими показниками нелінійності;
- доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків з узагальнених просторів Лебега і Соболєва стохастичних мішаних задач для нелінійних диференціальних параболічних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності;

- доведено існування єдиного узагальненого розв'язку детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Осколкова-Стокса зі змінними показниками нелінійності та малим параметром, досліджено поведінку цього розв'язку при прямуванні параметра до нуля;
- встановлено умови існування та єдиність узагальнених розв'язків детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності,
- доведено теорему про однозначну розв'язність стохастичних мішаних задач для нелінійних диференціальних параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, фінансовій математиці, математичній фізиці та гідродинаміці, зокрема, для моделювання неньютонівських та стохастичних рідин.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати, що виносяться на захист дисертаційної роботи, отримано автором самостійно. З праць, опублікованих у співавторстві, до дисертаційної роботи включені лише ті результати, що належать автору. Співавтору професору Бугрію Олегу Миколайовичу належить постановка задач, обговорення отриманих результатів та загальне керівництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень, що включено до дисертації, доповідалися та обговорювались на:

- Львівському міському семінарі із диференціальних рівнянь (керівники: проф. Бокало М. М., проф. Каленюк П. І.),
  а також на таких наукових конференціях:
- III Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції "Математика та інформатика у вищій школі", присвяченій пам'яті проф. Панкова О. А. і Трохименка В. С.(Вінниця, 2021);
- Mathematics and IT: Research and Education (MITRE-2021). Conference dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University (Chisinau, 2021);

– Міжнародна наукова конференція присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка (Чернівці, 2021);
– Міжнародна наукова конфренція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (Чернівці, 2022);
– IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity» dedicated to the 90th anniversary of the Department of 173 Mathematics and Informatics (Vinnytsia, 2023);
– Всеукраїнська наукова конференція “Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025” (Львів, 2025).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в 3-х наукових працях у фахових наукових виданнях, причому 3 з них у журналах, які входять до переліку наукових фахових видань України, а також додатково висвітлено у: 1-х тезах міжнародної конференції; 5-х тезах вітчизняних наукових конференцій.

**Структура і обсяг дисертації**. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку. Список використаних джерел налічує 114 найменувань і викладений на 9 сторінках. Загальний обсяг роботи 154 сторінки.

**Подяка**. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка Бугрію Олегу Миколайовичу за керівництво роботою.

# 1. РОЗДІЛ
# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

У цьому розділі зроблено огляд праць, що стосуються параболічних рівнянь в узагальнених просторах Лебега і Соболєва. Спершу введемо необхідні позначення.

## 1.1. **Допоміжні позначення.**

Через $\mathbb{N}$ позначимо множину всіх натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ – цілих, а через $\mathbb{R}$ – дійсних чисел. Присутні далі банахові простори розглядаються над полем дійсних чисел. Норму банахового простору $X$ позначатимемо $||\cdot||_X \equiv ||\cdot; X||$.

Для простору $X$, через $X^*$ позначимо його спряжений простір з нормою

$$||x^*||_{X^*} := \sup_{||x||_X \leq 1} \langle x^*, x \rangle_X, \quad x^* \in X^*, \tag{1.1}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ – скалярний добуток між просторами $X^*$ та $X$.

Для банахових просторів $X$ та $Y$ позначимо їх декартовий добуток через $X \times Y$. Це буде банахів простір, якщо в ньому ввести норму

$$||(x,y)^\top||_{X\times Y} := ||x||_X + ||y||_Y \quad \text{для} \quad (x,y)^\top := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \times Y. \tag{1.2}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $X^n := X \times \ldots \times X$ – $n$-й декартів степінь простору $X$ з відповідною нормою. Через $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ позначимо $n$-вимірний евклідів векторний простір, а через $\mathbb{R}^{m\times n}$ – векторний простір $(m \times n)$-тензорів, або $(m \times n)$-матриць, де $m, n \in \mathbb{N}$.

Перетин $X \cap Y$ простору $X$ та простору $Y$ розглядатимемо з нормою

$$||v; X \cap Y|| := ||v||_X + ||v||_Y \quad \text{для} \quad v \in X \cap Y. \tag{1.3}$$

Нагадаємо, що $(X \cap Y)^* = X^* + Y^*$.

Нехай $H$ – деякий гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$. Тоді норму в $H$ стандартно визначимо за формулою $|\cdot|_H \equiv ||\cdot; H|| := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$.

Для множини $M \subset \mathbb{R}^n$ через $\mathrm{int}(M)$ позначимо її внутрішність, через $\overline{M}$ – замикання, через $\partial M$ – її межу, а через $M^{\complement} = \mathbb{R}^n \backslash M$ – доповнення до $M$.

Користуватимемося такими позначеннями:

$$T > 0 \ \text{ та } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ – числа}, \qquad \mathcal{T} := (0,T) \ \text{ – скінченний інтервал}, \tag{1.4}$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ \text{ – область}, \quad \partial\Omega \ \text{ – межа } \ \Omega, \tag{1.5}$$

$$Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1,t_2), \quad \Sigma_{t_1,t_2} := \partial\Omega \times [t_1,t_2], \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \tag{1.6}$$

Коли спеціально не зазначено інше, вважатимемо $\Omega$ обмеженою областю з ліпшицевою межею. При потребі розглядатимемо функцію $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$, як функцію, котра моменту часу $t \in \mathcal{T}$ ставить у відповідність функцію змінної $x \in \Omega$, і писатимемо $u(t)$ замість $u(\cdot,t)$:

$$u(t) := u(\cdot,t), \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.7}$$

Аналогічні позначення вживатимемо для функцій трьох змінних тощо. Нехай

$$(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ – повний імовірнісний простір,} \tag{1.8}$$

зокрема, $\mathbb{S}$ – непорожня множина, яка трактується як простір станів чи елементарних подій, сім'я $\mathcal{F}$ – $\sigma$-алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$, відображення $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Нехай також

$$\Pi_{0,T} := \Omega \times (0,T) \times \mathbb{S}, \qquad \Theta_{0,T} := (0,T) \times \mathbb{S}. \tag{1.9}$$

Припустимо що $m, N \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $B$ – банахів простір, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ – область, тобто відкрита зв'язна множина. Користуватимемося такими стандартними позначеннями функційних просторів: $C(\mathcal{O})$, $C^m(\mathcal{O})$ та $C_0^\infty(\mathcal{O})$ – простори гладких функцій з [75, с. 17, 21], $D(\mathcal{O})$ – простір основних функцій з [102, с. 10], $L^p(\mathcal{O})$ – стандартний простір Лебега з [102, с. 11] (зі сталим показником інтегровності функцій), $W^{m,p}(\mathcal{O})$ та $W_0^{m,p}(\mathcal{O})$ – стандартні простори Соболєва з [102, с. 15, 17] (зі сталим показником інтегровності функцій та їх узагальнених похідних), $H^m(\mathcal{O}) := W^{m,2}(\mathcal{O})$, $H_0^m(\mathcal{O}) := W_0^{m,2}(\mathcal{O})$, $C(\mathcal{O};B)$ та $C^m(\mathcal{O};B)$ – простори $B$-значних гладких функцій, визначених на $\mathcal{O}$ (див. [102, с. 9]), $L^p(\mathcal{O};B)$ – простори Лебега-Бохнера $B$-значних інтегровних функцій, визначених на $\mathcal{O}$ (див. [58, с. 11]), $W^{m,p}(\mathcal{O};B)$ – відповідні простори Соболєва-Бохнера (див. [58, с. 43]).

Стрілки $\to$, $\rightharpoonup$ та $\overset{*}{\rightharpoonup}$ позначають сильну, слабку та $*$-слабку збіжність у банаховому просторі $X$ та у його спряженому просторі $X^*$ відповідно.

У цьому розділі вектори і вектор-функції будемо позначати жирними малими літерами, тобто $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, та $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, відповідно. Виняток становлять точки $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, якщо $\Omega$ є областю визначення функції. Для двох векторів $\mathbf{a} := (a_1, ..., a_n)^\top, \mathbf{b} := (b_1, ..., b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, стандартним евклідовим скалярним добутком буде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{1.10}$$

а $|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ – відповідна евклідова норма.

Тензори і тензор-функції будемо позначати жирними великими літерами, тобто $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, та $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $l \in \mathbb{N}$. Для тензора $\mathbf{A} := (A_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, через

$$\mathbf{A}^\top := (A_{ji})_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{n\times m} \tag{1.11}$$

позначимо транспонований до $\mathbf{A}$ тензор. Якщо $m = n \in \mathbb{N}$, то для двох тензорів $\mathbf{A} := (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $\mathbf{B} := (B_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ визначимо скалярний добуток Фробеніуса так:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} := \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}, \tag{1.12}$$

де $\operatorname{tr}(\mathbf{C}) := \sum\limits_{i=1}^{n} C_{ii}$ – слід тензора $\mathbf{C} := (C_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Нормою Фробеніуса* назвемо вираз $|\mathbf{A}| := \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$. Крім того, через

$$\mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} := \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}\} \tag{1.13}$$

позначимо простір симетричних тензорів.

Для скалярної функції $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ позначимо її $i$-ту частинну похідну так:

$$\partial_i f := \partial_{x_i} f := f_{x_i} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.14}$$

Для вектор-функції $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m)^\top : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, через

$$\nabla \mathbf{f} := (\partial_i f_j)_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m} \tag{1.15}$$

будемо позначати її градієнт. У випадку, коли $m = 1$, для $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla \mathbf{f} := (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})^\top$. У випадку $m = n \in \mathbb{N}$, позначимо

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{f} + \nabla \mathbf{f}^\top) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \tag{1.16}$$

симетричний градієнт і через

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) := \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{f}) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1.17}$$

позначимо дивергенцію. Для тензор-функції $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ визначимо її рядкову дивергенцію $\operatorname{div}(\mathbf{F}) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ за формулою

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})_i := \operatorname{div}(\mathbf{F}_i) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

де $\mathbf{F}_i = (\mathrm{F}_{i1}, \ldots, \mathrm{F}_{in})^\top : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – $i$-й рядок $\mathbf{F}$.

## 1.2. **Розв'язність задач для рівнянь з частинними похідними в звичайних та узагальнених просторах Лебега і Соболєва.**

Відомо, що при дослідженні узагальнених розв'язків $u$ задач для нелінійних рівнянь з частинними похідними, які містять нелінійні доданки, наприклад, вигляду $|u|^{\mathfrak{q}-2}u$, використовуються простори функцій, інтегровних з показником степеня $\mathfrak{q}$, який називають показником нелінійності відповідного рівняння. Показник $\mathfrak{q}$ може бути числом, або функцією деяких змінних. Розглянемо спершу такі простори інтегровних функцій.

1.2.1. *Узагальнені простори Лебега і Соболєва.* Нехай $N \in \mathbb{N}$ – деяке число, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ – обмежена область, $L^0(\mathcal{O})$ – множина всіх вимірних за Лебегом функцій $v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ (див. [75, с. 17]),

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \quad | \quad \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0\}. \tag{1.19}$$

Для будь-якої функції $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ позначимо

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \quad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \tag{1.20}$$

$$S_{\mathfrak{q}}(s) := \max\{s^{\mathfrak{q}_0}, s^{\mathfrak{q}^0}\}, \quad s \geq 0, \tag{1.21}$$

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y)-1} \ \text{ майже для всіх (м.д.в.) } \ y \in \mathcal{O} \tag{1.22}$$

(тут $\frac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}'(y)} = 1$ м.д.в. $y \in \mathcal{O}$ та $\mathfrak{q}' \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ з $\mathfrak{q}_0 > 1$),

$$\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\, dy, \quad v \in L^0(\mathcal{O}). \tag{1.23}$$

Припустимо, що $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ та $\mathfrak{q}_0 > 1$. Множина

$$L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}) := \{v \in L^0(\mathcal{O}) \ | \ \rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) < +\infty\} \tag{1.24}$$

з нормою Люксембурга

$$||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \ | \ \rho_{\mathfrak{q}}(v/\lambda;\mathcal{O}) \leq 1\} \tag{1.25}$$

називається *узагальненим простором Лебега.* Ці простори в 1931 р. вперше ввів В. Орліч у праці [97]. Функцію $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(y)$ назвемо *(змінним) показником інтегровності* елементів простору $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$.

*Узагальненим простором Соболєва* $W^{1,\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ називають множину функцій $v \in L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$, узагальнені похідні яких належать до $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$, з нормою

$$||v; W^{1,\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| = ||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| + \sum_{i=1}^{N} ||v_{y_i}; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||. \tag{1.26}$$

*Узагальненим простором Соболєва* $W_0^{1,\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ називають замикання множини $C_0^\infty(\mathcal{O})$ за нормою (1.26).

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $p \in \mathcal{B}_+(G)$ та $p_0 \geq 1$,

$$[L^{p(y)}(G)]^n := \{\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^\top : G \to \mathbb{R}^n \ \mid \ f_i \in L^{p(y)}(G), \ \ i = \overline{1,n}\}, \tag{1.27}$$

$$[L^{p(y)}(G)]^{n\times n} :=$$

$$:= \{\mathbf{F} = (F_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} : G \to \mathbb{R}^{n\times n} \ \mid \ F_{ij} \in L^{p(y)}(G), \ \ i,j = \overline{1,n}\}, \tag{1.28}$$

– простори функцій, відповідно, з нормами

$$||\mathbf{f}||_{[L^{p(y)}(G)]^n} := \sum_{i=1}^{n} ||f_i||_{L^{p(y)}(G)}, \quad \mathbf{f} \in [L^{p(y)}(G)]^n, \tag{1.29}$$

$$||\mathbf{F}||_{[L^{p(y)}(G)]^{n\times n}} := \sum_{i,j=1}^{n} ||F_{ij}||_{L^{p(y)}(G)}, \quad \mathbf{F} \in [L^{p(y)}(G)]^{n\times n}. \tag{1.30}$$

Крім того, визначимо простір

$$L^{p(y)}(G; \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}) := \{\mathbf{F} : G \to \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \ \mid \ \mathbf{F} \in [L^{p(y)}(G)]^{n\times n}\}, \tag{1.31}$$

який є замкненим підпростором простору $[L^{p(y)}(G)]^{n\times n}$.

Нехай також

$$L^{p(y)}(G; \mathbb{R}_{\geq 0}) := \{f \in L^{p(y)}(G) \ \mid \ f \geq 0 \ \ \text{майже скрізь в} \ \ G\}. \tag{1.32}$$

Властивості узагальнених просторів Лебега і Соболєва вивчено, зокрема, в працях [23], [56], [75], [101], [104] та ін.

Однією зі складностей, які виникають при роботі з узагальненими просторами Лебега і Соболєва є неможливість отримання деяких “стандартних” оцінок через вигляд норми в цих просторах. Проте одна оцінка просто переноситься на випадок змінних показників нелінійності. Мова йде про узагальнену нерівність Юнга з $\varepsilon \in (0,1]$ (див. твердження 2.8 [75, с. 21]): Якщо $p \in \mathcal{B}_+(G)$, $p_0 > 1$ та виконується позначення типу (1.22), то

$$ab \leq \frac{\varepsilon^{p_0}}{p_0} a^{p(y)} + \frac{\varepsilon^{-(p_0)'}}{(p^0)'} b^{p'(y)}, \quad a, b \geq 0, \quad y \in G. \tag{1.33}$$

Значний внесок в теорію просторів зі змінним показником сумовності було зроблено Фаном Х.-Л. та Жао Д. в [61]. Вони узагальнили теореми про компактні вкладення для просторів $W^{1,q(x)}(\Omega)$. Їх результати, зокрема, забезпечують коректність збіжності у методі Фаедо-Гальоркіна.

Наступний етап розвитку операторних методів у даних просторах був запропонований у праці [56], де, зокрема, досліджено властивості операторів Немицького та нелокальних інтегральних операторів, що дозволяє аналізувати нелокальні моделі зі змінним показником нелінійності.

Виявляється, що не всі факти з теорії звичайних просторів Лебега і Соболєва виконуються для їх узагальнених аналогів. Прикладом є властивості оператора зсуву. Для їх виконання слід вимагати від функційних показників інтегровності певної гладкості. Дамо кілька означень.

Кажемо, що функція $p \in \mathcal{B}_+(G)$ ($p_0 \geq 1$) є в $G$ локально log-неперевною за Гельдером (див. [75, с. 24]), якщо існує така стала $c_1 > 0$, що

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_1}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})} \quad \text{для всіх} \quad x, y \in G. \tag{1.34}$$

Вважатимемо, що $p$ має в $G$ log-поведінку за Гельдером (поведінку на безмежності), якщо існують такі сталі $p_\infty \in \mathbb{R}$ та $c_2 > 0$ що,

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log(e + |x|)} \quad \text{для всіх} \quad x \in G. \tag{1.35}$$

Казатимемо, що $p$ є в $G$ глобально log-неперервною за Гельдером, якщо вона в $G$ локально log-неперервна і має $\log$-поведінку за Гельдером. Сталі $c_1$ та $c_2$ називаються локальною log-сталою та глобальною log-сталою відповідно. Тоді, максимум $c_{\log}(p) := \max\{c_1,\ c_2\}$ називається просто log-сталою Гельдера для $p$.

Нехай

$$\mathcal{P}^{\log}(G) := \{p \in \mathcal{B}_+(G) \ \mid \ p \text{ – глобально log-неперервна за Гельдером}, \quad p_0 \geq 1\}. \tag{1.36}$$

Якщо показники інтегровності функцій з узагальнених просторів Лебега і Соболєва належать до $\mathcal{P}^{\log}(G)$, то багато класичних властивостей функцій з таких просторів зберігається. Нас, зокрема, цікавитимуть формули інтегрування частинами для таких функцій.

Властивості узагальнених просторів Лебега та Соболєва досліджували також у працях [16], [22], [43], [46], [79], [101], [105].

1.2.2. *Формули інтегрування частинами.* Нехай показники нелінійності є такими: $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$. Для подальших потреб визначимо узагальнені (змінні) простори Бохнера-Лебега (див. означення 3.2 [75, с. 47] для уточнення деталей) таким чином: нехай $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})$ – простір таких вектор-функцій $\boldsymbol{u} \in [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n$, для яких $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in L^{p(x,t)}(Q_{0,T}; \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n\times n})$, з відповідною нормою. Нехай також (див. означення 3.5 [75, с. 83-84])

$$\overset{\circ}{\mathcal{X}}{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T}) := \overline{[C_0^\infty(Q_{0,T})]^n}^{\,\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})}}. \tag{1.37}$$

За допомогою (1.37) визначимо узагальнений простір Бохнера-Соболєва (див. означення 3.7 [75, с. 86] для уточнення деталей) так:

$$\mathcal{W}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T}) := \Big\{ \boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T}) \ \ \Big| \ \ \exists\, \boldsymbol{u}_t \in [\overset{\circ}{\mathcal{X}}{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})]^* \Big\}. \tag{1.38}$$

При виконанні додаткових умов, з твердження 3.26 [75, с. 95], зокрема, випливає така формула інтегрування частинами: для $0 \le t_1 < t_2 \le T$ та для всіх функцій $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})$ виконується рівність

$$\langle \boldsymbol{u}_t, \chi_{t_1,t_2}\boldsymbol{u} \rangle_{\mathcal{W}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}(x,t_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}(x,t_1)|^2\, dx, \tag{1.39}$$

де

$$\chi_{t_1,t_2}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1,t_2]; \\ 0, & t \notin [t_1,t_2]. \end{cases} \tag{1.40}$$

Формулу (1.39) у часткових випадках доведено в [16], [19], [13], [22], [57].

Оскільки тематика дисертаційної роботи передбачає вивчення задач в просторах соленоїдальних функцій (функцій, для яких виконується умова нестискуваності $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$), то до введення таких просторів і перейдемо. Почнемо з множини функцій (див. зауваження 4.12 [75, с. 145])

$$\mathcal{D}_{\text{div}} := [C_{0,\text{div}}^\infty(Q_{0,T})]^n := \{ \boldsymbol{\phi} \in [C_0^\infty(Q_{0,T})]^n \ \ | \ \ \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) = 0 \ \text{ в } \ Q_{0,T} \}. \tag{1.41}$$

Нехай знову $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$. Визначимо узагальнені (змінні) соленоїдальні простори Бохнера-Лебега $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})$, як множину всіх вектор-функцій $\boldsymbol{u} \in [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n$ для яких, зокрема, крім умови $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ виконується умова $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in L^{p(x,t)}(Q_{0,T}; \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n\times n})$, з відповідною нормою (див. означення 4.2 [75, с. 115] для уточнення деталей). Також нехай

$$\overset{\circ}{\mathcal{V}}{}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T}) := \overline{\mathcal{D}_{\text{div}}}^{\,\|\cdot\|_{\mathcal{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{q,p}(Q_{0,T})}} \tag{1.42}$$

(див. означення 4.5 [75, с. 152-153]). За допомогою (1.42) визначимо соленоїдальний узагальнений (змінний) простір Бохнера-Соболєва (див. означення 4.7 [75, с. 158] для уточнення деталей) так:

$$\mathcal{W}^{q,p}_{\varepsilon,\sigma}(Q_{0,T}) := \Big\{ \boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}^{q,p}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(Q_{0,T}) \;\Big|\; \exists\, \boldsymbol{u}_t \in [\overset{\circ}{\mathcal{V}}{}^{q,p}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(Q_{0,T})]^* \Big\}. \tag{1.43}$$

При виконанні додаткових умов, з твердження 4.23 [75, с. 172], зокрема, випливає така формула інтегрування частинами для соленоїдальних функцій: для $0 \le t_1 < t_2 \le T$ та для всіх $u \in \mathcal{W}^{q,p}_{\varepsilon,\sigma}(Q_{0,T})$ виконується рівність

$$\langle \boldsymbol{u}_t, \chi_{t_1,t_2}\boldsymbol{u}\rangle_{\mathcal{W}^{q,p}_{\varepsilon,\sigma}(Q_{0,T})} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}(x,t_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}(x,t_1)|^2\,dx, \tag{1.44}$$

де $\chi_{t_1,t_2}$ взято з (1.40).

Формулу (1.44) у частковому випадку доведено в [104].

1.2.3. *Розв'язність задач для звичайних та стохастичних рівнянь з частинними похідними.* Нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності спершу активно досліджували у випадку, коли цей показник нелінійності не залежить від часової змінної $t$.

Ковачек О. у праці [78] за 1995 р. довів існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для параболічного рівняння вищого порядку, яке у модельному випадку має вигляд

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i |u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i})_{x_i} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1.45}$$

з функціями $a_1, \dots, a_n$, які не залежать від $t$.

Бокало М.М. та Сікорський В.М. у праці [10] за 1998 р. довели існування розв'язку задачі без початкових умов для рівняння (1.45) з $a_1 \equiv 1$, …, $a_n \equiv 1$, $p_0 > 2$, та відповідного рівняння вищого порядку.

Бугрій О.М. та Лавренюк С.П. у праці [17] за 2000 р. довели існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для системи параболічних рівнянь, яка у модельному випадку має вигляд (1.45), де $p_0 < 2$, $a_1, \dots, a_n \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$. Аналогічний результат для різних параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов, що узагальнюють рівняння (1.45), отримали Бугрій О.М. та Лавренюк С.П. в [45].

У львівській математичній школі з нелінійних диференціальних рівнянь досліджено різноманітні задачі для стаціонарних і еволюційних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Цим дослідженням присвячено праці Бокала

М.М., Бокала Т.М., Бугрій Н.В., Бургія О.М., Доманської Г.П., Доманської О.В., Лавренюка С.П., Процах Н.П., Пукача П.Я., Сікорського В.М., Холявки (Панат) О.Т. та ін.

У праці Антонцева С. та Шмарьова С. [22] досліджено нелінійні параболічні рівняння виду

$$u_t - \nabla \cdot (|\nabla u|^{q(x,t)-2} \nabla u) = f(x,t),$$

за умови log-Гельдерової неперервності функції $q(x,t)$. Автори довели існування, єдиність і регулярність слабких розв'язків задач для таких рівнянь, акцентуючи увагу на важливості методів монотонності для аналізу просторів зі змінним показником. Отримані ними детерміновані результати становлять аналітичний фундамент для подальших стохастичних узагальнень, зокрема таких, як представлено в цій нашій праці.

Ліу В. та Рокнер М. у праці [88] сформували теоретичну основу для аналізу стохастичних еволюційних рівнянь в гільбертових просторах з локально монотонними операторами. Вони довели існування та єдиність розв'язків задач для рівнянь типу

$$du + A(u)\, dt = B(u)\, d\mathcal{W}_t$$

за доволі слабких умовах монотонності присутніх там операторів. Це узагальнення дало змогу досліджувати SPDE, у яких нелінійність має просторово змінну швидкість зростання, зокрема системи, що містять доданки типу $|u|^{q(x)-2}u$.

Подальший розвиток цієї теорії вони здійснили у своїй праці [89]. Вони розширили підхід локальної монотонності на клас нелінійних стохастичних еволюційних рівнянь. Запропоновані ними методи, що ґрунтуються на коерцитивності операторів, теоремах про компактні вкладення та формулі Іто, мають велике значення для доведення теорем існування та єдиності розв'язків задач для стохастичних рівнянь з частинними похідними.

Стохастичні параболічні рівняння, зокрема і нелінійні, вивчено у [80], [100]. Слабкий розв'язок нелокального стохастичного параболічного рівняння знайдено у [53].

Параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності досліджено в [28], [29], [30], [35], [42]. Інтегро-диференціальні рівняння зі сталими та змінними показниками нелінійності досліджено в [14], [31], [32], [33], [34], [40], [41], [51], [52], [103], [111].

1.3. **Класичні та узагальнені моделі гідродинаміки.** Рух рідин у різноманітних середовищах є об'єктом дослідження як у фундаментальній фізиці, так і в прикладній механіці. Рівняння, що їх описують базуються на законах збереження маси, імпульсу та енергії. Зокрема, рівняння Нав'є-Стокса є центральним елементом гідродинамічного моделювання. Далі наведено фізичний зміст систем, які досліджуються у роботі.

1.3.1. *Загальні рівняння руху рідин.* Рух середовища вважається відомим, якщо в кожен момент часу $t \in (0, T) \subset \mathbb{R}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}^3$ середовища відомо поле швидкостей $\boldsymbol{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$. Крім того, залежно від умов задачі мають бути визначені і величини, які характеризують стан середовища: густина $\rho(x,t)$, тиск $\pi(x,t)$, температура $z(x,t)$ та інші. Відомо, що ці величини зв'язані певними співвідношеннями.

1) *Рівняння нерозривності середовища* (див. [54, с. 387]) має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho\, u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho\, u_3)}{\partial x_3} = 0. \tag{1.46}$$

Далі вважатимемо, що середовище однорідне – його густина не залежить від просторової змінної $x$. Тоді (1.46) набуде вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.47}$$

де $\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$.

2) *Загальне рівняння руху суцільного середовища* в диференціальній формі (див. [54, с. 386]) має вигляд

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho}\, \operatorname{div} \mathbf{N} + \boldsymbol{F}, \tag{1.48}$$

де $\boldsymbol{\omega}$ – прискорення рідини, $\boldsymbol{F}$ – зовнішні сили, $\dfrac{1}{\rho}\, \operatorname{div} \mathbf{N}$ – внутрішні гідродинамічні сили. Тут $\mathbf{N} = (N_{ij})$ – тензор напружень (див. [83, с. 36]),

$$(\operatorname{div} \mathbf{N})_i := \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.49}$$

Нагадаємо, що прискорення обчислюється (див. [83, с. 36]) за формулою

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}, \tag{1.50}$$

де $(\boldsymbol{u}, \nabla) := u_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$.

Також нагадаємо *закон Стокса* (див. [83, с. 36]):

$$N_{ij} = -\pi\,\delta_{ij} + 2\rho\mu\,D_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.51}$$

де $\mu$– "перший коефіцієнт в'язкості"– параметр, що характеризує в'язкість середовища, $\mathbf{D} = (D_{ij})$– тензор швидкостей деформацій,

$$D_{ij} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.52}$$

$\delta_{ij}$– символ Кронеккера, що дорівнює 1 при $i = j$ та дорівнює 0 при $i \neq j$.

Підставивши (1.51) та (1.52) в (1.49), матимемо таке:

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mathbf{N})_1 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial N_{1j}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(-\pi\,\delta_{1j} + \rho\mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1}\Big)\Big) = \\ = -\frac{\partial\pi}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho\mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\Big)\Big) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho\mu\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\Big)\Big) = \\ = -\frac{\partial\pi}{\partial x_1} + \rho\mu\,\Delta u_1 + \rho\mu\,\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{\partial x_1},\end{aligned} \tag{1.53}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа.

Аналогічно перетворимо другу і третю компоненти вектора $\operatorname{div}\mathbf{N}$ і отримаємо загальну параболічну систему рівнянь Нав'є-Стокса

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\,u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\,u_2 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\,u_3 = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial\pi}{\partial x_1} + \mu\,\Delta u_1 + \mu\,\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{\partial x_1} + F_1;\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\,u_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\,u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\,u_3 = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial\pi}{\partial x_2} + \mu\,\Delta u_2 + \mu\,\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{\partial x_2} + F_2;\\[2mm] \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\,u_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\,u_2 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\,u_3 = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial\pi}{\partial x_3} + \mu\,\Delta u_3 + \mu\,\dfrac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{u})}{\partial x_3} + F_3.\end{cases} \tag{1.54}$$

3) *Закон Клапейрона* для ідеальної рідини (див. [54, с. 418]) має вигляд

$$\pi = R\,\rho\,z, \tag{1.55}$$

де $R = 8,31$ (Дж/моль) – універсальна газова стала. Його узагальнення – *закон Ван-дер-Ваальса* для звичайної рідини має вигляд

$$(\pi + a\rho^2)(1 - b\rho) = R\,\rho\,z, \tag{1.56}$$

де $a$ – поправка на внутрішній тиск молекул, $b$ – поправка на об'єм молекул.

4) *Рівняння теплопереносу* (див. [54, с. 418]) має вигляд

$$\frac{A}{2}\,\rho\,\frac{d}{dt}(|\boldsymbol{u}|^2) + c_V\,\rho\,\frac{dz}{dt} =$$

$$= \operatorname{div}(k\nabla z) + A\,\rho\,(\boldsymbol{F},\boldsymbol{u}) + A\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{3}N_{ij}u_j\Big)+\varepsilon, \tag{1.57}$$

$A = \frac{c_\pi - c_V}{R}$ – термічний еквівалент роботи (див. [54, с. 417, 419]), $c_\pi$ – теплоємність рідини при сталому тиску, $c_V$ – теплоємність рідини при сталому об'ємі, $k$ – коефіцієнт теплопровідності, $\varepsilon$ – зовнішній притік тепла до частинки.

Беручи до уваги попередні співвідношення після певних перетворень рівняння теплопереносу набуде вигляду (див. [54, с. 419])

$$c_\pi\,\rho\,\frac{dz}{dt} - A\,\frac{d\pi}{dt} = \operatorname{div}(k\nabla z) + \varepsilon + A\Big\{\lambda|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2 + 2\mu\Big[\Big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|^2\Big] +$$

$$+\,\mu\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\Big)^2\Big]\Big\}, \tag{1.58}$$

де $\lambda$ – "другий коефіцієнт в'язкості", який при певних додаткових умовах має вигляд (див. [54, с. 385]) $\lambda = -\frac{2}{3}\,\mu$.

Отже, рівності (1.47), (1.54), (1.55), (1.58) – це система шести рівнянь з який треба знайти шість невідомих $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$, $\pi(x,t)$, $\rho(t)$, $z(x,t)$. Це складна задача. Розглядатимемо її часткові випадки.

1.3.2. *Часткові випадки загальної системи рівнянь гідродинаміки.* З отриманого вище матимемо таке.

1) Рух нев'язкої нестискуваної рідини описується *рівняннями Ейлера*:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{F}. \tag{1.59}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{1.60}$$

Друге з цих рівнянь є математичним записом умов нестискуваності. Дійсно, якщо $\rho \equiv const$, то з (1.47) одержимо (1.60). Тоді підставивши $\mu = 0$ та (1.60) в систему (1.54) отримаємо (1.59).

2) Якщо $\mu > 0$, то з (1.54) та (1.60) отримаємо *рівняння Нав'є-Стокса* руху в'язкої нестискуючої рідини:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{F}, \tag{1.61}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{1.62}$$

Стаття Мантену I. [96] присвячена нелінійним рівнянням Нав'є-Стокса з пам'яттю, де вплив попереднього стану в'язкості враховується через згортку з експоненційним ядром пам'яті:

$$\tau(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} m(t-s)\tau(s)\, ds, \quad m(t) = \alpha e^{-\beta t}, \alpha, \beta > 0,$$

де $m$ – функція пам'яті. Точніше, вивчається мішана задача для системи

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) - v\Delta y(t,x) - y(t,x) + (y(t,x)\nabla)y(t,x) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}(-v\Delta y(s,x) - y(s,x) + (y(s,x)\Delta)y(s,x))\, ds = f(t,x),$$

$$\nabla y(t,x) = 0.$$

Досліджено властивості розв'язку відповідної мішаної задачі.

3) Лінеарезований варіант систем Нав'є-Стокса (в ньому немає нелінійного доданку $(\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}$) називається *системою рівнянь Стокса* і має вигляд

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\pi = \boldsymbol{F}, \tag{1.63}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{1.64}$$

Дослідження параболічних систем Стокса стало важливим напрямом у математичній гідродинаміці. Воно бере свій початок з роботи О.А. Ладиженської [81], яка систематизувала математичний апарат для аналізу в'язкої нестискуваної рідини. Одним із ключових результатів її праці є доведення існування та єдності слабких розв'язків мішаних задач для систем Стокса вигляду (1.63)-(1.64). Також вона встановила умови підвищення регулярності слабких розв'язків розглядуваних задач до класичних.

Праця Галді Г., Сімадер С. та Сор Х. [68] зробила значний внесок у розвиток теорії систем Стокса. За допомогою результатів цієї праці вдалось розширити клас допустимих граничних умов. У цій роботі, зокрема, розглянуто задачу

$$-\Delta u + \nabla\pi = \operatorname{div} F, \tag{1.65}$$

$$\operatorname{div} u = k, \qquad u|_{\partial\Omega} = q \tag{1.66}$$

має єдиний слабкий розв'язок – пару $u \in L^q(\Omega)$ та $\pi \in W^{-1,q}(\Omega)$ такі, що

$$||u||_{L^q(\Omega)} + ||\pi||_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq C(||F||_{L^r(\Omega)} + ||k||_{L^q(\Omega)} + ||g||_{W^{-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)}).$$

Дослідження нелінійних інтегро-диференційних систем Стокса розвивалось завдяки поєднанню теорій, що стосуються ненютонівської в'язкості, ефектів пам'яті та слабких розв'язків задач гідродинаміки. Праця Д. Жосефа [73] заклала фізичні та математичні основи для моделювання в'язкопружних рідин, запровадивши рівняння, які враховують історію деформації рідини за допомогою інтегральних членів вигляду

$$\sigma(x,t) = \int\limits_0^t G(t-\tau)\nu(x,\tau)\, d\tau,$$

де $G(t-\tau)$ – ядро релаксації, $\nu$ – тензором швидкості деформації.

Хрон Дж., Малек Л. та Раджагопал К. [72] зробили внесок у дослідження нелінійних нестисливих потоків із в'язкістю, що залежить від тиску і регулюється умовою

$$|\tau(Du)| \leq c_1(1 + |Du|^p).$$

Вони проаналізували відповідну систему в межах варіаційного та монотонного операторних підходів. Незважаючи на те, що їхня увага була зосереджена на впливі тиску, їхні методологічні підходи є близькими до тих, що застосовуються в нашій роботі, де нелінійний член $G(x,t)|u|^{q-2}u$ з (2.2) задовольняє аналогічну умову монотонності, яка гарантує єдиність розв'язку.

Системи Стокса та Нав'є-Стокса зі сталими показниками нелінійності досліджено, зокрема, в [21], [67], [82], [90], [106], [107], [110], [113].

Виходячи за межі лінійної в'язкої пружності, М. Ружичка [104] розробив теорію ненютонівських рідин зі змінним показником в'язкості. Тензор напружень було визначено як

$$\tau(u) = 2\mu_0|D(u)|^{p(x)-2}D(u),$$

де $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ – симетричний градієнт поля швидкостей, а $p(x)$ – показник нелінійності, що залежить від просторової змінної. За допомогою теорії монотонних операторів разом із методом Фаедо-Гальоркіна ним доведено існування та єдиність слабких розв'язків відповідних систем гідродинаміки.

Системи Стокса зі змінними показниками нелінійності, які залежать лише від просторових змінних дослідив О.М. Бугрій [39]. Він довів існування слабкого розв'язку такої задачі:

$$u_t - \operatorname{div} \mathcal{N} + \nabla \pi = F(x, t, u), \qquad \operatorname{div}\, u = 0, \tag{1.67}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi\, dx = 0, \qquad u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{1.68}$$

де $\mathcal{N} = \alpha\, D(u) + \beta\, |D_{II}(u)|^{\frac{p-2}{2}} D(u)$, $p > 1$ – сталий показник нелінійності,

$$D = (D_{ij}), \quad D(u)_{ij} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$D_{II}(u) := \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2,$$

$$F(x, t, u) = f(x, t) - \gamma\, |u|^{q(x)-2} u,$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$ – числові параметри, $q = q(x)$ – змінний показник нелінійності.

Дослідження нелінійних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності та стохастичним збуренням займає важливе місце в теорії неньютонівської механіки рідин та в теорії стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними (SPDEs). Такі системи узагальнюють класичну модель Стокса, дозволяючи показнику нелінійності $q(x, t)$ змінюватися в просторі та часі, відображаючи рідини, реологічні властивості яких залежать від факторів навколишнього середовища. Коли у систему включається випадкове збурення, змодельоване, наприклад, за допомогою вінерівського процесу $W(t, \omega)$, отримаємо стохастичну модель, яку вивчатимемо далі.

Узагальнення систем Стокса (1.63)-(1.64) вивчатимемо у розділі 2.

4) З точки зору теорії рівнянь з частинними похідними дослідження навіть лінійної системи рівнянь (1.63)-(1.64) пов'язане зі значними труднощами. Це зумовлено навіть виглядом цієї системи: (1.63) є рівняннями другого порядку "параболічного" типу, а (1.64) – рівнянням першого порядку. Для чисельної реалізації розв'язку відповідної мішаної задачі О.П. Осколков [98] запропонував метод, який сьогодні називають методом регуляризації Осколкова (метод параболічного зглажування): введення в рівняння (1.64) доданку з малим допоміжним параметром $\varepsilon > 0$, який зробить систему (1.63)-(1.64) параболічною більш придатною для аналізу. Отриману систему

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu \Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi = \boldsymbol{F}, \tag{1.69}$$

$$\varepsilon\Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}-\Delta\pi\Big)+\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \qquad (1.70)$$

називатимемо системою Осколкова-Стокса.

Значної уваги заслуговує праця Ауна М. [24], де розглядається слабко-ренормалізовані розв'язки нелінійних параболічних систем із фазовими доданками. Запропонована автором параболічна регуляризація тиску узгоджується з методом Осколкова та підтверджує коректність переходу до границі при $\varepsilon\to 0$, що дозволяє строго відновити класичну умову $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$. Таким системам також присвячено працю [99].

Узагальнення систем Осколкова-Стокса (1.69)-(1.70) вивчатимемо далі у розділі 3.

5) Лінеаризований варіант рівняння притоку тепла (1.58) має вигляд

$$c_\pi\,\rho\,\frac{\partial z}{\partial t}-A\,\frac{\partial\pi}{\partial t}-k\,\Delta z=\varepsilon. \qquad (1.71)$$

Підставивши рівняння Клапейрона (1.55) в рівняння Стокса (1.63) та рівняння притоку тепла (1.71) і використавши вигляд величини $A$, отримаємо таку лінійну систему:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}-\mu\,\Delta\boldsymbol{u}+R\,\nabla z=\boldsymbol{F}, \qquad (1.72)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \qquad (1.73)$$

$$c_V\,\rho\,\frac{\partial z}{\partial t}-k\,\Delta z=\varepsilon. \qquad (1.74)$$

Певним узагальненням системи (1.72)-(1.74) (див. [69, с. 5] для уточнення деталей) є така система рівнянь Бусінеска-Стокса:

$$\frac{1}{P}\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}-\Delta\boldsymbol{u}-\widehat{z}R\,\theta+\nabla\pi=0, \qquad (1.75)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \qquad (1.76)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta-u_3=0. \qquad (1.77)$$

де $\boldsymbol{u}$, $\pi$ та $\theta$ – безрозмірні версії величин швидкості, тиску та температури, відповідно, $R$ – стала Релея, $P$ – стала Прандтля, $\widehat{z}$ – одиничний вектор в напрямку осі $OZ$.

У праці [49] Черняков В.Я. розглянув систему Буссінеска у вигляді

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u + \theta g, \\ \theta_t + (u \cdot \nabla)\theta = k \Delta \theta, \\ \mathrm{div}\ \ u = 0, \end{cases} \tag{1.78}$$

де $u$ – вектор швидкості рідини, $\theta$ – температура рідини, $\pi$ – тиск, $\nu$ – в'язкість, $k$ – теплопровідність та $g$ – гравітація. У праці [49] закладено фундамент для аналізу систем Буссінеска у класичному вигляді, доведено існування слабкого розв'язку відповідної мішаної задачі при достатньо гладких початкових даних. Нелінійні системи Буссінеска зі сталими показниками нелінійності розглядаються у працях [48], [94] та [95]. Система Буссінеска зі змінним показником нелінійності, що залежить тільки від часової змінної розглядається у роботі [55].

Розвиток моделювання в'язкопружних середовищ призвів до появи нових систем диференціальних рівнянь.

Галопе С. та Сат Дж. у праці [71] розглянули нелінійні рівняння типу Олдройда, які описують взаємозв'язок між полем швидкості та тензором напружень полімерних матеріалів

$$\begin{cases} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) = \nabla \cdot T(u, \tau) = f, \\ \tau_t + u \cdot \nabla \tau - (\nabla u)\tau - \tau(\nabla u)^T + \frac{1}{\lambda}\tau = \frac{\eta}{\eta}(\nabla u + \nabla u^T), \end{cases}$$

де $\lambda$ – час релексації, а $\eta$ – коефіцієнт в'язкості. Вони встановили теореми існування слабких розв'язків, використовуючи методи компактності та теореми вкладення для просторів Соболєва. Запропонований ними підхід істотно вплинув на подальші дослідження нелінійних диференціальних рівнянь, поєднавши в'язкопружне моделювання з інструментами сучасного функціонального аналізу.

Узагальнення систем Бусінеска-Стокса (1.75)-(1.77) вивчатимемо далі у розділі 4.

1.4. **Розв'язність задач для рівнянь з частинними похідними в просторах соленоїдальних функцій.**

Тепер наведемо результати щодо розв'язності задач для параболічних систем Стокса та Навьє-Стокса. Нехай $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ такі, що $q \geq p$, $p_0 \geq 2$. Нехай $\mathbf{S} : Q_{0,T} \times \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ – функція, яка задовольняє такі умови:

**(S.1):** $\mathbf{S}$ є відображенням Каратеодорі, тобто $\mathbf{S}(\cdot,\cdot,\mathbf{A}) : Q_{0,T} \to \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ – вимірне для кожного $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ та $\mathbf{S}(x,t,\cdot) : \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ – неперервне майже для всіх (м.д.в.) $(x,t) \in Q_{0,T}$;

**(S.2):** для всіх $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ та м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконується оцінка

$$|\mathbf{S}(x,t,\mathbf{A})| \leq \alpha(\delta + |\mathbf{A}|)^{p(x,t)-2}|\mathbf{A}| + \beta(x,t), \tag{1.79}$$

де $\alpha \geq 1$ та $\beta \in L^{p'(x,t)}(Q_{0,T}; \mathbb{R}_{\geq 0})$ (див. позначення (1.22) та (1.32));

**(S.3):** для всіх $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ та м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконується оцінка

$$\mathbf{S}(x,t,\mathbf{A}) : \mathbf{A} \geq c_0(\delta + |\mathbf{A}|)^{p(x,t)-2}|\mathbf{A}|^2 - c_1(x,t), \tag{1.80}$$

де $c_0 > 0$ та $c_1 \in L^1(Q_{0,T}; \mathbb{R}_{\geq 0})$;

**(S.4):** для всіх $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ та м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконується оцінка

$$(\mathbf{S}(x,t,\mathbf{A}) - \mathbf{S}(x,t,\mathbf{B})) : (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq 0. \tag{1.81}$$

Нехай $\mathbf{d} : Q_{0,T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – функція, яка задовольняє такі умови:

**(D.1):** $\mathbf{d} : Q_{0,T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Каратеодорі.

**(D.2):** для всіх $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ та м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконується оцінка

$$|\mathbf{d}(x,t,\mathbf{a})| \leq \gamma(1 + |\mathbf{a}|)^{q(x,t)-1} + \eta(x,t), \tag{1.82}$$

де $\gamma \geq 1$ та $\eta \in L^{q'(x,t)}(Q_{0,T}; \mathbb{R}_{\geq 0})$;

**(D.3):** для всіх $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ та м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконується оцінка

$$\mathbf{d}(x,t,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \geq -c_2|\mathbf{a}|^2 + c_3(x,t), \tag{1.83}$$

де $c_2 \geq 0$ та $c_3 \in L^1(Q_{0,T})$.

За виконання цих та деяких інших умов в теоремі 5.2 [75, с. 218] доведено існування узагальненого розв'язку такої задачі для нестаціонарних $p(x,t)$-систем Стокса:

$$\boldsymbol{u}_t - \operatorname{div}\Big(\mathbf{S}(\cdot,\cdot,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\Big) + \mathbf{d}(\cdot,\cdot,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} - \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{1.84}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \qquad \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad \Sigma_{0,T}, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.85}$$

точніше, показано, що для всіх $\boldsymbol{\phi} \in [C^\infty(\overline{Q_{0,T}})]^n$ таких, що $\operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) = 0$ в $Q_{0,T}$

та $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\phi}) \subseteq [0,T)\times\Omega$ виконується рівність

$$-\int\limits_{Q_{0,T}} \boldsymbol{u}(x,t)\cdot\boldsymbol{\phi}_t(x,t)\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\mathbf{S}(x,t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})(x,t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})(x,t) + \mathbf{d}(x,t,\boldsymbol{u}(x,t))\cdot\boldsymbol{\phi}(x,t)\Big]\,dxdt =$$

$$= (\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\phi}(0))_H + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\boldsymbol{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\phi}(x,t) + \boldsymbol{F}(x,t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})(x,t)\Big]\,dxdt, \qquad (1.86)$$

яка означає, зокрема, виконання рівності (1.84) в сенсі простору $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$.

При додатковій умові $(\mathbf{d}(x,t,\mathbf{a})-\mathbf{d}(x,t,\mathbf{b}))\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \geq -c_4(t)|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ в твердженні 5.16 [75, с. 219] доведено єдиність цього розв'язку. Відповідні системи Навьє-Стокса теж вивчено у [75].

У системах Стокса та Навьє-Стокса поряд з відшуканням векторного поля швидкостей $\boldsymbol{u}$ часто окремо розглядають задачу на відшукання тиску $\boldsymbol{\pi}$. Зауважимо, що в системі (1.84) вираз $\nabla\boldsymbol{\pi}$ відсутній, ми "не бачимо його" в шкалі відповідних соленоїдальних функцій. "Побачити" тиск можна, змінивши пробну функцію в відповідній інтегральній тотожності. Так, наприклад, в теоремі 6.1 [75, с. 236-238] за виконання, зокрема, умов **(S.1)**-**(S.4)** та **(D.1)**-**(D.3)** отримано такі результати. Показано існування таких функцій $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{\pi}$, що $\boldsymbol{u}(0) = \mathbf{u}_0$ та для кожного $\boldsymbol{\phi} \in [C_0^\infty(Q_{0,T})]^n$ виконується рівність

$$-\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\boldsymbol{u}(x,t)\cdot\boldsymbol{\phi}_t(x,t) + \boldsymbol{\pi}(x,t)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\phi}_t)(x,t)\Big]\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\mathbf{S}(x,t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})(x,t)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})(x,t) + \mathbf{d}(x,t,\boldsymbol{u}(x,t))\cdot\boldsymbol{\phi}(x,t)\Big]\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\boldsymbol{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{\phi}(x,t) + \boldsymbol{F}(x,t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})(x,t)\Big]\,dxdt, \qquad (1.87)$$

тобто, виконується рівність

$$\boldsymbol{u}_t - \mathrm{div}\Big(\mathbf{S}(\cdot,\cdot,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\Big) + \mathbf{d}(\cdot,\cdot,\boldsymbol{u}) - \nabla\boldsymbol{\pi}_t = \boldsymbol{f} - \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) \qquad (1.88)$$

в сенсі простору $[D^*(Q_{0,T})]^n$.

Схожі результати для відповідних систем Нав'є-Стокса отримано у [47].

**Висновки до розділу 1.** У першому розділі дисертаційної роботи зроблено короткий огляд наукових публікацій за тематикою проведених в роботі дисертаційних досліджень.

# 2. РОЗДІЛ
# ПАРАБОЛІЧНІ СИСТЕМИ СТОКСА

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено задачам для еволюційних систем вигляду

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{Y}u + \nabla\pi = F, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ – невідома вектор-функція, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ – невідома скалярна функція, $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ – дивергенція функції $u$, $\nabla\pi = (\frac{\partial \pi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \pi}{\partial x_n})$ – градієнт $\pi$, $F$ – деяка вектор-функція, $\mathcal{Y}$ – нелінійний диференціальний чи інтегро-диференціальний оператор та виконуються позначення (1.4)-(1.7), причому, $n \geq 2$. Також, у цьому розділі розглянуто відповідну (2.1) стохастичну систему, збурену доданком типу білого шуму.

## 2.1. **Параболічні системи рівнянь Стокса зі сталим показником нелінійності.** 

Нехай $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та виконуються позначення (1.4)-(1.7).

Шукатимемо слабкий розв'язок $\{u, \pi\}$ задачі

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t) u_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q-2}u + \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy +$$

$$+ \nabla\pi(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Omega} \pi(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.4}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{2.5}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

де, зокрема, $q > 1$ ми називаємо показником нелінійності системи (2.2) і припускатимемо його сталим у цьому підрозділі.

Введемо потрібні позначення (див. [11, с. 19-25] для уточнення деталей). Нехай $||\cdot||_B \equiv ||\cdot; B||$ – норма деякого простору $B$, $B^*$ – спряжений до $B$ простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ – скалярний добуток між $B^*$ та $B$, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярний добуток в деякому гільбертовому просторі $H$, $|\cdot|_H \equiv ||\cdot; H|| := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$. Перетин $B \cap Y$ простору $B$ і деякого простору $Y$ розглядатимемо з нормою

$$||v; B\cap Y|| := ||v||_B + ||v||_Y \quad \text{для} \quad v \in B \cap Y. \tag{2.7}$$

Нагадаємо, що $(B \cap Y)^* = B^* + Y^*$. Нехай $B^n := B \times \ldots \times B$ – декартовий степінь простору $B$, причому

$$||z; B^n|| := ||z_1||_B + \ldots + ||z_n||_B \quad \text{для} \quad z = col(z_1, \ldots, z_n) \in B^n. \tag{2.8}$$

Використовуватимемо таке позначення:

$$(z, v)_\Omega := \begin{cases} \int\limits_\Omega (z(x), v(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx, & \text{якщо} \quad z = col(u_1, \ldots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, \\ & \qquad\quad v = col(v_1, \ldots, v_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, \\ \int\limits_\Omega z(x) v(x)\, dx, & \text{якщо} \quad z, v : \Omega \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Візьмемо довільне $s \in \mathbb{N}$ та розглянемо стандартний простір Соболєва $[H^s(\Omega)]^n$ зі скалярним добутком

$$((u, v))_s := \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}, \quad u, v \in [H^s(\Omega)]^n. \tag{2.10}$$

Визначимо простори соленоїдальних функцій:

$$C_{\text{div}} := \{u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n \ \mid \ \operatorname{div} u = 0\}, \tag{2.11}$$

$$X_q \ \text{ – замикання } \ C_{\text{div}} \ \text{ в } \ [L^q(\Omega)]^n, \qquad H := X_2, \tag{2.12}$$

$$Z_s \ \text{ – замикання } \ C_{\text{div}} \ \text{ в } \ [H^s(\Omega)]^n, \tag{2.13}$$

за нормами

$$||h; X_q|| := ||h; [L^q(\Omega)]^n|| = \sum_{l=1}^n ||h_l; L^q(\Omega)||, \ h = col(h_1, \ldots, h_n) \in X_q,$$

та $||z; Z_s|| := \sqrt{((z, z))_s}$, $\ z = col(z_1, \ldots, z_n) \in Z_s$, відповідно.

Нехай $p \in [1, \infty]$, $X$ – банахів простір, $W^{0,p}(0, T; X) := L^p(0, T; X)$. Аналогічно як в працях [82, Розд. 3.6-3.8] та [39, Розд. 2.4] визначимо простір

$$W^{-1,p}(0, T; X) := \{f \in D^*(0, T; X) \ \mid \ f = f_0 + (f_1)_t,$$

$$f_0, f_1 \in L^p(0, T; X)\}. \tag{2.14}$$

Нехай $C_{weak}([0, T]; H)$ – множина слабко неперервних функцій $u : [0, T] \to H$,

$$V := Z_1 \cap [L^q(\Omega)]^n, \quad U(Q_{0,T}) := L^2(0, T; Z_1) \cap [L^q(Q_{0,T})]^n. \tag{2.15}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

**(A):** $A_{ij}$ – квадратні матриці $n$-го порядку з елемантами з $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij} = A_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$); майже для всіх (м.д.в.) $(x, t) \in Q_{0,T}$ і для всіх (д.в.) $\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathbb{R}^n$, виконуються оцінки

$$a_0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \le \sum_{i,j=1}^n \Big( A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j \Big)_{\mathbb{R}^n} \le a^0 \sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \quad (0 < a_0 \le a^0 < +\infty);$$

**(G):** $G$ – квадратна матриця $n$-го порядку, $G = diag(g_1, \dots, g_n)$, $g_l \in L^\infty(Q_{0,T})$ та $0 < g_0 \le g_l(x,t) \le g^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$, $l = \overline{1,n}$;

**(E):** $\mathfrak{Z}$ – квадратна матриця $n$-го порядку з елементами з $L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$;

**(F):** $F \in L^2(0,T;H)$;

**(U):** $u_0 \in H$.

Визначимо оператори $A(t) : Z_1 \to Z_1^*$, $\mathsf{A} : L^2(0,T;Z_1) \to L^2(0,T;Z_1^*)$, $N(t) : [L^q(\Omega)]^n \to [L^{q'}(\Omega)]^n$ ( $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ), $\mathsf{N} : [L^q(Q_{0,T})]^n \to [L^{q'}(Q_{0,T})]^n$, $E(t) : [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$ та $\mathsf{E} : [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$ за правилами

$$\langle A(t)z, w\rangle_{Z_1} := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \Big( A_{ij}(x,t) z_{x_i}(x), w_{x_j}(x) \Big)_{\mathbb{R}^n} dx, \ t \in (0,T), \ z, w \in Z_1, \tag{2.16}$$

$$\langle \mathsf{A}u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} := \int_0^T \langle A(t)u(t), v(t)\rangle_{Z_1} \, dt, \quad u, v \in L^2(0,T;Z_1), \tag{2.17}$$

$$(N(t)s)(x) := G(x,t)|s(x)|^{q-2}s(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad s \in [L^q(\Omega)]^n, \tag{2.18}$$

$$(\mathsf{N}r)(x,t) := G(x,t)|r(x,t)|^{q-2}r(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{0,T}, \ \ r \in [L^q(Q_{0,T})]^n, \tag{2.19}$$

$$(E(t)b)(x) := \int_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)b(y)\, dy, \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad b \in [L^2(\Omega)]^n, \tag{2.20}$$

$$(\mathsf{E}p)(x,t) := \big(E(t)p(t)\big)(x) =$$

$$= \int_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)p(y,t)\, dy, \ \ (x,t) \in Q_{0,T}, \ \ p \in [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{2.21}$$

Поряд з введеними, буде зручно користуватися операторами $S(t) : V \to V^*$ та $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$, які визначимо рівностями

$$\langle S(t)z, w\rangle_V := \langle A(t)z, w\rangle_{Z_1} +$$

$$+ (N(t)z, w)_\Omega + (E(t)z, w)_\Omega, \quad t \in (0,T), \quad z, w \in V, \tag{2.22}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[(\mathsf{N}u)(x,t)+(\mathsf{E}u)(x,t)\Big]v(x,t)\,dxdt,\quad u,v\in U(Q_{0,T}). \tag{2.23}$$

Для нормованих просторів $X$ та $Y$ запис $X\subset Y$ означає, що $X$ є підмножиною $Y$, позначення $X \circlearrowright Y$ означає неперервне вкладення, а $X \overline{\circlearrowright} Y$ – неперервне і щільне вкладення простору $X$ в простір $Y$.

Нехай

$$q>1,\quad s\in\mathbb{N},\quad s\geq\max\Big\{2,\ \frac{n}{2},\ n\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)\Big\},\quad h=\min\Big\{2,\frac{q}{q-1}\Big\}. \tag{2.24}$$

Зазначимо, що з (2.24) випливає, що $Z_s \overline{\circlearrowright} (Z_1\cap[L^q(\Omega)]^n)=V$.

**Означення 2.1.** *Пара функцій $\{u,\pi\}$ називається слабким (узагальненим) розв'язком задачі (2.2)-(2.6), якщо: $u\in U(Q_{0,T})\cap C([0,T];Z_s^*)$, $u_t\in[U(Q_{0,T})]^*$, $\pi\in W^{-1,h}(0,T;[L^h(\Omega)]^n)$;*

$$\langle u_t(t),v\rangle_V+\langle S(t)u(t),v\rangle_V=(F(t),v)_\Omega \tag{2.25}$$

*для $v\in V$ та $t\in(0,T)$; $u$ задовольняє умову (2.6) в просторі $Z_s^*$; $\pi$ задовольняє рівняння (2.2) в $D^*(Q_{0,T})$; $\pi$ задовольняє умову (2.4) в $D^*(0,T)$.*

**Теорема 2.1** (існування). *Нехай виконуються умови **(A)-(U)**. Тоді задача (2.2)-(2.6) має розв'язок – пару $\{u,\pi\}$. Крім того, $u\in C_{weak}([0,T];H)$.*

**Теорема 2.2** (єдиності). *Нехай виконуються умови **(A)-(E)**. Тоді задача (2.2)-(2.6) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

Щоб врахувати деякі аспекти пружності неньютонівських в'язких рідин, добре відомі класичні рівняння Нав'є-Стокса збурюють інтегральним доданком, який відповідає за пам'ять рідини (див. [96]). Задача для системи Нав'є-Стокса з інтегральним доданком пам'яті вигляду

$$u_t+\sum_{k=1}^n v_k v_{x_k}-\alpha\,\Delta u-\int\limits_0^t K_1(t,\tau)\Delta u\,d\tau-\int\limits_\Omega K_2(t,y)\Delta u\,dy+\nabla\pi=F,$$

де $\Delta u$ – лапласіан $u$, розглядається в [76] у таких випадках: 1) $K_2\equiv 0$; 2) $\alpha=0$ та $K_1\equiv 0$. Ми збурюємо класичні системи Стокса монотонним нелінійним доданком $\mathsf{N}u$ та лінійним інтегральним доданком $\mathsf{E}u$. Мішану задачу для системи такого вигляду раніше не вивчали.

2.1.1. *Допоміжні твердження: оператори проектування.* Введемо позначення та нагадаємо кілька фактів, які використовуватимемо далі.

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{V}$ – рефлексивний сепарабельний банахів простір, $\mathcal{V} \overset{-}{\circlearrowright} \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \overset{-}{\circlearrowright} \mathcal{V}^*$, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база простору $\mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксоване число і $\mathfrak{M}$ – множина всіх лінійних комбінацій елементів з $\{w^1,\dots,w^m\}$. Визначимо ортогональну проекцію $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ за правилом (див. [112, с. 527])

$$P_m h := \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_{\mathcal{H}}\, w^j, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{2.26}$$

Це лінійний самоспряжений неперервний оператор (див. Теорему 7.3.6 [112, с. 515]). Якщо $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, то визначимо оператор $\widehat{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ за правилом

$$\widehat{P}_m v := P_m v \quad \text{for every} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{2.27}$$

Для спряженого оператора $\widehat{P}_m^* : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ матимемо вкладення $\widehat{P}_m^*(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{V}$ (див. [40, с. 865]).

**Твердження 2.1.** *(Лема 3.9* [40, ст. 865-866]*). Припустимо, що $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база простору $\mathcal{H}$ така, що $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, $\psi_1^m,\dots,\psi_m^m \in \mathbb{R}$ – деякі числа і $F \in \mathcal{V}^*$. Тоді якщо елемент $z^m := \sum\limits_{s=1}^{m} \psi_s^m w^s \in \mathcal{V}$ задовольняє рівності*

$$\begin{cases} \langle z^m, w^1\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^1\rangle_{\mathcal{V}}, \\ \quad\vdots \\ \langle z^m, w^m\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^m\rangle_{\mathcal{V}}, \end{cases} \tag{2.28}$$

*то виконується така рівність в просторі $\mathcal{V}^*$:*

$$z^m = \widehat{P}_m^* F. \tag{2.29}$$

Припустимо, що $H$ та $Z_s$ визначені відповідно в (2.12) та (2.13), де $s \in \mathbb{N}$. З [86, Розд. 1, §6.1] отримуємо вкладення

$$Z_s \overset{-}{\circlearrowright} Z_1 \overset{-}{\circlearrowright} H \cong H^* \overset{-}{\circlearrowright} Z_1^* \overset{-}{\circlearrowright} Z_s^*.$$

Крім того, $Z_s \subset [H_0^s(\Omega)]^n$.

Нехай $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – множина всіх власних функцій задачі

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=s} (D^\alpha w^\mu, D^\alpha v)_{\mathbb{R}^n}\, dx = \lambda_\mu \int\limits_{\Omega} (w^\mu, v)_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad \forall\, v \in Z_s, \tag{2.30}$$

$\{\lambda_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\}$ – множина відповідних власних значень. Для зручності, припускаємо, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – ортонормована множина в $H$.

**Твердження 2.2.** *(див.* [86, Розд. 1, §6.3]*). Якщо $s \in \mathbb{N}$ та $s \geq \frac{n}{2}$, то множина $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ всіх власних функцій задачі (2.30) є базою в $Z_s$.*

Наступна лема потрібна нам далі.

**Лема 2.1.** *Припустимо, що $P_m$ та $\widehat{P}_m$ визначені відповідно в (2.26) і (2.27), де $\mathcal{H} = H$, $\mathcal{V} = Z_s$, $s \in \mathbb{N}$, $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база простору $H$, що складається з всіх власних функцій задачі (2.30). Тоді, для кожного $w \in L^r(0,T;Z_s^*)$ і $r > 1$, отримаємо нерівність*

$$||\widehat{P}_m^* w; L^r(0,T;Z_s^*)|| \leq ||w; L^r(0,T;Z_s^*)||. \tag{2.31}$$

*Доведення.* З [86, Розд. 1, §6.4.3] отримаємо, що

$$||\widehat{P}_m z||_{Z_s} \leq ||z||_{Z_s}, \quad z \in Z_s. \tag{2.32}$$

Оскільки, $||D^*||_{\mathcal{L}(B^*,A^*)} = ||D||_{\mathcal{L}(A,B)}$ для кожного $D \in \mathcal{L}(A,B)$, то використавши (2.32), отримаємо

$$||\widehat{P}_m^* v||_{Z_s^*} \leq ||v||_{Z_s^*}, \quad v \in Z_s^*. \tag{2.33}$$

Отже, $\int\limits_0^T ||\widehat{P}_m^* w(t)||_{Z_s^*}^r\,dt \leq \int\limits_0^T ||w(t)||_{Z_s^*}^r\,dt$ і виконується нерівність (2.31). □

2.1.2. *Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.* Нехай $d \in \mathbb{N}$, $Q = (0,T) \times \mathbb{R}^d$. Розглянемо задачу відшукання слабкого розв'язку $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ такої задачі Коші:

$$\varphi'(t) + L(t,\varphi(t)) = M(t), \quad t \in [0,T], \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{2.34}$$

де $L : Q \to \mathbb{R}^d$ та $M : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ – деякі функції (для зручності припускаємо, що $L(t,0) = 0$ для кожного $t \in [0,T]$), $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_d^0) \in \mathbb{R}^d$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $X$ – банахів простір, $W^{m,p}(0,T;X)$ – простір Соболєва-Бохнера (див. [59, с. 286]). Нагадаємо кілька понять.

**Означення 2.2.** *Вектор-функція $\varphi \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^n)$ називається глобальним слабким розв'язком задачі (2.34), якщо $\varphi$ задовольняє початкову умову ($2.34_2$) та задовольняє систему ($2.34_1$) м.д.в. $t \in (0,T)$.*

**Означення 2.3.** *Вектор-функція $L : Q \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Каратеодорі, якщо: д.в. $\zeta \in \mathbb{R}^n$ функція $(0,T) \ni t \mapsto L(t,\zeta) \in \mathbb{R}^n$ є вимірною; м.д.в. $t \in (0,T)$ функція $\mathbb{R}^n \ni \zeta \mapsto L(t,\zeta) \in \mathbb{R}^n$ є неперервною.*

**Означення 2.4** (див. [84], с. 241). *Вектор-функція* $L : Q \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє* $L^p$*-умову Каратеодорі, якщо вона задовольняє умову Каратеодорі та д.в.* $R > 0$ *існує функція* $h_R \in L^p(0,T)$ *така, що*

$$|L(t,\zeta)|_{\mathbb{R}^n} \le h_R(t) \tag{2.35}$$

*м.д.в.* $t \in (0,T)$ *та д.в.* $\zeta \in \overline{D_R} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \le R\}$.

**Твердження 2.3** (теорема Каратеодорі-Ласалля, див. [44] та теорему 3.24, [40], с. 872). *Нехай* $p \ge 2$, *функція* $L : Q \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє* $L^p$*-умову Каратеодорі,* $M \in L^p(0,T;\mathbb{R}^n)$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$. *Якщо існують невід'ємні функції* $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ *такі, що д.в.* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $t \in [0,T]$ *виконується нерівність*

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^n} \ge -\alpha(t)|\xi|^2 - \beta(t), \tag{2.36}$$

*то задача (2.34) має глобальний слабкий розв'язок* $\varphi \in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^n)$.

2.1.3. *Теореми про вкладення.* Наведемо твердження, якими ми користуватимемося в роботі. Нехай виконується позначення (2.14), $D(Q_{0,T}) := C_0^\infty(Q_{0,T})$ – класичний простір основних функцій (див. [50, с. 15]),

$$\mathcal{D} := [D(Q_{0,T})]^n. \tag{2.37}$$

Аналогічно як в [66, с. 7] визначимо множину

$$\mathcal{D}_{\mathrm{div}} := \{u \in [D(Q_{0,T})]^n \mid \operatorname{div} u = 0\}. \tag{2.38}$$

Зрозуміло, що простір соленоїдальних основних функцій $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ є підмножиною $\mathcal{D}$. Простори лінійних неперервних функціоналів над просторами (2.37) та (2.38) позначимо $\mathcal{D}^*$ та $\mathcal{D}^*_{\mathrm{div}}$ відповідно.

Наступне узагальнення класичної теореми де Рама можна знайти, наприклад, у теоремі 4.1 [82], зауваженні 4.3 [82] та лемі 2 [107]). Для зручності ми називатимемо це твердження узагальненою теоремою де Рама.

**Твердження 2.4.** *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– обмежена область з ліпшицевою межею,* $\mathbb{Z}_{\ge -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \ge -1\}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\ge -1}$, $h_1, h_2 \in [1,\infty]$, $\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)$. *Тоді якщо*

$$\mathcal{F} = 0 \quad \text{в просторі} \quad \mathcal{D}^*_{\mathrm{div}}, \tag{2.39}$$

*то існує єдиний елемент* $\pi \in W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega))$ *такий, що*

$$\mathcal{F} = \nabla\pi \quad \text{в просторі} \quad \mathcal{D}^*, \tag{2.40}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x, \cdot)\, dx = 0 \quad \textit{в просторі} \quad D^*(0,T). \tag{2.41}$$

*Крім того, існує незалежна від* $\mathcal{F}$ *та* $\pi$ *стала* $C_1 > 0$ *така, що*

$$||\pi; W^{s_1,h_1}(0,T; W^{s_2+1,h_2}(\Omega))|| \le C_1 ||\mathcal{F}; W^{s_1,h_1}(0,T; [W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)||. \tag{2.42}$$

Наступний важливий результат стосується теорем про компактні вкладення. Нехай для нормованих просторів $X$ та $Y$ позначення $X \overset{K}{\subset} Y$ означає компактне вкладення $X$ в простір $Y$. Слідуюче узагальнення класичної теореми Релліха-Кондрашова можна знайти, наприклад, у [25] та [26, с. 393]. Його прийнято називати теоремою Обена.

**Твердження 2.5.** *Якщо* $s, h \in (1, \infty)$ *– фіксовані числа,* $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ *– такі банахові простори, що* $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ *то*

$$\Big\{ u \in L^s(0,T; \mathcal{W}) \ \mid \ u_t \in L^h(0,T; \mathcal{B}) \Big\} \overset{K}{\subset} \Big[ L^s(0,T; \mathcal{L}) \cap C([0,T]; \mathcal{B}) \Big].$$

Наведемо ще таке твердження.

**Твердження 2.6** (твердження 2.6 [87], с. 307)**.** *Якщо* $X, Y$ *– деякі банахові простори,* $X$ *– рефлексивний простір,* $X \circlearrowleft Y$, *то виконується рівність* $C_{weak}([0,T]; Y) \cap L^\infty(0,T; X) = C_{weak}([0,T]; X)$.

2.1.4. *Допоміжні інтегральні оцінки.* Перш за все зауважимо, що якщо $u = col(u_1, \ldots, u_n) \in [L^2(\mathcal{O})]^n$ для $\mathcal{O} = \Omega$ чи $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, то

$$||\,|u|; L^2(\mathcal{O})||^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} |u|^2\, dy = \sum_{l=1}^{n} ||u_l; L^2(\mathcal{O})||^2 \le n||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||^2, \tag{2.43}$$

а тому

$$||\,|u|; L^2(\mathcal{O})|| \le \sqrt{n}||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||. \tag{2.44}$$

**Лема 2.2.** *Якщо виконується умова **(E)**, то* $\mathsf{E} : [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$ *та* $E(t) : [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$ *є лінійними, обмеженими і неперервними операторами, де* $t \in (0,T)$. *Крім того, існує така стала* $E^0 > 0$, *що д.в.* $z \in [L^2(\Omega)]^n$, $t \in (0,T)$, $u \in [L^2(Q_{0,T})]^n$ *та* $\tau \in (0,T]$, *виконуються оцінки*

$$||\,|E(t)z|; L^2(\Omega)|| \le E^0||\,|z|; L^2(\Omega)|| \le \sqrt{n}E^0||z; [L^2(\Omega)]^n||; \tag{2.45}$$

$$||\,|\mathsf{E}u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \le E^0||\,|u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \le \sqrt{n}E^0||u; [L^2(Q_{0,\tau})]^n||. \tag{2.46}$$

*Доведення.* З нерівності Коші-Буняковського і умови **(E)** випливає, що

$$\|\,|E(t)z|;L^2(\Omega)\|^2=\int\limits_\Omega |(E(t)z)(x)|^2\,dx=\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)\,dy\Big|^2\,dx\le$$

$$\le\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_\Omega \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n\cdot|z(y)|\,dy\Big|^2\,dx\le$$

$$\le\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n^2\,dy\Big)\Big(\int\limits_\Omega |z(y)|^2\,dy\Big)\,dx\le$$

$$\le|E^0|^2\int\limits_\Omega |z(y)|^2\,dy=|E^0|^2\|\,|z|;L^2(\Omega)\|^2,$$

де

$$E^0=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\Big(\int\limits_\Omega dx\int\limits_\Omega \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n^2\,dy\Big)^{1/2},$$

$\|\cdot\|_n$ – норма квадратної матриці порядку $n$. Таким чином, використавши (2.44) отримаємо (2.45). Оцінку (2.46) доводимо аналогічно. Вкінці замість $E^0$ беремо сталу, яка дорівнює максимуму з отриманих при доведенні відповідних сталих. □

**Лема 2.3.** *Нехай виконуються умови **(A)-(E)**, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset V$, $m\in\mathbb{N}$, $S(t)$ взято з (2.22), $z^m(x)=\sum\limits_{\mu=1}^m \xi_\mu w^\mu(x)$ для $x\in\Omega$ та $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$,*

$$L=(L_1,L_2,\dots,L_m), \tag{2.47}$$

$$L_\mu(t,\xi)=\langle S(t)z^m,w^\mu\rangle_V,\quad \mu=\overline{1,m},\quad t\in(0,T),\quad \xi\in\mathbb{R}^m. \tag{2.48}$$

*Тоді виконується оцінка*

$$\Big(L(t,\xi),\xi\Big)_{\mathbb{R}^m}\ge$$

$$\ge\int\limits_\Omega\Big[a_0\sum_{i=1}^n|z^m_{x_i}|^2+g_0|z^m|^q-E^0|z^m|^2\Big]\,dx,\quad t\in(0,T),\quad \xi\in\mathbb{R}^m. \tag{2.49}$$

*Доведення.* Очевидно, що

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m}=\langle S(t)z^m,z^m\rangle_V. \tag{2.50}$$

Якщо використати умови **(A)** і **(G)**, то з (2.16) та (2.18) отримаємо

$$\langle A(t)z^m,z^m\rangle_V+(N(t)z^m,z^m)_\Omega=\int\limits_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(x,t)z^m_{x_i}(x),z^m_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+\Big(G(x,t)|z^m(x)|^{q-2}z^m(x),z^m(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega}\Big[a_0\sum_{i=1}^{n}|z^m_{x_i}|^2+g_0|z^m|^q\Big]\,dx. \tag{2.51}$$

Використавши (2.45), з (2.20) отримаємо, що

$$\Big|(E(t)z^m,z^m)_\Omega\Big| = \Big|\int\limits_{\Omega}(E(t)z^m,z^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\Big| \leq \int\limits_{\Omega}|E(t)z^m|\cdot|z^m|\,dx \leq$$

$$\leq ||\;|Ez^m|;L^2(\Omega)||\cdot||\;|z^m|;L^2(\Omega)|| \leq$$

$$\leq E^0||\;|z^m|;L^2(\Omega)||^2 = E^0\int\limits_{\Omega}|z^m|^2\,dx. \tag{2.52}$$

Отже, з (2.50)-(2.52) випливає, що (2.49) виконується. □

На завершення цього пункту наведемо ще такі відомі твердження.

**Твердження 2.7.** *(Лема 1.18* [65, с. 39]*). Якщо* $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ *сильно в* $L^p(Q_{0,T})$ $(1\leq p\leq\infty)$*, то існує підпослідовність (позначимо її знову через* $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$*) така, що* $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ *майже скрізь в* $Q_{0,T}$*.*

**Твердження 2.8.** *(узагальнена лема Гронуола-Белмана). Якщо функція* $y\in L^1(0,T)$ *задовольняє нерівність*

$$y(\tau)\leq C+K(\tau)+L\int\limits_0^\tau y(t)\,dt,\quad \tau\in[0,T], \tag{2.53}$$

*з деякими сталими* $C\geq 0$ *та* $L>0$ *і деякою функцією* $K(\tau)=\int_0^\tau b(t)\,dt$*,* $\tau\in[0,T]$*, де* $b\in L^1(0,T)$*, то виконується оцінка*

$$y(\tau)\leq\Big(C+K(\tau)\Big)e^{L\tau},\quad \tau\in[0,T], \tag{2.54}$$

2.1.5. *Доведення основних результатів.* Перейдемо до основних доведень.

*Доведення Теореми 2.1.* Розв'язок будемо будувати за допомогою методу Фаедо-Гальоркіна.

Крок 1 (побудова наближень). Нехай простір $Z_s$ і набір функцій $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ взято з Твердження 2.2, $s\in\mathbb{N}$ задовольняє (2.24),

$$u^m(x,t):=\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^m_\mu(t)w^\mu(x),\quad (x,t)\in Q_{0,T},\quad m\in\mathbb{N},$$

де вектор-функція $\varphi := (\varphi_1^m, \dots, \varphi_m^m)$ задовольняє

$$(u_t^m(t), w^\mu)_\Omega + \langle S(t)u^m(t), w^\mu\rangle_V = (F(t), w^\mu)_\Omega, \quad t \in (0,T), \quad \mu = \overline{1,m}, \quad (2.55)$$

$$\varphi_1^m(0) = \alpha_1^m, \quad \dots, \quad \varphi_m^m(0) = \alpha_m^m. \quad (2.56)$$

Тут оператор $S(t)$ взято з (2.22), числа $\alpha_1^m, \dots, \alpha_m^m \in \mathbb{R}$ вибираємо так, щоб $u_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0$ сильно в $H$, де $u_0^m(x) := \sum\limits_{j=1}^m \alpha_j^m w^j(x), \quad x \in \Omega$. Очевидно, що виконується умова

$$u^m(0) = u_0^m. \quad (2.57)$$

Покажемо, що згадана функція $\varphi$ існує. Нехай $L$ – вектор-функція з (2.47)-(2.48). Тоді, задача Коші (2.55)-(2.56) отримає вигляд (2.34) якщо,

$$M(t) = (\,(F(t), w^1)_\Omega, \dots, (F(t), w^m)_\Omega), \quad t \in (0,T). \quad (2.58)$$

З умови **(F)** випливає, що $M \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. З умов **(A)-(E)** слідує, що функція $L$ задовольняє $L^\infty$-умову Каратеодорі.

Використовуючи оцінку (2.49), умови $a_0 > 0$ і $g_0 > 0$, ортогональність бази $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ в $H$, отримаємо:

$$\Big(L(t,\varphi^m), \varphi^m\Big)_{\mathbb{R}^m} \geq -E^0 \int\limits_{\Omega_t} |u^m|^2\,dx = -E^0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{\mu=1}^m |\varphi_\mu^m|^2 |w^\mu|^2\,dx \geq -C_2|\varphi^m|^2,$$

де $C_2 > 0$ не залежить від $t, \varphi^m$. Тоді оцінка (2.36) з $\alpha(t) \equiv C_2$ і $\beta(t) \equiv 0$ виконується, а з теореми Каратеодорі-Ласалля (див. Твердження 2.3) отримаємо, що $\varphi \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m) \equiv W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^m)$ – розв'язок задачі (2.34), а тому і задачі (2.55)-(2.56).

<u>Крок 2</u> (отримання оцінок). Помноживши $\mu$-ту рівність з (2.55) на $\varphi_\mu^m(t)$ та підсумувавши за $\mu = \overline{1,m}$, отримаємо:

$$\sum_{\mu=1}^m \Big(u_t^m(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega + \sum_{\mu=1}^m \langle S(t)u^m(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\rangle_V =$$

$$= \sum_{\mu=1}^m \Big(F(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega, \quad t \in (0,T).$$

Після інтегрування за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ і певних перетворень, отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_t^m, u^m)_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij} u_{x_i}^m, u_{x_j}^m)_{\mathbb{R}^n} + (G|u^m|^{q-2}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+\,(\mathsf{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F, u^m)_{\mathbb{R}^n}\,dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.59}$$

Очевидно, використавши (2.57), отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^m_t, u^m)_{\mathbb{R}^n}\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|u^m|^2)\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m_0|^2\,dx. \tag{2.60}$$

Використавши умову **(A)**, отримаємо наступну оцінку:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}u^m_{x_i}, u^m_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n} \geq a_0\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2. \tag{2.61}$$

З умови **(G)** випливає, що

$$\Big(G|u^m|^{q-2}u^m, u^m\Big)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{l=1}^{n} g_l(x,t)|u^m|^{q-2}|u^m_l|^2 \geq$$

$$\geq g_0\sum_{l=1}^{n}|u^m|^{q-2}|u^m_l|^2 = g_0|u^m|^q. \tag{2.62}$$

Використавши нерівність Коші-Буняковського і (2.46), отримаємо:

$$\Big|\int\limits_{Q_{0,\tau}} (\mathsf{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\,dxdt\Big| \leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\mathsf{E}u^m|\cdot|u^m|\,dxdt \leq$$

$$\leq ||\,|\mathsf{E}u^m|; L^2(Q_{0,\tau})||\cdot||\,|u^m|; L^2(Q_{0,\tau})|| \leq$$

$$\leq E^0||\,|u^m|; L^2(Q_{0,\tau})||^2 = E^0\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^2\,dxdt. \tag{2.63}$$

Очевидно, що

$$|(F, u^m)_{\mathbb{R}^n}| \leq |F|\cdot|u^m| \leq \frac{|F|^2}{2} + \frac{|u^m|^2}{2}. \tag{2.64}$$

Використавши (2.60)-(2.64), з рівності (2.59) отримаємо наступну оцінку:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[a_0\sum_{l=1}^{n}|u^m_{x_l}|^2 + g_0|u^m|^q\Big]\,dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F|^2\,dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big(\frac{1}{2} + E^0\Big)|u^m|^2\,dxdt. \tag{2.65}$$

Візьмемо $y(t) := \int\limits_{\Omega} |u^m(x,t)|^2\, dx, \quad t \in [0,T]$. Тоді, з (2.65) отримаємо:

$$\frac{1}{2}\, y(\tau) \leq C_3 + \left(\frac{1}{2} + E^0\right) \int\limits_0^\tau y(t)\, dt, \quad \tau \in [0,T].$$

Тому, з узагальненої леми Гронуола-Белмана (твердження 2.8) випливає, що $y(\tau) \leq C_4$ , а отже

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx \leq C_4, \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.66}$$

З (2.65) і (2.66) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^n |u^m_{x_i}|^2 + |u|^2 + |u|^q\Big]\, dxdt \leq C_5, \quad \tau \in (0,T], \tag{2.67}$$

З цієї оцінки випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|G|u^m|^{q-2}u^m\Big|^{q'}\, dxdt \leq C_6 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^q\, dxdt \leq C_7. \tag{2.68}$$

З (2.46), (2.66), і (2.67) випливають оцінки:

$$||u^m; L^\infty(0,T,H)|| + ||u^m; U(Q_{0,T})|| \leq C_8, \tag{2.69}$$

$$||\mathsf{E}u^m; L^2(0,T;H)|| \leq C_9, \qquad ||\mathsf{E}u^m; [L^2(Q_{0,T})]^n|| \leq C_8, \tag{2.70}$$

Тут сталі $C_3, \ldots, C_8$ не залежать від $m$ .

З (2.68)-(2.70) випливає існування підпослідовності $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ такої що,

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *-\text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{і слабко в} \quad U(Q_{0,T}), \tag{2.71}$$

$$G|u^m|^{q-2}u^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad [L^{q'}(Q_{0,T})]^n, \tag{2.72}$$

$$\mathsf{E}u^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2 \quad \text{слабко в} \quad [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{2.73}$$

Крок 3 (додаткові оцінки). Оскільки, $s$ задовольняє (2.24), з побудови простору $U(Q_{0,T})$ отримаємо:

$$U(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowright} L^2(0,T;H) \overline{\circlearrowright} [U(Q_{0,T})]^*, \tag{2.74}$$

$$L^{\max\{2,q\}}(0,T;Z_s) \overline{\circlearrowright} L^{\max\{2,q\}}(0,T;V) \overline{\circlearrowright} U(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowright} L^{\min\{2,q\}}(0,T;V). \tag{2.75}$$

Тому

$$[U(Q_{0,T})]^* \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} L^r(0,T;V^*) \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} L^r(0,T;Z_s^*), \tag{2.76}$$

де

$$r := \frac{\max\{2,q\}}{\max\{2,q\}-1}. \tag{2.77}$$

Використавши (2.75) і (2.69), отримаємо

$$||u^m; L^{\min\{2,q\}}(0,T;V)|| \le C_{10}||u; U(Q_{0,T})|| \le C_{11}. \tag{2.78}$$

З оцінок (2.67) та (2.70) випливає нерівність

$$||\mathsf{S}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le C_{12}, \tag{2.79}$$

де оператор $\mathsf{S}$ взято з (2.23), стала $C_{12}$ не залежать від $m$.

Використавши Твердження 2.1, позначення (2.16)-(2.22), (2.26) і (2.27), в такий ж спосіб, як і у [86, Розд. 1, §5.3], перепишимо (2.55) у вигляді

$$u_t^m = \widehat{P}_m^*(F - \mathsf{S}u^m). \tag{2.80}$$

Таким чином, з (2.80), оцінки (2.31), вкладень (2.76) і (2.74), і оцінки (2.79) отримаємо:

$$||u_t^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(F - \mathsf{S}u^m); L^r(0,T;Z_s^*)|| \le$$

$$\le ||F - \mathsf{S}u^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| \le C_{13}||F - \mathsf{S}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le$$

$$\le C_{14}\Big(||F; L^2(0,T;H)|| + ||\mathsf{S}u^m; [U(Q_{0,T})]^*||\Big) \le C_{15}, \tag{2.81}$$

де стала $C_{15} > 0$ не залежить від $m$.

Оскільки, $V \overset{K}{\subset} H \circlearrowleft Z_s^*$, то з (2.78), (2.81), теореми Обена (див. Твердження 2.5), і Твердження 2.7 отримаємо:

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad L^{\min\{2,q\}}(0,T;H) \cap C([0,T];Z_s^*), \tag{2.82}$$

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже скрізь} \quad Q_{0,T}. \tag{2.83}$$

Тому, (2.6) виконується і $\chi_1 = G|u|^{q-2}u$ (див. (2.72)). Оскільки $\mathsf{E}$ – лінійний оператор, то $\chi_2 = \mathsf{E}u$ (див. (2.73)). Використавши (2.69), (2.82) і Твердження 2.6 отримаємо, що $u \in C_{weak}([0,T];H)$.

<u>Крок 4</u> (перехід до границь). Візьмемо $\psi \in C^1([0,T])$ таке, щоб $\psi(T)=0$. Коли ми помножимо рівність (2.55) на $\psi(t)$, проінтегруємо по $t \in (0,T)$, і перший доданок проінтегруємо частинами, то отримаємо наступне:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\Big(u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi_t + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}u^m_{x_i}, w^\mu_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi + \Big(G|u^m|^{q-2}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi +$$

$$+\Big(\mathsf{E}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\Big]dxdt = \int\limits_{\Omega}\Big(u_0^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi(0)\,dx + \int\limits_{Q_{0,T}}\Big(F, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\,dxdt.$$

Взявши $m=m_k$ і спрямувавши $k \to \infty$, завдяки довільності функції $\psi$, та того, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – база в просторі $V$, отримаємо (2.25) і

$$\langle \mathcal{F}, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, z \in U(Q_{0,T}), \tag{2.84}$$

де $\mathcal{F} := F - u_t - \mathsf{S}u$. Отже, $u_t \in [U(Q_{0,T})]^*$. Взявши $z(x,t) = w(x)\varphi(t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, з (2.84) отримаємо (2.39). Очевидно, що (див. (2.14))

$$\mathcal{F} \in W^{-1,2}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) + L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q}{q-1}}(Q_{0,T})]^n \subset$$

$$\subset W^{-1,h}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n),$$

де $h$ взяте з (2.24). Тоді, з узагальненої теореми де Рама (див. Твердження 2.4) випливає, що існує $\pi \in W^{-1,h}(0,T;W^{0,h}(\Omega)) = W^{-1,h}(0,T;[L^h(\Omega)]^n)$ таке, що (2.40)-(2.42) виконуються. Отже, $\pi$ задовольняє (2.2) в $\mathcal{D}^*$ і (2.4) в $D^*(0,T)$. Теорему 2.1 доведено. $\square$

*Доведення Теореми 2.2.* Нехай $\{u_1,\pi_1\}$ і $\{u_2,\pi_2\}$ – слабкі розв'язки задачі (2.2)-(2.6). Позначимо $u := u_1 - u_2$. Запишемо (2.25) для $u_1$:

$$\langle u_{1\,t}(t), v\rangle_V + \langle S(t)u_1(t), v\rangle_V = (F(t),v)_\Omega. \tag{2.85}$$

Запишемо (2.25) для $u_2$:

$$\langle u_{2\,t}(t), v\rangle_V + \langle S(t)u_2(t), v\rangle_V = (F(t),v)_\Omega. \tag{2.86}$$

Віднявши (2.86) від (2.85), взявши $v = u(t)$, і проінтегрувавши за змінною $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$, отримаємо:

$$\int\limits_0^\tau \Big[\langle u_t(t), u(t)\rangle_V + \langle S(t)u_1(t) - S(t)u_2(t), u_1(t)-u_2(t)\rangle_V\Big]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau (F(t),v)_\Omega\,dt, \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши формулу інтегрування частинами типу (1.44), після певних перетворень (див. (2.65)), з цієї рівності отримаємо:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + (G|u_1|^{q-2}u_1 - G|u_2|^{q-2}u_2, u_1 - u_2)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt \leq$$
$$\leq C_{16} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u|^2\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.87}$$

Нехай $y(\tau) := \int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2\, dx,\ \tau \in (0,T]$. Тоді, з (2.87) випливає, що

$$\frac{1}{2} y(\tau) \leq C_{16} \int\limits_0^\tau y(t)\, dt, \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (твердження 2.8), бачимо, що $y(\tau) \leq 0$ для $\tau \in [0,T]$, а отже, $u_1 = u_2$.

Далі проробимо стандартні перетворення (див., наприклад, [108, с. 200-201]). Оскільки $\{u_1, \pi_1\}$ та $\{u_2, \pi_2\}$ задовольняють (2.2) в $D^*(Q_{0,T})$, то

$$(u_1 - u_2)_t + \mathsf{S}u_1 - \mathsf{S}u_2 + \nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0.$$

Тоді, з рівності $u_1 = u_2$ випливає, що $\nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0$ в сенсі простору $\mathcal{D}^*$. Тому $\pi_1(t) - \pi_2(t) = c(t)$ для майже всіх $t \in (0,T)$, і, аналогічно як в [108, с. 200], використавши умову (2.4), матимемо $c = 0$. Отже, $\pi_1 = \pi_2$ і Теорему 2.2 доведено. $\square$

*Висновки до підрозділу 2.1.* У цьому підрозділі розглянуто нелінійну інтегро-диференціальну параболічну систему Стокса зі сталими показниками нелінійності. Вона розширює класичні лінійні рівняння Стокса за рахунок нелінійного монотонного доданку затухання $G(x,t)|u|^{q-2}u$ та нелокального оператора пам'яті, який визначено через $\int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\, dy$.

Основною метою роботи є доведення існування та єдиності слабкого розв'язку відповідної початково-граничної задачі. Результати підрозділу опубліковано у [1] та додатково висвітлено у [4], [5].

2.2. **Основи стохастичного інтегрування та диференціювання.** Системи рівнянь з частинними похідними типу (2.1) описують багато природних явищ. Проте часто чинники, які впливають на конкретне явище, мають випадковий характер. У цьому випадку одним зі способів запису математичної моделі досліджуваного процесу є заміна системи (2.1) на систему

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{Y}u + \nabla\pi = F + b_t, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \tag{2.88}$$

Вираз $b_t$ є, так званим, білим шумом. Він якраз і відповідає за вплив випадкових чинників. Щоб дати означення білого шуму та пояснити, в якому сенсі трактуються рівності (2.88), введемо спершу необхідні позначення.

2.2.1. *Банахові простори випадкових величин.* Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, зокрема, $\mathbb{S}$ – простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – $\sigma$-алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Також вживатимемо позначення (1.9).

**Означення 2.5.** *Вимірне стосовно $\sigma$-алгебри $\mathcal{F}$ (див.* [74, с. 79]*) відображення $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ називатимемо F-вимірною функцією. Така функція $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \mathbb{S}$, називається випадковою величиною (в.в.), $\omega \in \mathbb{S}$ називається випадковою змінною, або елементарною подією.*

Абсолютно неперервна в.в. $\xi$ повністю характеризується своєю *щільністю розподілу*, яку ми позначимо $f_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Нагадаємо, що в цьому випадку інтеграл за мірою $\mathbb{P}$ вигляду

$$\mathbb{E}\,\xi := \int\limits_{\mathbb{S}} \xi(\omega)\,\mathbb{P}\,(d\omega) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} x\, f_\xi(x)\, dx$$

називається *математичним сподіванням* в.в. $\xi$ (якщо інтеграли існують).

Нехай $q \geq 1$ – деяке число. *Випадковим простором Лебега* $L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ назвемо множину всіх випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом $q$-го порядку, тобто

$$L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \Big\{ \xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R} \;\Big|\; 1)\ \xi \text{ – вимірна щодо } \mathcal{F} \text{ функція,}$$

$$2)\ \mathbb{E}\left[|\xi|^q\right] < +\infty, \quad \text{тобто} \quad \int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q\,\mathbb{P}\,(d\omega) < +\infty \Big\}. \tag{2.89}$$

Замість позначення $L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ часто пишуть $L_q(\mathbb{S})$ чи просто $L_q$. Ототожнимо випадкові величини $\xi_1$ та $\xi_2$ як елементи простору $L_q$ у випадку, якщо $\mathbb{P}\{\omega \in \mathbb{S} \mid \xi_1(\omega) \neq \xi_2(\omega)\} = 0$ (писатимемо при цьому $\xi_1 = \xi_2$ майже напевно (м.н.)). Відомим є такий факт.

**Твердження 2.9.** *Множина функцій $L_q$, $1 \leq q < +\infty$, з (2.89) є банаховим простором стосовно норми*

$$||u||_{L_q} := \Big(\mathbb{E}\left[|\xi|^q\right]\Big)^{1/q} \equiv \Big(\int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q \, \mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/q}.$$

*Крім того, $L_p \bar{\circlearrowright} L_q$ при $p \geq q$. При $q = 2$ простір $L_2$ є гільбертовим зі скалярним добутком $(\xi, \eta)_{L_2} := \mathbb{E}\,[\xi\eta]$.*

Послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ збігається до в.в. $\xi$ *в середньому квадратичному*, якщо вона збігається до $\xi$ в сенсі простору $L_2$, тобто якщо $||\xi_k - \xi||_{L_2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При цьому пишуть $\xi = \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_k$ (limit in mean).

Нехай $T > 0$ та $d \in \mathbb{N}$ – числа, $\mathcal{B}(0,T)$ – борелівські підмножини $[0,T]$,

$$\mathcal{P} := \mathcal{B}(0,T) \times \mathcal{F} \tag{2.90}$$

– найменша $\sigma$-алгебра, що містить множини вигляду $B \times F$, де $B \in \mathcal{B}(0,T)$ та $F \in \mathcal{F}$.

**Означення 2.6.** *Вимірне стосовно $\mathcal{P}$ відображення*

$$\Theta_{0,T} \ni (t,\omega) \mapsto z(t,\omega) \in \mathbb{R}^n \tag{2.91}$$

*називатимемо BF-вимірною функцією.*

**Лема 2.4.** *Якщо функція $z$ з формули (2.91) є*

*(i) неперервною за $t \in [0,T]$ для $\mathbb{P}$-майже всіх фіксованих $\omega \in \mathbb{S}$,*

*(ii) вимірною за $\omega \in \mathbb{S}$ для всіх фіксованих $t \in [0,T]$,*

*то вона є BF-вимірною.*

*Доведення.* Для спрощення записів проведемо доведення леми у випадку $d = 1$ та $T = 1$. Для доведення достатньо побудувати послідовність $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ BF-вимірних функції, яка поточково збігається до функції $z$ з (2.91).

Через $int(y)$ позначатимемо цілу частину числа $y \in \mathbb{R}$. Для $t \in [0,1]$ та $y \in \mathbb{R}$ через $F_y^t$ позначимо прообраз променя $(-\infty, y)$ при відображенні $\mathbb{S} \ni \omega \mapsto z(t,\omega) \in \mathbb{R}$. З припущення (ii) випливає, що $F_y^t \in \mathcal{F}$.

Нехай $z_k(t,\omega) := z(\frac{int(kt)}{k}, \omega)$, $t \in [0,1]$, $\omega \in \mathbb{S}$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки правильні оцінки $\frac{y-1}{y} \leq \frac{int(y)}{y} \leq \frac{y+1}{y}$, то $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{int(y)}{y} = 1$, і тому з припущення (i) для всіх $t \in [0,1]$ та $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$ матимемо, що $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k(t,\omega) = z(t,\omega)$.

Для завершення доведення залишилося лише показати BF-вимірність кожного $z_k$. Цей факт випливає з таких очевидних міркувань.

$$z_k(t,\omega) = \begin{cases} z(0,\omega), & t \in [0, \frac{1}{k}), \\ z(\frac{1}{k},\omega), & t \in [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \\ \vdots & \\ z(\frac{k-1}{k},\omega), & t \in [\frac{k-1}{k}, 1), \\ z(1,\omega), & t = 1. \end{cases} \qquad \omega \in \mathbb{S}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Крім того, прообраз променя $(-\infty, y)$ має вигляд

$$z_k^{-1}\Big((-\infty,y)\Big) = \Big(\bigcup_{i=0}^{k-1}\Big[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\Big) \times F_y^{i/k}\Big) \cup \Big(\{t=1\} \times F_y^1\Big).$$

Ця множина належить до $\mathcal{P}$ як скінченне об'єднання множин з $\mathcal{P}$. $\square$

Поряд з узагальненим (звичайним у випадку сталого показника інтегровності) простором Лебега (1.24) та випадковим простором Лебега (2.89) розглянемо їх поєднання. Нехай $q \in B_+((0,T))$, $q_0 > 1$ (див. (1.19) та (1.21)). *Узагальненим випадковим простором Лебега* $L_{q(t)}(\Theta_{0,T})$ назвемо множину

$$L_{q(t)}(\Theta_{0,T}) := \Big\{ z : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R} \ \Big| \ 1) \ z \text{ є BF-вимірною функцією},$$

$$2) \ \rho_q(z;\Theta_{0,T}) := \int_0^T \int_{\mathbb{S}} |z(t,\omega)|^{q(t)}\, \mathbb{P}\,(d\omega)\, dt < +\infty \Big\}, \tag{2.92}$$

на якій введено відповідну норму Люксембурга типу (1.25).

Зрозуміло, що введені поняття можна узагальнити на функції трьох і більше змінних. Нам буде зручно користуватися таким позначенням: нехай $\mathcal{B}(\Omega)$ – борелівські підмножини $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{K} := \mathcal{B}(\Omega) \times \mathcal{P} \tag{2.93}$$

– найменша $\sigma$-алгебра, яка містить всі множини вигляду $B \times K$, де $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, $K \in \mathcal{P}$.

**Означення 2.7.** *Вимірне стосовно* $\mathcal{K}$ *відображення*

$$\Pi_{0,T} \ni (x,t,\omega) \mapsto \widetilde{u}(x,t,\omega) \in \mathbb{R}^n \tag{2.94}$$

*називатимемо BBF-вимірною функцією.*

Наприкінці підрозділу нагадаємо ще таке корисне твердження.

**Твердження 2.10** (теорема 1 [74], с. 114)**.** *Якщо функція $f$ є вимірною, функція $g$ є інтегровною і виконується нерівність $|f| \le g$, то функція $f$ є інтегровною.*

2.2.2. *Випадкові процеси та їхні властивості.* Нагадаємо таке поняття. *Випадковим процесом (далі – в.п.)* називають функцію $\xi = \xi(t, \omega)$ двох змінних $t \in [0, T]$, $\omega \in \mathbb{S}$. При цьому змінну $\omega \in \mathbb{S}$ часто називають *випадковою змінною*, а змінну $t \in (0, T)$ – *детермінованою (невипадковою) змінною.*

Ми, переважно, матимемо справу з *вінерівським процесом*, означення якого наведемо для зручності (див. [20, с. 37] та [60, с. 38]).

**Означення 2.8.** *В.п. $W = W(t, \omega)$ називається вінерівським процесом, якщо*

*1w) $W(0, \omega) = 0$ м.н.;*

*2w) для довільних $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ випадкові величини*

$$W(t_1), \quad W(t_2) - W(t_1), \quad W(t_3) - W(t_2), \quad ..., W(t_k) - W(t_{k-1})$$

*є незалежними в сукупності;*

*3w) для всіх $t > s \ge 0$ випадкова величина $W(t) - W(s)$ є нормальною класу $N(0, t - s)$, тобто, має PDF вигляду*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - s)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.95}$$

**Лема 2.5.** *Вінерівський процес $W(t, \omega)$, $(t, \omega) \in \Theta_{0,T}$, є BF-вимірною функцією та належить до простору $C([0, T]; L_p)$ для довільного $p \in [1, +\infty)$.*

*Доведення.* За означенням $W$ є вимірною функцією за змінною $\omega$. З [60, с. 51] випливає, що вінерівський процес є неперервним за $t \in [0, T]$. Тому з леми 2.4 зразу матимемо його BF-вимірність.

Подальше доведення леми у випадку $p = 2$ зроблено у лемі 13 [15] (див. також [27, с. 212]). Для $p \ge 1$ матимемо таке. Нехай $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$. Тоді $W(t_2) - W(t_1) \in N(0, t_2 - t_1)$. З вигляду (2.95) щільності цієї в.в. та означення математичного сподівання отримаємо, що

$$I := \mathbb{E}\left[|W(t_2) - W(t_1)|^p\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^p f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^p\, e^{-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}}}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}\, dx.$$

Зробивши заміну $x \rightsquigarrow y$, де $x = \sqrt{2(t_2-t_1)}y$ (тоді $dx = \sqrt{2(t_2-t_1)}\ dy$), матимемо:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sqrt{2(t_2-t_1)}\Big)^p |y|^p\, e^{-y^2} \sqrt{2(t_2-t_1)}\ dy =$$

$$= \frac{2^{p/2}(t_2-t_1)^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^p\, e^{-y^2}\ dy = C_1(p)(t_2-t_1)^{p/2}.$$

Тому $||W(t_2)-W(t_1)||_{L_p} \le \sqrt{C_1(p)}(t_2-t_1)^{1/2}$ і лему повністю доведено. $\Box$

**Лема 2.6.** *Вінерівський процес* $W$ *належить до узагальненого випадкового простору Лебега* $L_{q(t)}(\Theta_{0,T})$ *для кожного показника* $q \in \mathcal{B}_+((0,T))$, $q_0 > 1$.

*Доведення.* Для функції $q \in \mathcal{B}_+((0,T))$ використаємо відповідні позначення (1.21). Тоді $q(t) \le q^0 < q^0+1$, $t \in [0,T]$. З узагальненої нерівності Юнга (2.154) для показників $\mathfrak{q} = \frac{q^0+1}{q(t)} > 1$ та $\mathfrak{q}'$ (див. (1.22)) випливає оцінка $|W(t,\omega)|^{q(t)} \le |W(t,\omega)|^{q^0+1} + C_2$, де стала $C_2 > 0$ не залежить від $t, \omega, W$. Використавши цю оцінку, лему 2.5 та твердження 2.10, матимемо нерівність

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{S}} |W(t,\omega)|^{q(t)}\, \mathbb{P}\,(d\omega)\ dt \le \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{S}} |W(t,\omega)|^{q^0+1}\, \mathbb{P}\,(d\omega)\ dt +$$

$$+ C_2 \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{S}} \mathbb{P}\,(d\omega)\ dt \le T||C([0,T];L_{q^0+1})||^{q^0+1} + TC_2 < +\infty. \quad \Box$$

2.2.3. *Інтегрування випадкових процесів за часовою змінною.* Зауважимо, що для випадкових процесів $\xi \in C([0,T];L_p)$ чи $\xi \in L^1(0,T;L_p)$, $p \ge 1$, стандартним чином можна визначити $L_p$-значний (загалом, $L_1$-значний) інтеграл Бохнера (див., наприклад, [102, с. 22]) $\int\limits_0^T \xi(t,\omega)\ dt$. Нагадаємо деякі його властивості.

**Твердження 2.11** (лема 14, [15]). *Якщо* $g \in L^\infty(0,T)$ *– детермінована функція,* $\eta \in L^1(0,T;L_1)$ *– випадковий процес, то*

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t,\omega)\ dt\Big] = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\,[\eta(t,\omega)]\ dt.$$

**Зауваження 2.1.** *Оскільки* $W \in C([0,T];L_p)$, $p \geq 1$, *то для всіх функцій* $h \in L^r([0,T])$, $r \geq 1$, *коректним є* $L_p$*-значний інтеграл Бохнера* $\int\limits_0^T h(t)W(t,\omega)\,dt$. *Зокрема, матимемо, що* $hW \in L^r(0,T;L_p)$, *бо*

$$||h(t)W(t,\cdot)||_{L_p} = |h(t)| \cdot ||W(t,\cdot)||_{L_p} \leq C_3|h(t)|, \quad t \in [0,T], \tag{2.96}$$

*згідно з теоремою про обмеженість неперервної на* $[0,T]$ *функції.*

Нехай $C^1([0,T])$ – простір детермінованих неперервно-диференційовних на $[0,T]$ функцій, $g'$ – похідна функції $g \in C^1([0,T])$,

$$\Psi_0 := \{g \in C^1([0,T]) \quad | \quad g(0) = g(T) = 0\}. \tag{2.97}$$

Припустимо, що $g$ – невипадкова функція, причому, спочатку $g \in \Psi_0$.

**Означення 2.9.** *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда від детермінованої функції* $g \in \Psi_0$ *по випадковому вінерівсъкому процесу* $W$ *називаєтъся вираз*

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\,dW(t,\omega) := -\int\limits_0^T g'(t)W(t,\omega)\,dt. \tag{2.98}$$

Інтеграл справа в (2.98) – це інтеграл Бохнера, який існує згідно оцінок типу (2.96). Проблемою цього означення $PWZ$-інтеграла є те, що функція $g$ повинна занулятися в точках $t=0$ та $t=T$. Цю проблему усувають так.

Нехай $g$ – невипадкова функція, $g \in L^2(0,T)$. Нехай послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Psi_0, \quad g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{в просторі} \quad L^2(0,T).$$

Відомо, що така послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ завжди існує.

**Означення 2.10.** *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда від детермінованої функції* $g \in L^2(0,T)$ *по випадковому вінерівсъкому процесу* $W$ *назвемо вираз*

$$(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g(t)\,dW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,(\mathtt{PWZ})\int\limits_0^T g_m(t)\,dW(t,\omega), \tag{2.99}$$

*тобто границю в просторі* $L_2$ *послідовності інтегралів від* $g_m \in \Psi_0$.

Властивості PWZ-інтегралів (2.98)-(2.99) розглянуто, зокрема, в [60]. Ми наведемо лише деякі з них.

**Твердження 2.12** (про властивості $PWZ$-інтеграла, [60], с. 59)**.** *Нехай* $W$ *– вінерівський процес. Тоді якщо* $g \in L^2(0,T)$ *, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big] = 0, \qquad \mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int\limits_0^T |g(t)|^2\, dt. \quad (2.100)$$

**Твердження 2.13** (формула Ньютона-Лейбніца, див. [20], с. 265)**.**

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T], \quad t_1 < t_2 : \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} dW(t) = W(t_2) - W(t_1). \qquad (2.101)$$

2.2.4. *Диференціювання випадкових процесів за часовою змінною.* Візьмемо випадковий процес $\alpha \in L^1(0,T;L_1)$ та невипадкову функцію $\beta \in L^2(0,T)$.

**Означення 2.11.** *Якщо деякий випадковий процес* $u$ *для всіх* $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ *, задовольняє умову*

$$u(t_2,\omega) = u(t_1,\omega) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(t,\omega)\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta(t)\, dW(t,\omega), \qquad (2.102)$$

*то стохастичним диференціалом випадкового процесу* $u$ *називається вираз*

$$du(t,\omega) = \alpha(t,\omega)\, dt + \beta(t)\, dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \qquad (2.103)$$

*де* $dt$ *– звичайний диференціал детермінованої змінної* $t$ *,* $dW(t,\omega)$ *– диференціал вінерівського процесу.*

Зупинемося на понятті диференційовності детальніше. Зокрема, процес $\eta \in C([0,T];L_2)$ називають *диференційовним в середньоквадратичному розумінні*, якщо в кожній точці $t \in [0,T]$ існує границя $\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{\eta(t+h)-\eta(t)}{h}$, яка називається *середньоквадратичною похідною* $\eta$ в точці $t$ і позначається $\eta'(t)$.

Нехай тепер $\alpha \in C([0,T];L_2) \subset L^1(0,T;L_1)$,

$$\eta(t,\omega) = \int\limits_0^t \alpha(s,\omega)\, ds, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}. \qquad (2.104)$$

З властивостей присутнього в (2.104) інтеграла Бохнера випливає таке: випадковий процес $\eta$ з (2.104) буде диференційовним в середньоквадратичному розумінні, $\eta'(t) = \alpha(t)$, $t \in [0,T]$. Тому *стохастичним диференціалом* випадкового процесу (2.104) можна назвати традиційний в аналізі вираз

$$d\eta(t) = \eta'(t)\, dt = \alpha(t)\, dt. \qquad (2.105)$$

Переписавши (2.105) у вигляді

$$d\eta(t,\omega) = \alpha(t,\omega)\ dt + 0 \cdot dW(t,\omega), \tag{2.106}$$

бачимо, що таке означення повністю збігається з означенням стохастичного диференціалу (2.103).

З іншого боку, формула (2.101) може бути записана у вигляді

$$W(t_2,\omega) = W(t_1,\omega) + \int\limits_{t_1}^{t_2} dW(t,\omega), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad \omega \in \mathbb{S},$$

що означає таке: вінерівський процес $W$ має стохастичний диференціал, який можна записати так:

$$dW(t,\omega) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t,\omega).$$

Спробуємо надати цьому виразу іншого значення. Перш за все нагадаємо, що формулу (2.105) прямо застосувати не можна, бо відомо (див. [60, с. 53]), що $t \mapsto W(t,\omega)$ – ніде не диференційовна функція для $\omega \in \mathbb{S}$.

Далі, для детермінованої функції $\beta \in C([0,T]) \subset L^2(0,T)$ покладемо:

$$\xi(t,\omega) := \int\limits_0^t \beta(s)\ dW(s,\omega), \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}. \tag{2.107}$$

Відомо, що $\xi \in C([0,T];L_2)$. Проте, не зважаючи на гладкість (неперервність) $\beta$, відомо, що процес $\xi$ не є диференційованим в середньоквадратичному. Зокрема, диференціала $d\xi$ в сенсі формули (2.105) не існує. Але $\xi(t_2) - \xi(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta(s)\ dW(s,\omega)$, і тому, в сенсі формули (2.103), матимемо такий стохастичний диференціал в.п. (2.107):

$$d\xi(t,\omega) = 0 \cdot dt + \beta(t)\ dW(t,\omega).$$

2.2.5. *Простори розподілів.* Нехай $\mathcal{O}$ – область в $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що простір основних функцій $D(\mathcal{O})$ складається з усіх елементів простору $C_0^\infty(\mathcal{O})$, причому збіжність послідовності $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{O})$ до функції $\varphi \in D(\mathcal{O})$ розуміється в наступному сенсі. Існує компактна множина $K \subset \mathcal{O}$ така, що $\operatorname{supp}\varphi_k$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ та $D^\alpha\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha\varphi$ рівномірно на $K$ для будь-якого $\alpha$. Нехай $D^*(\mathcal{O})$ – простір узагальнених функцій (розподілів), тобто усіх лінійних функціоналів на просторі $D(\mathcal{O})$, які неперервні відносно зазначеної збіжності в $D(\mathcal{O})$. Нехай

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O};B) := \{u : \mathcal{O} \to B \ \mid \ u \in L^1(K;B) \ \text{ для всіх компактів } \ K \subset \mathcal{O}\}$$

та $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}) := L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O};\mathbb{R})$. Кожну функцію $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ ототожнимо з розподілом $\widehat{u} \in D^*(\mathcal{O})$, який визначається так:

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle_{D(\mathcal{O})} = \int\limits_{\mathcal{O}} u(y)\phi(y)\, dy, \quad \phi \in D(\mathcal{O}). \tag{2.108}$$

Далі писатимемо просто $u$ замість $\widehat{u}$. Таким чином, отримуємо вкладення

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}) \subset D^*(\mathcal{O}).$$

Тепер розглянемо $B$-значні функції, де $B$ – деякий банахів простір. Нехай тепер $\mathcal{O} = (0,T)$, $D(0,T) := D((0,T))$ – простір основних функцій, $D^*(0,T) := D^*((0,T))$ – відповідний простір розподілів, $B$ – деякий банахів простір, $D^*(0,T;B)$ – простір векторнозначних розподілів, тобто множина всіх лінійних неперервних відображень з $D(0,T)$ в $B$ (див. [50, с. 186]). Дію елемента $u \in D^*(0,T;B)$ на пробну функцію $\varphi \in D(0,T)$ позначатимемо $\langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)}$. Зауважимо, що $\langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)} \in B$ для всіх $u \in D^*(0,T;B)$ та $\varphi \in D(0,T)$.

Кожну функцію $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B)$ ототожнимо з $\widetilde{u} \in D^*(0,T;B)$ так:

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle_{D(0,T)} := \int\limits_0^T u(t)\varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in D(0,T), \tag{2.109}$$

Аналогічно як і при розгляді (2.108), замість $\widetilde{u}$ писатимемо просто $u$ і отримаємо вкладення

$$L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B) \subset D^*(0,T;B).$$

2.2.6. *Похідні в сенсі розподілів.* Припустимо зараз, що $\mathbb{S}$ – деяка обмежена область в $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ – міра Лебега (нагадаємо, що $\mathbb{P}(\mathbb{S}) = 1$). Позначимо через $u_t$ похідну за часом деякої функції $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Theta_{0,T})$ в сенсі розподілів з простору $D^*(\Theta_{0,T})$:

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{D(\Theta_{0,T})} := -\int\limits_{\Theta_{0,T}} u(t,\omega)\varphi_t(t,\omega)\, dt d\omega \quad \text{для} \quad \varphi \in D(\Theta_{0,T}). \tag{2.110}$$

Для деякого простору $B$, позначимо через $u'_B$ похідну функції $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B)$ у сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;B)$:

$$\langle u'_B, \theta \rangle_{D(0,T)} := -\langle u, \theta' \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \forall\, \theta \in D(0,T). \qquad (2.111)$$

Припустимо, що

$$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;A) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B), \qquad (2.112)$$

де простори $A$ та $B$ неперервно вкладаються в деякий топологічний векторний простір $\mathcal{V}$. Тоді для будь-якого $\theta \in D(0,T)$, отримуємо:

$$\langle u'_A, \theta \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \text{в} \quad A \text{ і аналогічно в } \quad \mathcal{V};$$

$$\langle u'_B, \theta \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \text{в} \quad B \quad \text{і аналогічно в } \quad \mathcal{V}.$$

**Зауваження 2.2.** *Якщо (2.112) виконується, то $u'_A = u'_B$ в просторі $D^*(0,T;\mathcal{V})$. Крім того, як $u'_A$ так і $u'_B$ дорівнюють, наприклад, $u'_{A+B}$. Тому, якщо маємо (2.112), то можемо взяти похідну від $u$ в сенсі простору $D^*(0,T;A+B)$ і використати для неї просте позначення $u'$. Те саме позначення вживаємо для трьох просторів замість (2.112), тощо.*

Візьмемо функцію $u \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{S})) = L^1(\Theta_{0,T})$. Позначимо через $u_t$ похідну від $u$ в сенсі $D^*(\Theta_{0,T})$ (див. (2.110)), а через $u'$ – похідну від $u$ в сенсі $D^*(0,T;L^1(\mathbb{S}))$ (див. (2.111)). Очевидно, $u_t$ та $u'$ коректно визначені.

**Твердження 2.14** (див. твердження 2.6.2 [58], с. 59)**.** *Якщо $B$ є банаховим простором таким, що $D(\mathbb{S}) \bar{\circlearrowleft} B$, то для кожного $u \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{S}))$ виконується таке:*

*(i) якщо $u_t \in L^1(0,T;B^*)$, то $u' = u_t$ в просторі $D^*(0,T;B^* + L^1(\mathbb{S}))$;*

*(ii) якщо $u' \in L^1(0,T;B^*)$, то $u_t = u'$ в просторі $D^*(\Theta_{0,T})$.*

Оскільки ми маємо справу з функціями багатьох змінних, то аналогічно як і в [50, с. 187] нам буде зручніше обидві введені похідні (2.110) та (2.111) позначити одним символом $u_t$ навіть у випадку, коли умови твердження 2.14 не виконуються. Про те, яке означення ми використовуватимемо далі, зазначатимемо окремо.

2.2.7. *Білий шум та його використання.* Нехай знову $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – деякий повний імовірнісний простір, $\alpha \in L^1(0,T;L_1)$, випадковий процес $\eta$ визначено в (2.104). Тоді похідна $\eta_t$ коректно визначена в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_1)$. Крім того, $\eta_t = \alpha$. Тому стохастичний диференціал (2.105) можна записати у вигляді

$$d\eta = \eta_t \, dt.$$

З іншого боку, вінерівський процес $W$, зокрема, належить до $C([0,T];L_2)$. Тому коректно визначена його похідна в сенсі розподілів з $D^*(0,T;L_2)$, а саме, $W_t$ – це такий розподіл з $D^*(0,T;L_2)$, що

$$\langle W_t, \phi\rangle_{D(0,T)} = -\langle W, \phi_t\rangle_{D(0,T)}, \quad \phi \in D(0,T). \tag{2.113}$$

Тому з представлення розподілів у вигляді (2.109) матимемо, що права частина (2.113) дорівнює $-\int\limits_0^T W(t)\phi_t(t)\ dt$. За означенням PWZ-інтегралу (2.98) отримаємо, що цей вираз дорівнює

$$\int\limits_0^T \phi(t)\, dW(t). \tag{2.114}$$

**Означення 2.12.** *Похідна $W_t$ вінерівського процесу $W$ в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_2)$ називається білим шумом.*

З формул (2.113)-(2.114) (аналогічно як і у [114]-[85]) випливає, що білий шум $W_t$ визначається співвідношенням:

$$\langle W_t, \phi\rangle_{D(0,T)} = \int\limits_0^T \phi(t)\, dW(t), \quad \phi \in D(0,T). \tag{2.115}$$

**Зауваження 2.3.** *Оскільки $L_2 \subset L_1$, то $D^*(0,T;L_2) \subset D^*(0,T;L_1)$ (див.* [50, с. 187]*) і тому похідну $W_t$ можна вважати похідною в сенсі простору розподілів $D^*(0,T;L_1)$.*

Нехай $\alpha \in L^1(0,T;L_1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадковий процес

$$u(t,\omega) = u(0,\omega) + \int\limits_0^t \alpha(s,\omega)\, ds + \beta\, W(t,\omega). \tag{2.116}$$

Використавши властивості інтеграла Бохнера, зокрема формулу Ньютона-Лейбніца (2.101), отримаємо, що $u(t_2) - u(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(s)\, ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta\, dW$ Тому за означенням типу (2.103) процес (2.116) має стохастичний диференціал

$$du(t,\omega) = \alpha(t,\omega)\ dt + \beta\ dW(t,\omega). \tag{2.117}$$

З іншого боку, випадковий процес (2.116) належить до $C([0,T];L_1)$, а тому має таку похідну в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_1)$:

$$u_t = (u(0))_t + \Big(\int\limits_0^t \alpha(s)\ ds\Big)_t + (\beta\ W)_t,$$

яка дорівнює (див. зауваження 2.3)

$$u_t = \alpha + \beta\ W_t. \tag{2.118}$$

**Зауваження 2.4.** *Порівнюючи вираз (2.117) з (2.118), домовимося про таке: той факт, що випадковий процес* $u$ *має стохастичний диференціал вигляду (2.117) далі записуватимемо у вигляді (2.118).*

При дослідженні задач для систем типу (2.88) замість власне $W_t$ часто слід розглядати похідну в сенсі розподілів $b_t$, наприклад, від функції

$$b(x,t,\omega) = b_0(x)W(t,\omega), \quad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2.119}$$

де $W$ – вінерівський процес з означення 2.8. Функція $b_0$ має властивості, що продиктовані специфікою задачі, яка ставиться для системи (2.88). Зокрема, $b_0$ може задовольняти крайові умови та/або рівність типу ($2.88_2$). Детальніше ми зупинемося на цьому у наступному підрозділі.

**Зауваження 2.5.** *Аналогічно як (2.89) та (2.92) для кожних числа* $p \geq 1$, *нормованого простору* $Y$ *та функцій* $r = r(t)$ *та* $q = q(x,t)$ *визначимо простори випадкових величин (функцій)* $L_p(\mathbb{S};Y)$, $L_p(\Theta_{0,T};Y)$, $L_p(\Pi_{0,T};Y)$, $L_{r(t)}(\Pi_{0,T})$, $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$ *і т.д.*

*Висновки до підрозділу 2.2.* В цьому допоміжному підрозділі розглянуто деякі аспекти стохастичного інтегрування і диференціювання, введено поняття білого шуму.

Результати підрозділу висвітлено у [18].

2.3. **Системи Стокса зі змінними показниками нелінійності та випадковим збуренням.** Перенесемо результати підрозділу 2.1 на випадок системи (2.2) зі змінним показником нелінійності $q = q(x,t)$, збуреної випадковим доданком $b_t$ типу білого шуму, який ми почали розглядати у підрозділі 2.2. Для спрощення опустимо нелокальний доданок в системі. Отож, нехай виконуються позначення (1.4)-(1.6), $n \geq 2$ та, додатково, (1.8)-(1.9).

Шукатимемо залежний від випадкового параметра $\omega \in \mathbb{S}$ слабкий розв'язок $\{u, \pi\}$, де $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ та $\pi : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$, задачі

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t) u_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q(x,t)-2} u +$$

$$+ \nabla \pi = F(x,t,\omega) + b_t(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2.120}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2.121}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t,\omega)\, dx = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{2.122}$$

$$u(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{2.123}$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{2.124}$$

зі змінним показником нелінійності $q = q(x,t)$ та випадковим збуренням $b_t = b_t(x,t,\omega)$. Припустимо, що виконуються такі умови:

**(A1):** $A_{ij}$ – квадратні матриці $n$-го порядку з елементами з $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij} = A_{ji}$ ($i,j = \overline{1,n}$); м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ та д.в. $\xi^1, \ldots, \xi^n \in \mathbb{R}^n$, виконуються оцінки

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j \Big)_{\mathbb{R}^n} \leq a^0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \quad (0 < a_0 \leq a^0 < +\infty);$$

**(G1):** $q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ (див. (1.36)) та $q_0 \geq 2$ (див. (1.20)); $G$ – квадратна матриця $n$-го порядку, $G = diag(g_1, \ldots, g_n)$, $g_l \in L^\infty(Q_{0,T})$ та $0 < g_0 \leq g_l(x,t) \leq g^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$, $l = \overline{1,n}$;

Нехай $H$ – простір з (2.12), $Z_1$ – простір з (2.13) при $s = 1$,

$$V(t) := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{2.125}$$

$$V_- := Z_1 \cap [L^{q_0}(\Omega)]^n, \quad U_-(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q_0}(Q_{0,T})]^n, \tag{2.126}$$

$$V_+ := Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n, \quad U_+(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q^0}(Q_{0,T})]^n. \tag{2.127}$$

Нехай виконуються такі додаткові умови:

**(F1):** $F \in L_2\big(\mathbb{S}; L^2(0,T;H)\big)$ (див. зауваження 2.5);

**(U1):** $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$ (див. зауваження 2.5);

**(W1):** $W$ – вінерівський процес (див. означення 2.8), $b_0 \in C_{\rm div}$,

$$b(x,t,\omega) = b_0(x) W(t,\omega), \quad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}. \tag{2.128}$$

Щоб ввести поняття розв'язку задачі (2.120)-(2.124) зробимо в ній заміну невідомої функції $u \leftrightsquigarrow \widetilde{u}$ за правилом

$$u(x,t,\omega) = \widetilde{u}(x,t,\omega) + b(x,t,\omega). \tag{2.129}$$

Оскільки $\operatorname{div} b = 0$, $b|_{x\in\partial\Omega} = 0$ та $b|_{t=0}$, то для знаходження нової пари функцій $\{\widetilde{u}, \pi\}$, де $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ та $\pi : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$, отримаємо таку задачу:

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t) \Big( \widetilde{u} + b(x,t,\omega) \Big)_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t) \Big| \widetilde{u} + b(x,t,\omega) \Big|^{q(x,t)-2} \Big( \widetilde{u} + b(x,t,\omega) \Big) +$$

$$+ \nabla \pi = F(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2.130}$$

$$\operatorname{div} \widetilde{u} = 0, \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2.131}$$

$$\int_\Omega \pi(x,t,\omega)\, dx = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{2.132}$$

$$\widetilde{u}(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{2.133}$$

$$\widetilde{u}(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{2.134}$$

Нехай оператори $A(t) : Z_1 \to Z_1^*$ та $\mathsf{A} : L^2(0,T;Z_1) \to L^2(0,T;Z_1^*)$ взято з (2.16)-(2.17). Визначимо оператори $N(t) : [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n \to [L^{q'(x,t)}(\Omega)]^n$ та $\mathsf{N} : [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n \to [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n$ за правилами

$$(N(t)s)(x) := G(x,t)|s(x)|^{q(x,t)-2} s(x), \; (x,t) \in Q_{0,T}, \; s \in [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \tag{2.135}$$

$$(\mathsf{N}r)(x,t) := G(x,t)|r(x,t)|^{q(x,t)-2} r(x,t), \; (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{2.136}$$

$r \in [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n$. По аналогії з (2.22)-(2.23) введемо оператори $S(t) : V(t) \to V^*(t)$ та $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$ так:

$$\langle S(t)z, w \rangle_{V(t)} := \langle A(t)z, w \rangle_{Z_1} + (N(t)z, w)_\Omega, \;\; z, w \in V(t), \;\; t \in (0,T), \tag{2.137}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} + \int\limits_{Q_{0,T}} (\mathsf{N}u)(x,t)\, v(x,t)\, dxdt, \tag{2.138}$$

$u, v \in U(Q_{0,T})$. Припустимо, що виконується умова

$$q_0 > 1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s \geq \max\Big\{2,\ \frac{n}{2},\ n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big)\Big\}, \quad h = \min\Big\{2, \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \tag{2.139}$$

Зазначимо, що з (2.139) випливає, що простір $Z_s$ з позначення (2.13) задовольняє включення: $Z_s \overset{-}{\circlearrowleft} (Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n) \overset{-}{\circlearrowleft} V(t)$, $t \in [0, T]$.

**Означення 2.13.** *Пара функцій $\{\widetilde{u}, \pi\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (2.130)-(2.134), якщо*

*1) $\widetilde{u} \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; Z_s^*)$ м.н., $\widetilde{u}_t \in [U(Q_{0,T})]^*$ м.н., $\pi \in W^{-1,h}(0, T; [L^h(\Omega)]^n)$ м.н.;*

*2) м.н. функція $\widetilde{u}$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\widetilde{u}\, z_t + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), z_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u} + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u} + b),\ z\Big)\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\ z)\, dxdt \tag{2.140}$$

*для всіх пробних функцій $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{div}}$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $\mathcal{D}^*_{\mathrm{div}}$ (див. (2.38)) м.н. виконується рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u} + b) = F; \tag{2.141}$$

*3) м.н. функція $\pi = \pi^0 + \pi^1_t$ ($\pi^0, \pi^1 \in L^h(Q_{0,T})$, див. (2.14)) задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\widetilde{u}\, y_t + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), y_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u} + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u} + b),\ y\Big) -$$

$$- \pi^0 \operatorname{div} y + \pi^1 \operatorname{div} y_t\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\ y)\, dxdt. \tag{2.142}$$

*для всіх пробних функцій $y \in \mathcal{D}$, тобто, м.н. в сенсі простору $\mathcal{D}^*$ виконується рівняння (2.130) – рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u} + b) + \nabla\pi = F; \tag{2.143}$$

*4) $\pi$ м.н. задовольняє умову (2.132); $\widetilde{u}$ м.н. задовольняє умову (2.134).*

**Означення 2.14.** *Пара функцій* $\{u, \pi\}$ *називається узагальненим розв'язком задачі (2.120)-(2.124), якщо* $u$ *має вигляд (2.129) та пара функцій* $\{\widetilde{u}, \pi\}$ *є узагальненим розв'язком задачі (2.130)-(2.134).*

Основним результатом підрозділу є такі твердження.

**Теорема 2.3.** *Нехай виконуються умови* ***(A1)-(G1), (F1)-(W1)****. Тоді задача (2.120)-(2.124) має єдиний узагальнений розв'язок* $\{u, \pi\}$ *. Крім того,* $u \in L_2\Big(\mathbb{S};\ L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;Z_1)\Big) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$.

Бенсуссан А. та Темам Р. одні з перших розглянули слабке формулювання рівнянь Нав'є-Стокса з білим шумом, яке стало основою для багатьох досліджень в теорії стохастичних диференціальних рівнянь. У своїй праці [27], вони розглядають стохастичну систему

$$du + (u \cdot \nabla)u\, dt - \nu \Delta u\, dt + \nabla\pi\, dt = f(x,t)\, dt + \Phi(t)\, dW(t), \qquad (2.144)$$

з умовами (2.121), (2.123), (2.124). Тут $\nu > 0$, $W(t)$ – циліндричний вінерівський процес, $f, \Phi$ – деякі функції. Задачі для стохастичних диференціальних рівнянь, які охоплюють різні підходи до включення білого шуму, розглядають зокрема, у працях [37], [63], [64], [70] та [92]. Мішану задачу (2.120)-(2.124) з залежним від змінних $(x,t)$ показником нелінійності та білим шумом розглянуто, мабуть, вперше.

2.3.1. *Детермінована задача.* Розглянемо схожу до (2.130)-(2.134) задачу

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t) \Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big)_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t) \Big|\widetilde{u} + b(x,t)\Big|^{q(x,t)-2} \Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big) +$$

$$+ \nabla\pi = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \qquad (2.145)$$

$$\operatorname{div} \widetilde{u} = 0, \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \qquad (2.146)$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\, dx = 0, \quad t \in (0,T), \qquad (2.147)$$

$$\widetilde{u}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad (2.148)$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (2.149)$$

де функції $F, b, u_0$ не залежать від випадкового параметра $\omega$ (тому казатимемо, що це – детермінована задача). Припустимо, що виконуються умови

**(F2):** $F \in L^2(0,T;H)$;
**(U2):** $u_0 \in H$;
**(W2):** $b \in U(Q_{0,T})$.

**Означення 2.15.** *Пара функцій $\{\widetilde{u}, \pi\}$ називається узагальненим розв'язком детермінованої задачі (2.145)-(2.149), якщо*

*1)* $\widetilde{u} \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; Z_s^*))$, $\widetilde{u}_t \in [U(Q_{0,T})]^*$,
$\pi \in W^{-1,h}(0,T;[L^h(\Omega)]^n)$ *(тут $Z_s$ взято з (2.13), $h$ взято з (2.139)),*

*2) функція $\widetilde{u}$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\widetilde{u}\, z_t + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), z_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\, z\Big)\Big]\, dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\, z)\, dxdt. \tag{2.150}$$

*для всіх пробних функцій $z \in \mathcal{D}_{\text{div}}$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $\mathcal{D}_{\text{div}}^*$ (див. (2.38)) виконується рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u}+b) = F; \tag{2.151}$$

*3) функція $\pi = \pi^0 + \pi_t^1$ $(\pi^0, \pi^1 \in L^h(Q_{0,T})$, див. (2.14)) задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\widetilde{u}\, y_t + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), y_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\, y\Big) -$$
$$- \pi^0 \operatorname{div} y + \pi^1 \operatorname{div} y_t\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\, y)\, dxdt. \tag{2.152}$$

*для всіх пробних функцій $y \in \mathcal{D}$, тобто, в сенсі простору $\mathcal{D}^*$ виконується рівняння (2.145) – рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u}+b) + \nabla\pi = F; \tag{2.153}$$

*4) $\pi$ задовольняє умову (2.147); $\widetilde{u}$ задовольняє умову (2.149).*

**Теорема 2.4.** *Нехай виконуються умови **(A1)-(G1)**, **(F2)-(W2)**, сталі $s$ та $h$ взято з умови (2.139). Тоді існує розв'язок $\{\widetilde{u}, \pi\}$ детермінованої задачі (2.145)-(2.149).*

Детерміновані задачі типу (2.145)-(2.149) мають самостійний інтерес. Такі задачі зі змінними показниками нелінійності раніше не вивчалися.

Перш ніж перейти до доведення теореми 2.4 наведемо кілька фактів.

**Лема 2.7.** *Якщо* $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0 > 1$, $\mathfrak{q}'$ *взято з (1.22), то для всіх* $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *та м.д.в.* $y \in \mathcal{O}$ *виконується узагальнена нерівність Юнга*

$$ab \leq \varepsilon\, |a|^{\mathfrak{q}'(y)} + \widetilde{Y}_{\mathfrak{q}'}(\varepsilon)\, |b|^{\mathfrak{q}(y)}, \tag{2.154}$$

*де* $\widetilde{Y}_2(\varepsilon) = 1/(4\varepsilon)$ *при* $\mathfrak{q}(y) \equiv 2$ *та* $\widetilde{Y}_{\mathfrak{q}'}(\varepsilon) = \max\{\varepsilon^{-\frac{1}{\mathfrak{q}_0 - 1}},\ \varepsilon^{-\frac{1}{\mathfrak{q}^0 - 1}}\}$ *інакше.*

*Доведення.* При $\mathfrak{q}(y) \equiv 2$ нерівність очевидна. При $\mathfrak{q}(y) \not\equiv 2$ зі стандартної нерівності Юнга для показників-чисел $q'(y)$ та $\mathfrak{q}(y)$ матимемо, що

$$ab = \left(\varepsilon^{\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}} |\mathfrak{q}'(y)|^{\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}}\ a\right) \cdot \left(\varepsilon^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}} |\mathfrak{q}'(y)|^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}}\ b\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathfrak{q}'(y)} \left(\varepsilon^{\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}} |\mathfrak{q}'(y)|^{\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}}\ a\right)^{\mathfrak{q}'(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}(y)} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}} |\mathfrak{q}'(y)|^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}}\ b\right)^{\mathfrak{q}(y)} =$$

$$= \varepsilon\ a^{\mathfrak{q}'(y)} + R(y) b^{\mathfrak{q}(y)},$$

де

$$R(y) = \frac{1}{\mathfrak{q}(y)} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}} |\mathfrak{q}'(y)|^{-\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}}\right)^{\mathfrak{q}(y)} = \frac{1}{\mathfrak{q}(y)}\ \frac{1}{\varepsilon^{\mathfrak{q}(y)-1}}\ \frac{1}{|\mathfrak{q}'(y)|^{\mathfrak{q}(y)-1}} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\mathfrak{q}(y)-1}},$$

що і доводить лему. □

**Твердження 2.15** (Зауваження 2, [38], с. 441)**.** *Нехай* $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0 \geq 1$, $S_{\mathfrak{q}}$ *– функція з (1.21),* $\rho_{\mathfrak{q}}$ *є визначеною в (1.23). Тоді для будь-якої функції* $v \in L^0(\mathcal{O})$ *виконуються наступні твердження:*

(i) $||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| \leq S_{1/\mathfrak{q}}(\rho_{\mathfrak{q}}(v; \mathcal{O}))$ *при* $\rho_{\mathfrak{q}}(v; \mathcal{O}) < +\infty$;

(ii) $\rho_{\mathfrak{q}}(v; \mathcal{O}) \leq S_{\mathfrak{q}}(||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||)$ *при* $||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| < +\infty$.

**Твердження 2.16** (Твердження 4 [42], с. 701)**.** *Якщо* $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ *та* $\mathfrak{q}_0 > 1$, *то правильними є такі твердження:*

*i) для всіх* $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y \in \mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\left| |\eta_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_1 - |\eta_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_2 \right| \leq C_1(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) \Big(|\eta_1| + |\eta_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-1-\alpha(y)} |\eta_1 - \eta_2|^{\alpha(y)}, \tag{2.155}$$

*де* $0 \leq \alpha(y) \leq \min\{1, \mathfrak{q}(y) - 1\}$, $C_1(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) := \max\{1, 2^{2\mathfrak{q}_0}, (\mathfrak{q}^0 - 1)2^{2\mathfrak{q}_0}\}$;

*ii) для всіх* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y \in \mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\Big(|\xi_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_2, \xi_1 - \xi_2\Big) \geq$$

$$\geq C_2(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) \Big(|\xi_1| + |\xi_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-\beta(y)} |\xi_1 - \xi_2|^{\beta(y)}, \tag{2.156}$$

*де* $\max\{\mathfrak{q}(y), 2\} \leq \beta(y) < \infty$, $C_2(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) := \min\{2^{2\mathfrak{q}^0}, (\mathfrak{q}_0 - 1)2^{2\mathfrak{q}^0}\}$.

**Лема 2.8.** *Якщо* $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ *та* $\mathfrak{q}_0 > 1$, *то для всіх* $a, b \in \mathbb{R}$ *виконується така оцінка:*

$$|a \pm b|^{\mathfrak{q}(y)} \geq 2^{-\mathfrak{q}^0}|a|^{\mathfrak{q}(y)} - |b|^{\mathfrak{q}(y)}. \tag{2.157}$$

*Доведення.* Зрозуміло, що $|a| = |a \pm b \mp b| \leq |a \pm b| + |b|$. Тому

$$|a|^{\mathfrak{q}(y)} \leq (|a \pm b| + |b|)^{\mathfrak{q}(y)} \leq (2\max\{|a \pm b|,\ |b|\})^{\mathfrak{q}(y)} \leq 2^{\mathfrak{q}^0}(|a \pm b|^{\mathfrak{q}(y)} + |b|^{\mathfrak{q}(y)}).$$

Поділивши цю нерівність на $2^{\mathfrak{q}^0}$, отримаємо (2.157). □

**Лема 2.9.** *Якщо* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in U(Q_{0,T})$ *та* $||v; U(Q_{0,T})|| \leq 1$, *то виконуються нерівності*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |(v_k)_{x_i}|^2\, dxdt \leq 1, \qquad \int\limits_{Q_{0,T}} |v_k|^2\, dxdt \leq 1, \qquad k, i = \overline{1, n}, \tag{2.158}$$

$$||v_k; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| \leq 1, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2.159}$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |v_k|^{q(x,t)}\, dxdt \leq 1, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.160}$$

*Доведення.* Нехай $k \in \{1, \ldots, n\}$. З (1.3), (2.8), (2.10) матимемо, що

$$1 \geq ||v; U(Q_{0,T})|| = ||v; L^2(0, T; Z_1)|| + ||v; [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| =$$

$$= \Big(\int\limits_0^T \Big(\sum_{l=1}^n ||v_l(t); H^1(\Omega)||\Big)^2\, dt\Big)^{1/2} + \sum_{l=1}^n ||v_l; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| \geq$$

$$\geq \Big(\int\limits_0^T ||v_k(t); H^1(\Omega)||^2\, dt\Big)^{1/2} + ||v_k; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| =$$

$$= \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n |(v_k)_{x_i}|^2 + |v_k|^2\Big]\, dt\Big)^{1/2} + ||v_k; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})||.$$

Звідси зразу випливають оцінки (2.158)-(2.159). Нерівність (2.160) є очевидним наслідком (2.159) та твердження 2.15. □

*Доведення теореми 2.4* розіб'ємо на кілька кроків.

*Крок 1 (побудова гальоркінських наближень).* Нехай простір $Z_s$ та набір функцій $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ взято з Твердження 2.2, причому $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – ортонормовані в $H$, а тому і в $[L^2(\Omega)]^n$. Зокрема, $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ є базою простору $V(t)$ для кожного $t\in[0,T]$. Нехай вектор $(\alpha_1^m,\dots,\alpha_m^m)\in\mathbb{R}^m$ є таким, що функція

$$u_0^m(x)=\sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu^m w^\mu(x),\quad x\in\Omega,$$

задовольняє умову:

$$u_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{сильно в } H \text{ та в } [L^2(\Omega)]^n. \tag{2.161}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що виконується оцінка

$$\int\limits_\Omega |u_0^m(x)|^2\,dx \le \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\,dx. \tag{2.162}$$

Для кожного $m\in\mathbb{N}$ розглянемо таку функцію:

$$\widetilde{u}^m(x,t)=\sum_{\mu=1}^m \varphi_\mu^m(t)w^\mu(x),\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{2.163}$$

де $(\varphi_1^m,\dots,\varphi_m^m)$ – розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$(\widetilde{u}_t^m(t),w^\mu)_\Omega+\Big\langle S(t)\Big(\widetilde{u}(t)+b(t)\Big),w^\mu\Big\rangle_{V(t)}=(F(t),w^\mu)_\Omega, \tag{2.164}$$

$t\in(0,T)$, $\mu=\overline{1,m}$, (див. позначення (2.137)) з початковими умовами

$$\varphi_1^m(0)=\alpha_1^m,\quad \dots,\quad \varphi_m^m(0)=\alpha_m^m. \tag{2.165}$$

Аналогічно як при доведенні теореми 2.1 показуємо існування глобального розв'язку $\varphi=(\varphi_1^m,...,\varphi_m^m)\in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ задачі Коші (2.164)-(2.165). Зрозуміло також, що

$$\widetilde{u}^m(0)=u_0^m. \tag{2.166}$$

*Крок 2 (апріорні оцінки).* Помножимо $\mu$-е рівняння (2.164) на функцію $\varphi_\mu^m(t)$ і, просумувавши за $\mu=\overline{1,m}$, отримаємо:

$$\sum_{\mu=1}^m\Big(\widetilde{u}_t^m(t),w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega+\sum_{\mu=1}^m\Big\langle S(t)(\widetilde{u}^m(t)+b(t)),\ w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big\rangle_{V(t)}=$$

$$=\sum_{\mu=1}^m\Big(F(t),w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega,\quad t\in(0,T).$$

Після інтегрування за $t\in(0,\tau)\subset(0,T)$ і певних перетворень, отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(\widetilde{u}_t^m,\widetilde{u}^m)_{\mathbb{R}^n}+\sum_{i,j=1}^n(A_{ij}\widetilde{u}_{x_i}^m,\widetilde{u}_{x_j}^m)_{\mathbb{R}^n}+(G|\widetilde{u}^m+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m+b),\widetilde{u}^m)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt=$$

$$= \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ (F, \widetilde{u}^m)_{\mathbb{R}^n} - \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij} b_{x_i}, \widetilde{u}^m_{x_j})_{\mathbb{R}^n} \Big] \, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.167}$$

Використавши формулу (2.163), ортонормованість функції $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ в $H$ та в $[L^2(\Omega)]^n$, після інтегрування частинами і використання (2.162), отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (\widetilde{u}^m_t, \widetilde{u}^m)_{\mathbb{R}^n} \, dxdt = \sum_{\mu,s=1}^{m} \int\limits_0^\tau (\varphi^m_s)_t(t) \varphi^m_\mu(t) \, dt \int\limits_\Omega (w^s(x), w^\mu(x))_{\mathbb{R}^n} \, dx =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \int\limits_0^\tau (\varphi^m_\mu)_t \varphi^m_\mu(t) \, dt = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt} \Big( |\varphi^m_\mu(t)|^2 \Big) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(\tau)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(0)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(\tau)|^2 \int\limits_\Omega |w^\mu(x)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(0)|^2 \int\limits_\Omega |w^\mu(x)|^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,0)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2 \, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u^m_0(x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2 \, dx. \tag{2.168}$$

З узагальненої нерівності Юнга типу (2.154) та умови **(G1)** випливає, що (візьмемо тут $\varepsilon_1 = g_0/2$)

$$\Big( G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2} (\widetilde{u}^m + b), \widetilde{u}^m \Big)_{\mathbb{R}^n} = \Big( G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2} (\widetilde{u}^m + b), \widetilde{u}^m + b \Big)_{\mathbb{R}^n} -$$

$$- \Big( G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2} (\widetilde{u}^m + b), b \Big)_{\mathbb{R}^n} \geq g_0 |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - g^0 |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-1} |b| \geq$$

$$\geq g_0 |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - \varepsilon_1 |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - C_3(\varepsilon_1) |b|^{q(x,t)} =$$

$$= \frac{g_0}{2} |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - C_4 |b|^{q(x,t)}. \tag{2.169}$$

Зі стандартної нерівності Юнга (при $q'(x,t) \equiv q(x,t) \equiv 2$) одержимо

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij} b_{x_i}, \widetilde{u}^m_{x_j} \Big) \leq \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}| \cdot |b_{x_i}| \cdot |\widetilde{u}^m_{x_j}| \leq C_5 \sum_{i,j=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_j}| \cdot |b_{x_i}| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \Big( \varepsilon_2 |\widetilde{u}^m_{x_j}|^2 + C_6(\varepsilon_2) \cdot C_5^2 \cdot |b_{x_i}|^2 \Big) = n\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + C_7(\varepsilon_2) \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}|^2. \tag{2.170}$$

Використавши стандартну нерівність Юнга, отримаємо таке:

$$(F, \widetilde{u}^m)_{\mathbb{R}^n} \le |F| \cdot |\widetilde{u}^m| \le \frac{1}{2}|F|^2 + \frac{1}{2}|\widetilde{u}^m|^2. \tag{2.171}$$

Використавши (2.168)-(2.171), з рівності (2.167) одержимо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(a_0 - n\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + \frac{g_0}{2}|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_8(\varepsilon_2)\mathtt{F}(\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^m|^2\, dxdt, \tag{2.172}$$

де

$$\mathtt{F}(\tau) = \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}|^2 + |b|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.173}$$

Нехай $y(t) := \int_{\Omega} |u^m(x,t)|^2\, dx,\ \ t \in [0,T]$. Тоді з (2.172) при $\varepsilon_2 = \frac{a_0}{2n}$ отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\, y(\tau) \le C_9\mathtt{F}(\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau} y(t)\, dt, \quad \tau \in [0,T].$$

Тому, з узагальненої леми Гронуола-Белмана (твердження 2.8) випливає, що $y(\tau) \le C_{10}\mathtt{F}(\tau)$, тобто

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\, dx \le C_{10}\mathtt{F}(\tau), \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.174}$$

З (2.172) і (2.174) слідує, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le C_{11}\mathtt{F}(\tau), \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.175}$$

Враховуючи оцінку (2.157), звідси отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\widetilde{u}^m|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le C_{12}\, \mathtt{F}(\tau), \quad \tau \in (0,T]. \tag{2.176}$$

З цієї оцінки випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|G|\widetilde{u}^m|^{q(x,t)-2}\widetilde{u}^m\Big|^{q'(x,t)}\, dxdt \le C_{13}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^m|^{q(x,t)}\, dxdt \le C_{14}. \tag{2.177}$$

З (2.174) і (2.175) слідують оцінки (використаємо позначення (2.136))

$$||\widetilde{u}^m; L^{\infty}(0,T;H)|| + ||\widetilde{u}^m; U(Q_{0,T})|| \le C_{15}. \tag{2.178}$$

$$||\,\mathsf{N}\widetilde{u}^m;[L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n||\le C_{15}. \tag{2.179}$$

Тут сталі $C_4,\dots,C_{15}$ не залежать від $m$.

З (2.178)-(2.179) випливає існування $\{\widetilde{u}^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{\widetilde{u}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ такої що,

$$\widetilde{u}^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty(0,T;H)\quad\text{і слабко в}\quad U(Q_{0,T}), \tag{2.180}$$

$$\mathsf{N}\widetilde{u}^m\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\chi_1\quad\text{слабко в}\quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n. \tag{2.181}$$

<u>Крок 3</u> (додаткові оцінки). Оскільки, $s$ задовольняє (2.139), то з побудови простору $U(Q_{0,T})$ отримаємо:

$$U(Q_{0,T})\ \bar{\circlearrowright}\ L^2(0,T;H)\ \bar{\circlearrowright}\ [U(Q_{0,T})]^*. \tag{2.182}$$

Використавши позначення (2.126)-(2.127) одержимо, що

$$L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;Z_s)\ \bar{\circlearrowright}\ L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;V_+)\ \bar{\circlearrowright}\ U(Q_{0,T})\ \bar{\circlearrowright}$$

$$\bar{\circlearrowright}\ L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-). \tag{2.183}$$

Тому

$$[U(Q_{0,T})]^*\ \bar{\circlearrowright}\ L^r(0,T;V_+^*)\ \bar{\circlearrowright}\ L^r(0,T;Z_s^*), \tag{2.184}$$

де

$$r:=\frac{\max\{2,q^0\}}{\max\{2,q^0\}-1}. \tag{2.185}$$

Використавши (2.183) і (2.178), отримаємо

$$||\widetilde{u}^m;L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-)||\le C_{16}||\widetilde{u}^m;U(Q_{0,T})||\le C_{17}. \tag{2.186}$$

З (2.138), (1.33), оцінки (2.176) та леми 2.9, для всіх $v\in U(Q_{0,T})$ таких, що $||v;U(Q_{0,T})||\le 1$, випливає нерівність

$$\langle\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b),v\rangle_{U(Q_{0,T})}=\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i,j=1}^n(A_{ij}(\widetilde{u}^m_{x_i}+b_{x_i}),v_{x_j})+(G|\widetilde{u}^m+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m+$$

$$+b),v)\Big]\,dxdt\le C_{18}\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i,j=1}^n|\widetilde{u}^m_{x_i}+b_{x_i}|\cdot|v_{x_j}|+|\widetilde{u}^m+b|^{q(x,t)-1}\cdot|v|\Big]\,dxdt\le$$

$$\le C_{19}\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^n|\widetilde{u}^m_{x_i}|^2+\sum_{i=1}^n|b_{x_i}|^2+\sum_{i=1}^n|v_{x_i}|^2+|\widetilde{u}^m|^{q(x,t)}+|b|^{q(x,t)}+|v|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt\le$$

$$\le C_{20}\Big\{\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^n|\widetilde{u}^m_{x_i}|^2+\sum_{i=1}^n|b_{x_i}|^2+|\widetilde{u}^m|^{q(x,t)}+|b|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|(v_k)_{x_i}|^2+|v_k|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt\Big\}\le C_{21}, \qquad (2.187)$$

де стала $C_{21}>0$ не залежить від $m$. Тому для довільного $v\in U(Q_{0,T})$ виконується оцінка $\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b),\frac{v}{||v;U(Q_{0,T})||}\rangle_{U(Q_{0,T})}\le C_{21}$, а тому і оцінки $\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b),v\rangle_{U(Q_{0,T})}\le C_{21}||v;U(Q_{0,T})||$ та

$$||\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b);[U(Q_{0,T})]^*||\le C_{21}, \qquad (2.188)$$

де оператор $\mathsf{S}$ взято з (2.138), стала $C_{21}>0$ не залежать від $m$.

Використавши Твердження 2.1, позначення (2.16)-(2.17), (2.138) і (2.27), в такий же спосіб, як і у [86, Розд. 1, §5.3], перепишимо (2.164) у вигляді

$$\widetilde{u}^m_t=\widehat{P}^*_m(F-\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b)). \qquad (2.189)$$

Таким чином, для чисел $r$ з (2.185) та $s$ з (2.139), використавши (2.189), оцінку (2.31), вкладення (2.184) і (2.182) та оцінку (2.188), отримаємо:

$$||u^m_t;L^r(0,T;Z^*_s)||=||\widehat{P}^*_m(F-\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b));L^r(0,T;Z^*_s)||\le$$

$$\le||F-\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b);L^r(0,T;Z^*_s)||\le C_{22}||F-\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b);[U(Q_{0,T})]^*||\le$$

$$\le C_{23}\Big(||F;L^2(0,T;H)||+||\mathsf{S}(\widetilde{u}^m+b);[U(Q_{0,T})]^*||\Big)\le C_{24}, \qquad (2.190)$$

де стала $C_{24}>0$ не залежить від $m$.

Оскільки, $V_-\overset{K}{\subset}H\circlearrowleft Z^*_s$, з (2.186), (2.190), теореми Обена (див. Твердження 2.5) і Твердження 2.7 отримаємо:

$$\widetilde{u}^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad \text{в просторі}\quad L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;H)\cap C([0,T];Z^*_s),$$

$$\widetilde{u}^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad \text{майже скрізь}\quad Q_{0,T}.$$

Тому, (2.149) виконується і (див. (2.181)) $\chi_1=\mathsf{N}\widetilde{u}$.

<u>Крок 4</u> (граничний перехід). Візьмемо $\psi\in C^1_0([0,T])$. Коли ми перемножимо рівність (2.164) на $\psi(t)$, проінтегруємо по $t\in(0,T)$, і перший доданок проінтегруємо частинами, отримаємо наступне:

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-\Big(\widetilde{u}^m,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi_t+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(\widetilde{u}^m_{x_i}+b_{x_i}),w^\mu_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi+$$

$$+\Big(G|\widetilde{u}^m+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m+b),w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\Big]\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}\Big(F,w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\,dxdt.$$

Взявши $m = m_k$ і спрямувавши $k \to \infty$, завдяки довільності $\psi$, того, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – база в $V(t)$ та щільності $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ в $U(Q_{0,T})$ отримаємо (2.150) та

$$\langle \mathcal{F}, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, z \in U(Q_{0,T}), \tag{2.191}$$

де $\mathcal{F} := F - \widetilde{u}_t - \mathsf{S}(\widetilde{u}+b)$. Отже, $\widetilde{u}_t \in [U(Q_{0,T})]^*$ і (2.151) доведено. Очевидно

$$\mathcal{F} \in W^{-1,2}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) + L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q(x,t)}{q(x,t)-1}}(Q_{0,T})]^n \subset$$

$$\subset W^{-1,h}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n),$$

де $h$ взяте з (2.139). Тоді, з узагальненої теореми де Рама (див. Твердження 2.4) випливає, що існує $\pi \in W^{-1,h}(0,T;[W^{0,h}(\Omega)]^n)$ таке, що (2.147), (2.152) виконуються. Теорему 2.4 доведено. $\square$

Нехай $SP(u_0,F,b)$ – множина узагальнених розв'язків $\{\widetilde{u},\pi\}$ детермінованої задачі (2.145)-(2.149) в сенсі означення 2.15. В теоремі 2.4 ми довели, що $SP(u_0,F,b) \neq \varnothing$.

**Означення 2.16.** *Казатимемо, що розв'язок задачі (2.145)-(2.149) неперервно залежить від вхідних даних $u_0, F, b$, якщо для всіх функцій $u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;H)$, $b \in U(Q_{0,T})$ і для довільних $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільних функцій $u_0^\delta \in H$, $F^\delta \in L^2(0,T;H)$, $b^\delta \in U(Q_{0,T})$, які задовольняють оцінки*

$$||u_0^\delta - u_0; H|| < \delta, \quad ||F^\delta - F; L^2(0,T;H)|| < \delta, \tag{2.192}$$

$$||b^\delta - b; U(Q_{0,T})|| < \delta, \tag{2.193}$$

*відповідні розв'язки $\{\widetilde{u},\pi\} \in SP(u_0,F,b)$ та $\{\widetilde{u}^\delta,\pi^\delta\} \in SP(u_0^\delta,F^\delta,b^\delta)$ справджують нерівність*

$$||u^\delta - u; L^\infty(0,T;H)|| + ||u^\delta - u; U(Q_{0,T})|| < \varepsilon. \tag{2.194}$$

Зауважимо, що ми в цьому означенні нічого не стверджуємо про близькість елементів $\pi$ та $\pi^\delta$.

**Теорема 2.5.** *Нехай виконуються умови теореми 2.4. Тоді розв'язок $\{\widetilde{u},\pi\}$ задачі (2.145)-(2.149) неперервно залежить від вхідних даних $u_0, F, b$.*

*Доведення.* Нехай $\{\widetilde{u}_1,\pi_1\} \in SP(u_0^1,F^1,b^1)$, $\{\widetilde{u}_2,\pi_2\} \in SP(u_0^2,F^2,b^2)$. Запишемо (2.151) для $\widetilde{u}_1$:

$$\widetilde{u}_{1\,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_1 + b^1) = F^1. \tag{2.195}$$

Запишемо (2.151) для $\widetilde{u}_2$:

$$\widetilde{u}_{2\,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_2 + b^2) = F^2. \tag{2.196}$$

Віднявши (2.196) від (2.195), подіємо елементами з цієї рівності на елемент $\widetilde{u} \cdot \chi_{0,\tau} \in U(Q_{0,T})$, де $\chi_{0,\tau}$ взято з (1.40) та $\widetilde{u} := \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$. Отримаємо:

$$\int\limits_0^\tau \Big[\langle \widetilde{u}_t(t), \widetilde{u}(t)\rangle_{V(t)} + \langle S(t)(\widetilde{u}_1(t) + b^1(t)) - S(t)(\widetilde{u}_2(t) + b^2(t)), \widetilde{u}(t)\rangle_{V(t)}\Big]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau (F^1(t) - F^2(t), \widetilde{u}(t))_\Omega \, dt, \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши формулу інтегрування частинами (1.44), звідси одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}\widetilde{u}_{x_i}, \widetilde{u}_{x_j}) + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(b^1_{x_i} - b^2_{x_i}), \widetilde{u}_{x_j}) +$$

$$+\Big(G|\widetilde{u}_1 + b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1 + b^1) - G|\widetilde{u}_2 + b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2 + b^2), (\widetilde{u}_1 + b^1) - (\widetilde{u}_2 + b^2)\Big) -$$

$$-\Big(G|\widetilde{u}_1 + b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1 + b^1) - G|\widetilde{u}_2 + b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2 + b^2), b^1 - b^2\Big)\Big]\, dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0^1 - u_0^2|\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F^1 - F^2, \widetilde{u})\, dxdt. \tag{2.197}$$

Оскільки $q(x,t) \geq q_0 \geq 2$, то, використавши (2.156) для цього $q = q(x,t)$ та для $\beta = \beta(x,t) = q(x,t)$, після елементарних перетворень, з (2.197) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^n |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + C_{25}|\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0^1 - u_0^2|^2\, dx + I_1(\tau) + I_2(\tau) + I_3(\tau), \tag{2.198}$$

де стала $C_{25} > 0$ залежить лише від $g_0, q_0, q^0$;

$$I_1(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2| \cdot |\widetilde{u}|\, dxdt, \qquad I_2(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n ||A_{ij}|| \cdot |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}| \cdot |\widetilde{u}_{x_j}|\, dxdt,$$

$$I_3(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} ||G|| \cdot \Big||\widetilde{u}_1 + b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1 + b^1) - |\widetilde{u}_2 + b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2 + b^2)\Big| \cdot |b^1 - b^2|\, dxdt.$$

Зі стандартності нерівності Юнга легко отримати оцінки:

$$I_1(\tau) \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2 \, dxdt, \qquad (2.199)$$

$$I_2(\tau) \le C_{26} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}| \cdot |\widetilde{u}_{x_j}| \, dxdt \le C_{27}(\varepsilon_3) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2 \, dxdt +$$

$$+ \varepsilon_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 \, dxdt, \qquad (2.200)$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільна стала.

Оскільки $q(x,t) \ge q_0 \ge 2$, то з оцінки (2.155) для $\alpha = \alpha(x,t) \equiv 1$ маємо

$$I_3(\tau) \le C_{28} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big( |\widetilde{u}_1 + b^1| + |\widetilde{u}_2 + b^2| \Big)^{q(x,t)-2} \cdot |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2| \, dxdt \le$$

$$\le I^1_3(\tau) + I^2_3(\tau), \qquad (2.201)$$

де

$$I^1_3(\tau) = C_{29} \int\limits_{A_{0,\tau}} \Big( |\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2| \Big)^{q(x,t)-2} \cdot |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2| \, dxdt, \qquad (2.202)$$

$$A_{0,\tau} = \{(x,t) \in Q_{0,\tau} \quad | \quad q(x,t) > 2\}, \qquad (2.203)$$

$$I^2_3(\tau) = C_{30} \int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2| \, dxdt, \qquad (2.204)$$

$$B_{0,\tau} = Q_{0,\tau} \setminus A_{0,\tau} = \{(x,t) \in Q_{0,\tau} \quad | \quad q(x,t) \equiv 2\}. \qquad (2.205)$$

Очевидно, що виконується оцінка

$$I^2_3(\tau) \le \varepsilon_4 \int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^2 \, dxdt + C_{31}(\varepsilon_4) \int\limits_{B_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^2 \, dxdt =$$

$$= \varepsilon_4 \int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)} \, dxdt + C_{31}(\varepsilon_4) \int\limits_{B_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)} \, dxdt. \qquad (2.206)$$

Легко, також, отримати таке узагальнення нерівності (2.154):

$$abc \le \varepsilon_1 |a|^{\mathfrak{p}(y)} + \varepsilon_2 |b|^{\mathfrak{q}(y)} + \widehat{Y}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) |c|^{r(y)}, \qquad (2.207)$$

де $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, r \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0, r_0 > 1$, $\frac{1}{\mathfrak{p}(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \frac{1}{r(y)} = 1$ для $y \in \mathcal{O}$.

Оскільки, в кожній точці $(x,t) \in A_{0,\tau}$ виконується рівність

$$\frac{1}{\frac{q(x,t)}{q(x,t)-2}} + \frac{1}{q(x,t)} + \frac{1}{q(x,t)} = \frac{q(x,t)-2}{q(x,t)} + \frac{2}{q(x,t)} = \frac{q(x,t)}{q(x,t)} = 1,$$

то можна використати нерівність (2.207) для показників $\frac{q(x,t)}{q(x,t)-2}, q(x,t), q(x,t)$. Зробивши це, отримаємо таке:

$$I_3^1(\tau) \le \varepsilon_5 \int\limits_{A_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt +$$

$$+ \varepsilon_6 \int\limits_{A_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt + C_{32}(\varepsilon_5,\varepsilon_6) \int\limits_{A_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt. \qquad (2.208)$$

Підставивши (2.206) та (2.208) в оцінку (2.201) та збільшивши області інтегрування $A_{0,\tau}$ та $B_{0,\tau}$ до $Q_{0,\tau}$, одержимо:

$$I_3(\tau) \le \varepsilon_5 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt +$$

$$+(\varepsilon_4+\varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}+b^1-b^2|^{q(x,t)}\, dxdt + C_{33}(\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1-b^2|^{q(x,t)}\, dxdt. \qquad (2.209)$$

Застосувавши нерівності (2.199), (2.200) та (2.209) до правої частини нерівності (2.198), після певних перетворень, отримаємо таке:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(a_0-\varepsilon_3)\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + (C_{25}-\varepsilon_4-\varepsilon_6)|\widetilde{u}+b^1-b^2|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \le$$

$$\le \varepsilon_5 \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|)^{q(x,t)}\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^1 - u_0^2|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|\, dxdt + C_{27}(\varepsilon_3) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2\, dxdt +$$

$$+ C_{33}(\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2\, dxdt. \qquad (2.210)$$

Нехай

$$J(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt. \qquad (2.211)$$

Вибравши $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_6 > 0$ досить малими та використавши (див. (2.157)) оцінку

$$|\widetilde{u} + (b^1 - b^2)|^{q(x,t)} \ge 2^{-q^0} |\widetilde{u}|^{q(x,t)} - |b^1 - b^2|^{q(x,t)}, \qquad (2.212)$$

з (2.210) після деяких перетворень одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau)|^2\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt \leq$$

$$\leq C_{34}\Big\{\varepsilon_5 J(\tau) + C_{35}(\varepsilon_5) M(\tau) + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2\, dxdt\Big\}, \qquad (2.213)$$

де

$$M(\tau) = \int\limits_{\Omega} |u_0^1 - u_0^2|\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|^2\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2 + |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt; \qquad (2.214)$$

$\varepsilon_5 > 0$ – довільне число; стала $C_{35}(\varepsilon_5) > 0$ залежить від $\varepsilon_5$ та не залежить від $\tau, J(\tau), M(\tau), \widetilde{u}$; стала $C_{34} > 0$ не залежить від $\varepsilon_5, \tau, J(\tau), M(\tau), \widetilde{u}$.

Нехай $y(\tau) := \int_\Omega |u(x,\tau)|^2\, dx,\ \tau \in (0,T]$. Тоді з (2.213) випливає, що

$$y(\tau) \leq C_{34}\Big(\varepsilon_5 J(\tau) + C_{35}(\varepsilon_5) M(\tau) + \int\limits_0^\tau y(t)\, dt\Big), \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши твердження 2.8, бачимо, що

$$y(\tau) \leq \Big(C_{34}\cdot \varepsilon_5 J(\tau) + C_{34}\cdot C_{35}(\varepsilon_5) M(\tau)\Big) e^{C_{34}\tau}.$$

Оскільки $J(\tau) \leq J(T)$, $M(\tau) \leq M(T)$, $e^{C_{34}\tau} \leq e^{C_{34}T}$, то з цієї нерівності, після деяких перепозначень, випливає, що

$$y(\tau) \leq \varepsilon_7 J(T) + C_{36}(\varepsilon_7) M(T), \quad \tau \in [0,T], \qquad (2.215)$$

де $\varepsilon_7 > 0$ – довільне число, стала $C_{36}(\varepsilon_7)$ залежить від $\varepsilon_7$ але не залежить від $\tau, y(\tau), J(T), M(T)$.

Нехай $\mathrm{B}_1(R)$ – куля радіуса $R > 0$ в просторі $U(Q_{0,T})$ з центром в точці нуль цього простору. Тоді існує $R_1 > 0$ таке, що $b^1, b^2 \in \mathrm{B}_1(R_1)$. Нехай $\mathrm{B}_2(R)$ та $\mathrm{B}_3(R)$ – кулі радіуса $R > 0$ в просторах $H$ та $L^2(0,T;H)$, відповідно, з центрами у відповідних нульових точках цих просторів. Тоді існують числа $R_2 > 0$ та $R_3 > 0$ такі, що $u_0^1, u_0^2 \in \mathrm{B}_2(R_2)$ та $F^1, F^2 \in \mathrm{B}_3(R_3)$. З оцінки типу (2.175) випливає існування такого числа $R_4 > 0$, що $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in \mathrm{B}_1(R_4)$.

Нехай $R_5 = \max\{R_1, ..., R_4\}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Розглянемо праву частину нерівності (2.215). З наведених вище міркувань випливає оцінка $J(T) \le C_{37}(R_5)$. Тоді візьмемо в (2.215) $\varepsilon_7 = \frac{\varepsilon}{2C_{37}(R_5)}$. Матимемо, що

$$y(\tau) \le \frac{\varepsilon}{2} + C_{38}(R_5)M(T). \tag{2.216}$$

Вибравши $u_0^1$ близьким до $u_0^2$, $F^1$ – до $F^2$, $b^1$ – до $b^2$ (у відповідних просторах), можна зробити $M(T) > 0$ досить малим і досягнути оцінки $C_{38}(R_5) \cdot M(T) < \frac{\varepsilon}{2}$. Підставивши її в (2.216), одержимо, що $y(\tau) < \varepsilon$. Враховуючи вигляд $y(\tau)$, звідси випливає, що

$$||\widetilde{u}; L^\infty(0, T; H)|| \le \varepsilon, \tag{2.217}$$

Використавши (2.217) в правій частині (2.213) та провівши міркування, аналогічні як при отриманні (2.217), з (2.213) отримаємо, що

$$||\widetilde{u}; U(Q_{0,T})|| \le C_{39}(\varepsilon), \tag{2.218}$$

де $C_{39}(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$. Теорему 2.5 доведено. □

**Теорема 2.6.** *Нехай виконуються умови теореми 2.4. Тоді детермінована задача (2.145)-(2.149) не може мати більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Нехай $\{\widetilde{u}_1, \widetilde{\pi}_1\}, \{\widetilde{u}_2, \widetilde{\pi}_2\} \in SP(u_0, F, b)$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$. Аналогічно як в доведенні теореми 2.5 отримаємо оцінку типу (2.198) з $b_1 = b_2$ та нульовою правою частиною. Тому $\widetilde{u} = 0$ і тоді аналогічно як в теоремі 2.2 показуємо, що $\pi_1 = \pi_2$. □

2.3.2. *Задача з випадковим параметром.* Нехай

$$\Gamma : H \times L^2(0, T; H) \times U(Q_{0,T}) \to L^\infty(0, T; H) \cap U(Q_{0,T})$$

– таке відображення, що

$$\Gamma\{u_0,\ f,\ b\} = \widetilde{u}, \tag{2.219}$$

де $\{\widetilde{u}, \pi\}$ – розв'язок задачі (2.145)-(2.149). З теорем 2.4-2.6 випливає, що функція $\Gamma$ визначена коректно і є неперервною.

Введемо функцію випадкового аргументу $\phi : \mathbb{S} \to H \times L^2(0, T; H) \times U(Q_{0,T})$ за правилом

$$\phi(\omega) := \{u_0(\cdot, \omega),\quad F(\cdot, \cdot, \omega),\quad b(\cdot, \cdot, \omega)\},\quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{2.220}$$

Використаємо позначення (2.219) та (2.220) для означення функції $\Psi : \mathbb{S} \to L^\infty(0, T; H) \cap U(Q_{0,T})$ за таким правилом:

$$\Psi(\omega) := \Gamma \circ \phi(\omega) = \Gamma(\phi(\omega)), \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{2.221}$$

Отже, для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ значення $\Psi(\omega)$ дорівнює $\widetilde{u}(\cdot,\cdot,\omega)$, де $\{\widetilde{u},\pi\}$ – розв'язок детермінованої задачі (2.145)-(2.149) з випадковим параметром $\omega$.

**Теорема 2.7.** *Якщо* $F \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;H))$, $u_0 \in L_2(\mathbb{S};H)$, *а також* $b \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;Z_1)) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$, *то задача (2.130)-(2.134) має єдиний розв'язок* $\{\widetilde{u},\pi\}$. *Крім того,*

$$\widetilde{u} \in L_2\big(\mathbb{S}; L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;Z_1)\big), \qquad \widetilde{u} \in L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}). \tag{2.222}$$

*Доведення.* *Крок 1.* Для кожного фіксованого $\omega \in \mathbb{S}$ задача (2.130)-(2.134) має розв'язок в сенсі означення 2.13 як розв'язок детермінованої задачі (2.145)-(2.149) з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$.

Оскільки функція $\phi$ з (2.220) є вимірною, а $\Gamma$ є неперервною, то функція $\Psi$ з (2.221) є вимірною. Отже, $\widetilde{u}$ буде $L^\infty(0,T;H) \cap U(Q_{0,T})$-значною випадковою величиною. Крім того, $\widetilde{u}$ задовольняє такий аналог оцінок (2.174) та (2.176) з доведення теореми 2.4:

$$\int\limits_\Omega |\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2\,dx \le C_{40}\mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{2.223}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^n |\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt \le$$

$$\le C_{40}\mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{2.224}$$

де стала $C_{40} > 0$ не залежить від $\omega, u_0, F, b$,

$$\mathbf{F}(\tau,\omega) = \int\limits_\Omega |u_0(x,\omega)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F(x,t,\omega)|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^n |b_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt, \quad \tau \in (0,T], \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{2.225}$$

Візьмемо в (2.223) суттєвий супремум за $\tau$, а в (2.224) візьмемо $\tau = T$. Оскільки функція $\mathbf{F}(T,\cdot)$ належить до $L_1(\mathbb{S})$, то, зінтегрувавши отримані рівності за змінною $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо існування інтегралів, що гарантують виконання вкладень (2.222).

*Крок 2.* Доведення єдиності проводимо аналогічно як в теоремі 2.6. Аналогічно, як в доведенні теореми 2.5 отримаємо оцінку типу (2.198) з $b_1 = b_2$ та нульовою правою частиною, де $\omega \in \mathbb{S}$ виступатиме як параметр:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2 +$$

$$+ C_{25}|\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt \le 0, \quad \tau\in(0,T], \quad \omega\in\mathbb{S}, \qquad (2.226)$$

де $C_{25} > 0$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, $\{\widetilde{u}_1, \pi_1\}$ та $\{\widetilde{u}_2, \pi_2\}$ – розв'язки задачі (2.130)-(2.134). Зінтегрувавши за $\omega\in\mathbb{S}$, отримаємо звідси, що $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}_2$, наприклад, в сенсі простору $L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$. Затим стандартно показуємо, що $\pi_1 = \pi_2$. □

2.3.3. *Доведення теореми 2.3.* Якщо виконується умова **(W1)**, то функція $b$ має вигляд (2.128), де $b_0 \in C_{\text{div}}$. Тоді існує стала $C_{41} > 0$ така, що для всіх $x\in\Omega$ виконуються оцінки

$$|b_0(x)| \le C_{41}, \quad |(b_0)_{x_i}(x)| \le C_{41}, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (2.227)$$

Тому $|b(x,t,\omega)| \le C_{41}|W(t,\omega)|, \quad |b_{x_i}(x,t,\omega)| \le C_{41}|W(t,\omega)|, \quad i=\overline{1,n}.$ З цих оцінок, аналогічно як при доведенні леми 2.6 показуємо, що

$$\int\limits_{\Pi_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt\,\mathbb{P}\,(d\omega) \le C_{42}. \qquad (2.228)$$

Тому функція $b$ з умови **(W1)** задовольняє умови теореми 2.7.

Оскільки в теоремі 2.7 ми довели існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (2.145)-(2.149), то згідно формули (2.129) та означення 2.14 маємо виконання тверджень теореми 2.3. □

*Висновки до підрозділу 2.3.* У цьому підрозділі розглянуто нелінійну систему Стокса зі змінним показником нелінійності та випадковим збуренням. Показано існування та єдиність її узагальненого розв'язку $\{\widetilde{u}, \pi\}$.

**Висновки до розділу 2.** У розділі 2 досліджено нелінійні системи Стокса різного типу – детерміновані, інтегро-диференціальні та стохастичні. Спершу розглянуто параболічну систему Стокса зі сталими показниками нелінійності та нелокальним оператором пам'яті. У завершальному підрозділі досліджено нелінійну систему Стокса зі змінним показником нелінійності та випадковим збуренням. Доведено існування й єдиність узагальнених розв'язків мішаних задач для розглянутих систем.

Результати розділу опубліковано у статтях [1], [2] та додатково висвітлено у працях [4], [7], [8] та [18].

# 3. РОЗДІЛ
# СИСТЕМИ ОСКОЛКОВА-СТОКСА

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено задачам для систем складнішого за (2.2) вигляду. Зокрема, розглянемо нелінійне входження інтегрального доданку та змінний показник нелінійності, що залежить від всіх незалежних змінних. Запропонуємо підхід до побудови розв'язку системи методом параболічної регуляризації рівняння $\operatorname{div} u = 0$. Такий метод в певному сенсі зручніший при чисельному знаходженні розв'язку систем Стокса.

## 3.1. **Системи рівнянь з малим параметром.**

Нехай $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та виконуються позначення (1.4)-(1.7). Спершу шукатимемо слабкий розв'язок $\{u^\varepsilon, \pi^\varepsilon\}$ задачі

$$u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + g(x,t)\,|u^\varepsilon|^{q(x,t)-2}u^\varepsilon + \Phi\Big(\int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u^\varepsilon(y,t)\,dy\Big) +$$

$$+ \nabla\pi^\varepsilon = F(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon(\pi_t^\varepsilon - \Delta\,\pi^\varepsilon) + \operatorname{div} u^\varepsilon = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{3.2}$$

$$u^\varepsilon|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{3.3}$$

$$\pi^\varepsilon|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{3.4}$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.5}$$

$$\pi^\varepsilon|_{t=0} = \pi_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.6}$$

де $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \ldots, u_n^\varepsilon) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ та $\pi^\varepsilon : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$. Нехай $\varepsilon > 0$ – число, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – лапласіан, $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ – градієнт, $\operatorname{div} u^\varepsilon := \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial x_n}$ – дивергенція, $\mathfrak{Z}$ – $n$-вимірна квадратна матрична функція, $g, q, \Phi, F, f, u_0, \pi_0$ – деякі функції, зокрема, $q$ – змінний показник нелінійності системи (3.1). Ми досліджуємо розв'язність задачі (3.1)-(3.6) та поведінку розв'язків $\{u^\varepsilon, \pi^\varepsilon\}$ цієї задачі при $\varepsilon \to +0$.

У своїй статті [98], Осколков А.П. запропонував апроксимувати систему Нав'є-Стокса певними параболічними системами з малим параметром. Цей підхід є корисним у методах скінченних різниць для розв'язання крайових задач для систем рівнянь типу Нав'є-Стокса (див., наприклад, [98]). Перенесемо ці результати на системи Стокса зі змінним показником нелінійності і назвемо їх *системи Осколкова-Стокса.*

3.1.1. *Формулювання основних результатів.* Нехай $\Lambda_t(Q_{0,T})$ – множина таких функцій $q : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ для яких існують продовження за межами $Q_{0,T}$ (ми знову позначимо їх через $q$), такі, що виконуються наступні умови:

(i) $q \in C(\mathbb{R}_t; L^\infty(\mathbb{R}^n_x)) \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$; (ii) $q_0 > 1$;

(iii) існує така стала $L > 0$, що $|q(x,t) - q(x,s)| \le L|t-s|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Множину функцій $p : (0,T) \to \mathbb{R}$, що задовольняють відповідні умови (i)-(iii) без змінної $x$, позначимо через $\Lambda_t(0,T)$. Припустимо, що виконуються такі умови.

**(G):** $g \in \mathcal{B}_+(Q_{0,T})$; $q \in \Lambda_t\,(Q_{0,T}) \cup \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$, $q_0 > 1$ (див. (1.36));

**(E):** $\mathfrak{Z}$– квадратна матриця порядку $n$ з елементами з $L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$, $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, $\Phi(0) = 0$, $\phi_1, \dots, \phi_n \in C\,(\mathbb{R})$, існує константа $L > 0$ така, що для всіх $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ отримаємо:

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| \le L|\xi_1 - \xi_2|;$$

**(U):** $F \in [L^2(Q_{0,T})]^n$, $u_0 \in H$ (див. позначення (2.12));

**(W):** $f \in L^2(Q_{0,T})$, $\pi_0 \in L^2(\Omega)$.

Введемо такі позначення:

$$Y_1 := H^1_0(\Omega), \quad Y_2 := [H^1_0(\Omega)]^n, \quad Y(t) := Y_2 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad t \in [0,T], \tag{3.7}$$

$$U_1(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Y_1), \tag{3.8}$$

$$U_2(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Y_2) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n. \tag{3.9}$$

Визначимо оператори $A_1 : Y_1 \to Y_1^*$, $A_2 : Y_2 \to Y_2^*$,
$\mathsf{A}_1 : U_1(Q_{0,T}) \to [U_1(Q_{0,T})]^*$ та $\mathsf{A}_2 : L^2(0,T;Y_2) \to L^2(0,T;Y_2^*)$ так:

$$\langle A_1\xi, \eta\rangle_{Y_1} := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}(x)\eta_{x_i}(x)\,dx, \quad \xi, \eta \in Y_1; \tag{3.10}$$

$$\langle A_2 z, w\rangle_{Y_2} := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big(z_{x_i}(x), w_{x_i}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx, \quad z, w \in Y_2; \tag{3.11}$$

$$\langle \mathsf{A}_1 u, v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle A_1 u(t), v(t)\rangle_{Y_1}\,dt, \quad u, v \in U_1(Q_{0,T}); \tag{3.12}$$

$$\langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{U_2(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle A_2 u(t), v(t)\rangle_{Y_2}\,dt, \quad u, v \in U_2(Q_{0,T}). \tag{3.13}$$

Аналогічно як (2.135)-(2.136) визначимо такі оператори:

$$(N(t)z)(x) := g(x,t)|z(x)|^{q(x,t)-2}z(x), \tag{3.14}$$

$z = z(x)\,,\ x \in \Omega\,,\ t \in (0,T)\,;$

$$(\mathsf{N}u)(x,t) := \big(N(t)u(t)\big)(x) = g(x,t)|u(x,t)|^{q(x,t)-2}u(x,t), \tag{3.15}$$

$u = u(x,t),\ \ (x,t) \in Q_{0,T}$. Нехай (див. також (2.20)-(2.21))

$$(E(t)z)(x) := \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)\,dy, \tag{3.16}$$

$z = z(x)\,,\ x \in \Omega\,,\ t \in (0,T)\,;$

$$(\mathsf{E}u)(x,t) := \big(E(t)u(t)\big)(x) = \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy, \tag{3.17}$$

$u = u(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_{0,T}\,.$

Як і (2.22)-(2.23), використовуватимемо позначення (2.9) та такі оператори $S_2(t) : Y(t) \to [Y(t)]^*$ та $\mathsf{S}_2 : U_2(Q_{0,T}) \to [U_2(Q_{0,T})]^*$:

$$\langle S_2(t)z, w\rangle_{Y(t)} := \langle A_2(t)z, w\rangle_{Y_2} +$$

$$+ (N(t)z, w)_{\Omega} + (E(t)z, w)_{\Omega}, \quad z, w \in Y(t), \quad t \in (0,T); \tag{3.18}$$

$$\langle \mathsf{S}_2 u, v\rangle_{U_2(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Y_2)} +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(\mathsf{N}u)(x,t) + (\mathsf{E}u)(x,t)\Big]v(x,t)\,dxdt, \quad u, v \in U_2(Q_{0,T}). \tag{3.19}$$

**Зауваження 3.1.** *Для гладких функцій* $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^1$ *та* $z : \Omega \to \mathbb{R}^n$, *таких що* $z|_{\partial\Omega} = 0$ *матимемо*

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\pi, z)_{\mathbb{R}^n}\,dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{n} \pi_{x_l} z_l\,dx = -\int\limits_{\Omega} \pi \sum_{l=1}^{n} (z_l)_{x_l}\,dx = -\int\limits_{\Omega} \pi\,\mathrm{div}\,z\,dx.$$

Використавши Зауваження 3.1, дамо наступне означення.

**Означення 3.1.** *Пара функцій* $\{u^{\varepsilon}, \pi^{\varepsilon}\}$ *називається узагальненим розв'язком задачі (3.1)-(3.6) якщо,*

$$u^{\varepsilon} \in U_2(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; [L^2(\Omega)]^n), \quad u^{\varepsilon}_t \in [U_2(Q_{0,T})]^*,$$

$$\pi^{\varepsilon} \in U_1(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \pi^{\varepsilon}_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*;$$

*для всіх* $w \in U_2(Q_{0,T})$, $\eta \in U_1(Q_{0,T})$ *та* $\tau \in (0,T]$ *отримаємо, що*

$$\langle u_t^\varepsilon, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U_2(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^\varepsilon, w_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u^\varepsilon, w)_{\mathbb{R}^n} + (\Phi(\mathsf{E}u^\varepsilon), w)_{\mathbb{R}^n} -$$

$$- \pi^\varepsilon \operatorname{div} w\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F, w)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt, \qquad (3.20)$$

$$\varepsilon\langle \pi_t^\varepsilon, \chi_{0,\tau}\eta\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\varepsilon \sum_{i=1}^n \pi_{x_i}^\varepsilon \eta_{x_i} + \eta \operatorname{div} u^\varepsilon\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (f, \eta)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt; \quad (3.21)$$

*також виконуються початкові умови (3.5)-(3.6).*

**Теорема 3.1.** *Нехай* $\varepsilon > 0$ *і виконується умова* ***(G)-(E)****. Тоді задача (3.1)-(3.6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку* $\{u^\varepsilon, \pi^\varepsilon\}$.

Нехай $\Delta^0 v := v$, $\Delta^1 v := \Delta v$ – лапласіан, $\Delta^s v := \Delta(\Delta^{s-1} v)$, $s \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_s := \{v \in H^{2s}(\Omega) \ \mid \ v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = \ldots = \Delta^{s-1} v|_{\partial\Omega} = 0\}, \qquad (3.22)$$

$$\mathcal{W}_s^* := [\mathcal{W}_s]^*. \qquad (3.23)$$

Припустимо, що

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big), \quad h := \min\Big\{2,\ \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \qquad (3.24)$$

Зауважимо, що якщо параметр $s$ задовольняє умову (3.24), то матимемо вкладення $[\mathcal{W}_s]^n \overset{c}{\circlearrowright} [H_0^1(\Omega) \cap L^{q^0}(\Omega)]^n \overset{c}{\circlearrowright} Y(t)$, $t \in [0,T]$.

**Теорема 3.2.** *Нехай* $s$ *взято з (3.24),* $\partial\Omega \in C^{2s}$, $\varepsilon > 0$, *і виконуються умови* ***(G)-(W)****. Тоді задача (3.1)-(3.6) має узагальнений розв'язок* $\{u^\varepsilon, \pi^\varepsilon\}$.

Якщо $f \equiv 0$, $\varepsilon = 0$, $u := u^0$ та $\pi := \pi^0$, то з (3.1)-(3.3) та (3.5) отримаємо

$$u_t - \Delta u + g(x,t)\, |u|^{q(x,t)-2} u + \Phi\Big(\int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y) u(y,t)\, dy\Big) +$$

$$+ \nabla\pi = F(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \qquad (3.25)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \qquad (3.26)$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad (3.27)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \qquad (3.28)$$

Нехай множини соленоїдальних функцій (функцій, для яких виконується умова нестискуваності $\operatorname{div} u = 0$) $C_{\mathrm{div}}$, $H$, $Z_s$ ($s \in \mathbb{N}$) та $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ взято з (2.11)-(2.13), (2.38). Зокрема, нехай $H$ – замикання множини $C_{\mathrm{div}}$ в $[L^2(\Omega)]^n$, $Z_1$ – замикання $C_{\mathrm{div}}$ в $[H^1(\Omega)]^n$. Нехай виконуються позначення (2.38), (2.125)-(2.127), зокрема,

$$V(t) := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad t \in [0,T]; \tag{3.29}$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n. \tag{3.30}$$

Оскільки $Z_1$ та $[L^{q(x,t)}(\Omega)]^n$ неперервно вкладені в локально-опуклий простір $[L^1(\Omega)]^n$ (див. [65, с. 17]), то із Зауваження 5.12 [65, с. 22] отримаємо, що простір $V(t)$ є банаховим зі стандартною нормою перетину просторів. Легко показати, що $V(t)$ рефлексивний і сепарабельний. Проведемо аналогічні міркування для $U(Q_{0,T})$. Зауважимо також, що якщо $s$ та $h$ взято з (3.24), то $Z_s \overline{\circlearrowleft} (Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n) \overline{\circlearrowleft} V(t)$, $H^{-1}(\Omega) \circlearrowleft W^{-1,h}(\Omega)$ та $L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} W^{-1,h}(\Omega)$.

Розглянемо також простір

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \quad | \quad u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\} \tag{3.31}$$

з нормою $||u; W(Q_{0,T})|| := ||u; U(Q_{0,T})|| + ||u_t; [U(Q_{0,T})]^*||$. Тут $u_t$ означає похідну за часом в сенсі розподілів, яка визначається за правилом

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}_{\mathrm{div}}} := -\int\limits_{Q_{0,T}} u(x,t)\varphi_t(x,t)\, dxdt, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathrm{div}}. \tag{3.32}$$

Згідно [75, с. 172] маємо виконання формули інтегрування частинами для функцій з $W(Q_{0,T})$ та вкладення $W(Q_{0,T}) \subset C([0,T];H)$.

**Означення 3.2.** *Пара функцій $\{u, \pi\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (3.25)-(3.28), якщо*

$$u \in W(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; Z_s^*), \quad \pi \in W^{-1,h}(0,T; L^h(\Omega));$$

*для всіх $w \in U(Q_{0,T})$ та $\tau \in (0,T]$ отримаємо, що виконується*

$$\langle u_t, \chi_{0,\tau} w \rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}, w_{x_i})_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (\mathsf{N}u, w)_{\mathbb{R}^n} + (\Phi(\mathsf{E}u), w)_{\mathbb{R}^n} - (F, w)_{\mathbb{R}^n} \Big]\, dxdt = 0; \tag{3.33}$$

*виконується початкова умова (3.28); $\pi$ задовольняє (3.25) в сенсі простору $D^*(Q_{0,T})$.*

**Теорема 3.3.** *Нехай $s$ взято з (3.24), $\partial\Omega \in C^{2s}$, і виконуються умови **(G)-(U)**. Тоді задача (3.25)-(3.28) має узагальнений розв'язок $\{u, \pi\}$. Крім того: і) $u$ буде границею підпослідовності з множини $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, де кожне $u^\varepsilon$ взято з Теореми 3.2; іі) у сенсі простору $D^*(0,T)$ виконується рівність*

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\, dx = 0. \tag{3.34}$$

Класичні системи Стокса зі змінними показниками нелінійності та інтегро-диференціальними членами розглядали у працях [62], [77], [93] та [109]. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів праці Бугрія О.М. [39], де розглянуті деякі системи Стокса зі змінним показником нелінійності, що не залежить від $t$. Задача (3.25)-(3.28) для системи Стокса зі змінними показниками нелінійності раніше не розглядалася.

3.1.2. *Допоміжні факти.* Зрозуміло, що (див., зокрема, [12, с. 168])

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{3.35}$$

$$|\gamma_1 + \ldots + \gamma_m|^{\mathfrak{p}} \leq m^{\mathfrak{p}-1}(|\gamma_1|^{\mathfrak{p}} + \ldots + |\gamma_m|^{\mathfrak{p}}), \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

**Твердження 3.1** (аналог леми Фату [36], с. 58, 63). *Нехай $B$ – банахів простір. Якщо $z^j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ слабко, чи $*$-слабко в просторі $B$, то виконується така нерівність: $||z||_B \leq \varliminf\limits_{j\to\infty} ||z^j||_B$.*

**Твердження 3.2** (лема 2 [41], с. 134). *Припустимо, що оператори Немицького $N$ та $\mathsf{N}$ визначено в (3.14)-(3.15). Якщо виконується умова **(G)**, то $N : [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n \to [L^{q'(x,t)}(\Omega)]^n$ та $\mathsf{N} : [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n \to [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n$ – обмежені та неперервні оператори.*

Нехай $\mathcal{W}_s$ взято з (3.22), $s \in \mathbb{N}$. Легко перевірити, що $\mathcal{W}_s$ є рефлексивним гільбертовим простором відносно скалярного добутку

$$(u, v)_{\mathcal{W}_s} := (\Delta^s u, \Delta^s v)_\Omega, \quad u, v \in \mathcal{W}_s.$$

**Твердження 3.3** (лема 3 [91], с. 229). *Якщо $\partial\Omega \subset C^{2s}$, то існує стала $C_1 > 0$ така, що для кожного $v \in \mathcal{W}_s$ виконується нерівність:*

$$||v; H^{2s}(\Omega)|| \leq C_1 ||\Delta^s v; L^2(\Omega)||. \tag{3.37}$$

Твердження 3.3 означає, що $\mathcal{W}_s \circlearrowleft H^{2s}(\Omega)$, $\mathcal{W}_s \overset{-}{\circlearrowleft} L^2(\Omega) \overset{-}{\circlearrowleft} [\mathcal{W}_s]^*$.

Нехай $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ – ортонормована база простору $L^2(\Omega)$, яка складається з усіх власних функцій задачі

$$-\Delta\, v = \lambda\, v \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.38}$$

та $\{\lambda_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ – множина відповідних власних значень.

**Твердження 3.4** (Теорема 8 [91], с. 230)**.** *Якщо $\partial\Omega \subset C^{2s}$, то множина $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}_s$ усіх власних функцій задачі (3.38) є базою в просторі $\mathcal{W}_s$.*

**Лема 3.1.** *Якщо $\partial\Omega \subset C^{2s}$, $\ell \in \mathbb{N}$, то існує база $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset [\mathcal{W}_s]^\ell$ простору $[\mathcal{W}_s]^\ell$. Крім того, для кожного $\mu \in \mathbb{N}$, всі, крім однієї координати вектор-функції $w^\mu$ дорівнюють нулю, а ненульова координата $w^\mu$ є власною функцією задачі (3.38).*

*Доведення.* Для зручності розглянемо лише випадок $\ell = 2$. Нехай $s \in \mathbb{N}$ і множина $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}_s$ взяті з Твердження 3.4. Тоді для всіх $v \in \mathcal{W}_s$ існує послідовність $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що $v_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $\mathcal{W}_s$ і для всіх $m \in \mathbb{N}$ отримаємо $v_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k^m\, v^k(x)$, $x \in \Omega$, де $\gamma_1^m, \ldots, \gamma_m^m \in \mathbb{R}$. Тоді, для всіх $(v, z) \in [\mathcal{W}_s]^2$ ми можемо знайти $\{(v_m, z_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ таку, що $(v_m, z_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (v, z)$ в $[\mathcal{W}_s]^2$ і для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\Big(v_m(x), z_m(x)\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^m\, v^k(x),\ \sum_{k=1}^{m} \widetilde{\gamma_k^m}\, v^k(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^m (v^k(x), 0) + \sum_{k=1}^{m} \widetilde{\gamma_k^m} (0, v^k(x)),\ x \in \Omega,$$

де, $\gamma_1^m, \ldots, \gamma_m^m, \widetilde{\gamma_1^m}, \ldots, \widetilde{\gamma_m^m} \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\{z \mid z = (v^k, 0)$ чи $z = (0, v^k)$, $k \in \mathbb{N}\}$ є зліченою множиною. $\square$

Знову розглянемо оператори проектування типу (2.26). Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертовий простір, $\mathcal{V}$ – рефлексивний сепарабельний банахів простір,

$$\mathcal{V} \overset{-}{\circlearrowleft} \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \overset{-}{\circlearrowleft} \mathcal{V}^*. \tag{3.39}$$

Нагадаємо, що якщо $g \in \mathcal{V}^*$ і, крім того, $g \in \mathcal{H}$, то

$$\langle g, v\rangle_{\mathcal{V}} = (g, v)_{\mathcal{H}}, \quad v \in \mathcal{V}. \tag{3.40}$$

Нехай $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база $\mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$ – деяке фіксоване число, $\mathfrak{M}$ – лінійна оболонка $\{w^1, \dots, w^m\}$. Визначимо оператор $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ рівністю (див. (2.26) та [112, с. 527])

$$P_m h = \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_{\mathcal{H}}\, w^j, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{3.41}$$

Тоді $P_m$ є (єдиним) ортогональним проектором $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{M}$. Крім того, $P_m$ – самоспряжений оператор, а з теореми 7.3.6 [112, с. 515] маємо неперервність $P_m$ і нерівність

$$|P_m h|_{\mathcal{H}} \le |h|_{\mathcal{H}}, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{3.42}$$

**Зауваження 3.2.** *Якщо* $\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^n$, $\mathcal{V} = [H^r(\Omega)]^n$, *то формула (3.41) набуде вигляду*

$$(P_m u)(x) = \sum_{j=1}^{m} (u, w^j)_{[L^2(\Omega)]^n}\, w^j(x), \quad x \in \Omega, \quad u : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

Нехай, додатково, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$. Поряд з оператором $P_m \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ розглядатимемо, взагалі кажучи, несамоспряжений оператор $\widehat{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ визначений так:

$$\widehat{P}_m v = P_m v \quad \text{для всіх} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{3.44}$$

Спряжений до $\widehat{P}_m$ оператор позначимо $\widehat{P}_m^*$. Можна показати, що

$$\widehat{P}_m^* z = \sum_{j=1}^{m} \langle z, w^j \rangle_{\mathcal{V}}\, w^j, \quad z \in \mathcal{V}^*, \tag{3.45}$$

і тому оператор $\widehat{P}_m^* : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ насправді переводить $\mathcal{V}^*$ в $\mathcal{V}$.

Можна довести, що при нашому виборі $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ оператор $\widehat{P}_m$ належить $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, тобто

$$|\widehat{P}_m v|_{\mathcal{V}} \le |v|_{\mathcal{V}}, \quad v \in \mathcal{V}. \tag{3.46}$$

Розглянемо тепер функції, залежні і від $t \in [0, T]$. Якщо $f \in L^s(0, T; \mathcal{H})$, $s > 1$, $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ задано в (3.41), то $P_m f(t) \in \mathcal{H}$ для $t \in [0, T]$,

$$P_m f(t) = \sum_{j=1}^{m} (f(t), w^j)_{\mathcal{H}}\, w^j, \tag{3.47}$$

і з (3.42) випливає оцінка

$$||P_m f||_{L^s(0,T;\mathcal{H})} \le ||f||_{L^s(0,T;\mathcal{H})}, \quad f \in L^s(0, T; \mathcal{H}), \tag{3.48}$$

а з (3.46) – оцінка

$$||\widehat{P}_m u||_{L^s(0,T;\mathcal{V})} \le ||u||_{L^s(0,T;\mathcal{V})}, \quad u \in L^s(0,T;\mathcal{V}), \quad s>1. \tag{3.49}$$

Оскільки $||D^*||_{\mathcal{L}(B^*,A^*)} = ||D||_{\mathcal{L}(A,B)}$, $D \in \mathcal{L}(A,B)$, то з (3.49) для всіх $s>1$ матимемо оцінку

$$||\widehat{P}_m^* f; L^{\frac{s}{s-1}}(0,T;\mathcal{V}^*)|| \le ||f; L^{\frac{s}{s-1}}(0,T;\mathcal{V}^*)||, \quad f \in L^{\frac{s}{s-1}}(0,T;\mathcal{V}^*). \tag{3.50}$$

Отже, матимемо таке твердження.

**Твердження 3.5** (див. [40], с. 866, 880)**.** *Нехай $\partial\Omega \subset C^{2s}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $P_m$ та $\widehat{P}_m$ визначені в (2.26) і (2.27) відповідно, де $\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^\ell$, $\mathcal{V} = [\mathcal{W}_s]^\ell$, $s \in \mathbb{N}$, $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база простору $\mathcal{H}$, взята з Леми 3.1. Тоді, для всіх $w \in L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^\ell)$ та $r>1$, отримаємо наступну нерівність*

$$||\widehat{P}_m^* w; L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^\ell)|| \le ||w; L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^\ell)||. \tag{3.51}$$

**Лема 3.2.** *Якщо виконується умова **(E)**, то для кожного $r>1$ існує стала $C_2>0$, така що, для кожного $u_1,u_2 \in [L^r(Q_{0,T})]^n$ отримаємо*

$$||\Phi(\mathsf{E}u_1) - \Phi(\mathsf{E}u_2); [L^r(Q_{0,T})]^n|| \le C_2 ||u_1-u_2; [L^r(Q_{0,T})]^n||. \tag{3.52}$$

*Доведення.* Використавши умову **(E)** і нерівність Гельдера, отримаємо

$$||\Phi(\mathsf{E}u_1) - \Phi(\mathsf{E}u_2); [L^r(Q_{0,T})]^n||^r = \Big(\sum_{l=1}^n ||\phi_l(\mathsf{E}u_1) - \phi_l(\mathsf{E}u_2); L^r(Q_{0,T})||\Big)^r \le$$

$$\le C_3 \sum_{l=1}^n \int\limits_{Q_{0,T}} |\phi_l(\mathsf{E}u_1) - \phi_l(\mathsf{E}u_2)|^r \, dxdt \le$$

$$\le C_4 \int\limits_{Q_{0,T}} |\Phi(\mathsf{E}u_1) - \Phi(\mathsf{E}u_2)|^r \, dxdt \le C_4 L^r \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{E}u_1 - \mathsf{E}u_2|^r \, dxdt =$$

$$= C_4 L^r \int\limits_{Q_{0,T}} \Big| \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)\Big(u_1(y,t) - u_2(y,t)\Big)\, dy\Big|^r \, dxdt \le$$

$$\le C_5 \int\limits_{Q_{0,T}} \Big| \int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n \cdot |u_1(y,t) - u_2(y,t)| \, dy\Big|^r dxdt \le C_6 \int\limits_{Q_{0,T}} |u_1-u_2|^r \, dydt$$

і виконується (3.52). $\square$

**Лема 3.3.** *Нехай виконується умова* ***(G)*** *і позначення (2.127),* $z \in V_+$, $w^1, \ldots, w^m \in V_+$, $m \in \mathbb{N}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ *та* $w(x,\xi) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \xi_\mu w^\mu(x)$, $x \in \Omega$. *Тоді функція*

$$I(t,\xi) := \int\limits_\Omega \Big( G(x,t)|w(x,\xi)|^{q(x,t)-2} w(x,\xi), z(x) \Big)_{\mathbb{R}^n} \, dx, \qquad (3.53)$$

$t \in (0,T)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, *задовольняє* $L^\infty$*-умову Каратеодорі.*

Опустимо доведення, бо воно аналогічне доведенню леми 3.25 [40, с. 874].

**Лема 3.4.** *Нехай виконується умова* ***(E)***, $z \in [L^2(\Omega)]^n, w^1, \ldots, w^m \in [L^2(\Omega)]^n$, $m \in \mathbb{N}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $w(x,\xi) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \xi_\mu w^\mu(x)$, $x \in \Omega$, *оператор* $\mathsf{E}$ *взято з (3.17). Тоді функція*

$$J(t,\xi) := \int\limits_\Omega \Big( \Phi\big((\mathsf{E}w(\cdot,\xi))(x,t)\big), \, z(x) \Big)_{\mathbb{R}^n} \, dx, \quad t \in (0,T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \qquad (3.54)$$

*задовольняє* $L^\infty$*-умову Каратеодорі.*

Опустимо доведення, бо воно аналогічне доведенню леми 3.27 [40, с. 875].

**Лема 3.5.** *Нехай виконуються умови* ***(G)-(E)***, *позначення (2.9),* $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Y_2$, $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Y_1$, $m \in \mathbb{N}$, $L = col(L^1_1, \ldots, L^1_m, L^2_1, \ldots, L^2_m)$, *де*

$$L^1_\mu(t,\xi) := \langle A_2 z^m, w^\mu \rangle_{Y_2} + (N(t)z^m, w^\mu)_\Omega + (\Phi(E(t)z^m), w^\mu)_\Omega - (s^m, \operatorname{div} w^\mu)_\Omega,$$

$$L^2_\mu(t,\xi) := \varepsilon \langle A_1 s^m, v^\mu \rangle_{Y_1} + (\operatorname{div} z^m, v^\mu)_\Omega,$$

$\mu = \overline{1,m}$, $t \in (0,T)$, $\xi = (\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_m, \widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_m) \in \mathbb{R}^m$, $z^m(x) := \sum_{\mu=1}^m \widehat{\varphi}_\mu w^\mu(x)$, $s^m(x) := \sum_{\mu=1}^m \widehat{\psi}_\mu v^\mu(x)$, $x \in \Omega$. *Тоді,*

$$\Big( L(t,\xi), \xi \Big)_{\mathbb{R}^{2m}} \geq \int\limits_\Omega \Big[ \sum_{i=1}^n |z^m_{x_i}|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^n |s^m_{x_i}|^2 + g_0 |z^m|^{q(x,t)} - L E^0 |z^m|^2 \Big] \, dx, \quad (3.55)$$

$t \in (0,T)$, *де* $L$ *взято з умови* ***(E)***, $E^0$ *взято з Леми 2.2 (також див. позначення типу (1.20) ).*

*Доведення.* Очевидно, що

$$\Big( L(t,\xi), \xi \Big)_{\mathbb{R}^{2m}} = \sum_{\mu=1}^m L^1_\mu(t,\xi) \widehat{\varphi}_\mu + \sum_{\mu=1}^m L^2_\mu(t,\xi) \widehat{\psi}_\mu = \Big\langle A_2 z^m, \sum_{\mu=1}^m \widehat{\varphi}_\mu w^\mu \Big\rangle_{Y_2} +$$

$$+\Big(N(t)z^m,\sum_{\mu=1}^m\widehat{\varphi}_\mu w^\mu\Big)_\Omega+\Big(\Phi(E(t)z^m),\sum_{\mu=1}^m\widehat{\varphi}_\mu w^\mu\Big)_\Omega-\Big(s^m,\operatorname{div}\sum_{\mu=1}^m\widehat{\varphi}_\mu w^\mu\Big)_\Omega+$$

$$+\,\varepsilon\Big\langle A_1 s^m,\sum_{\mu=1}^m\widehat{\psi}_\mu v^\mu\Big\rangle_{Y_1}+\Big(\operatorname{div}z^m,\sum_{\mu=1}^m\widehat{\psi}_\mu v^\mu\Big)_\Omega=$$

$$=\langle A_2 z^m,z^m\rangle_{Y_2}+(N(t)z^m,z^m)_\Omega+\Big(\Phi(E(t)z^m),z^m\Big)_\Omega+\varepsilon\langle A_1 s^m,s^m\rangle_{Y_1}.$$

Тоді, отримаємо

$$\Big(L(t,\xi),\xi\Big)_{\mathbb{R}^{2m}}=\int\limits_\Omega\Big[\sum_{i=1}^n(z^m_{x_i}(x),z^m_{x_i}(x))_{\mathbb{R}^n}+\sum_{l=1}^n g(x,t)|z^m(x)|^{q(x,t)-2}|z^m_l(x)|^2+$$

$$+\Big(\Phi(E(t)z^m(x)),z^m(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}+\varepsilon\sum_{i=1}^n s^m_{x_i}(x)s^m_{x_i}(x)\Big]\,dx\geq\int\limits_\Omega\Big[\sum_{i=1}^n|z^m_{x_i}|^2+$$

$$+\,\varepsilon\sum_{i=1}^n|s^m_{x_i}|^2+g_0|z^m|^{q(x,t)}\Big]\,dx-\int\limits_\Omega\Big|\Big(\Phi(E(t)z^m),z^m\Big)_{\mathbb{R}^n}\Big|\,dx. \qquad (3.56)$$

Для наступного доданка використаємо умову **(E)** і оцінку (2.45):

$$\int\limits_\Omega\Big|\Big(\Phi(E(t)z^m),z^m\Big)_{\mathbb{R}^n}\Big|\,dx\leq L\int\limits_\Omega|E(t)z^m|\cdot|z^m|\,dx\leq$$

$$\leq L||\,|E(t)z^m|;L^2(\Omega)||\cdot||\,|z^m|;L^2(\Omega)||\leq$$

$$\leq LE^0||\,|z^m|;L^2(\Omega)||\cdot||\,|z^m|;L^2(\Omega)||=LE^0\int\limits_\Omega|z^m|^2\,dx. \qquad (3.57)$$

Використавши (3.57), з (3.56) отримаємо (3.55). $\square$

3.1.3. *Доведення основних теорем.* Доведемо основні твердження.

*Доведення Теореми 3.1.* Нехай $\{u^{1,\varepsilon},\pi^{1,\varepsilon}\}$ та $\{u^{2,\varepsilon},\pi^{2,\varepsilon}\}$ узагальнені розв'язки задачі (3.1)-(3.6). Нехай $u^\varepsilon=u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon}$, $\pi^\varepsilon=\pi^{1,\varepsilon}-\pi^{2,\varepsilon}$.

Запишимо (3.20)-(3.21) для $\{u^{1,\varepsilon},\pi^{1,\varepsilon}\}$:

$$\langle u^{1,\varepsilon}_t,\chi_{0,\tau}w\rangle_{U_2(Q_{0,T})}+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^n(u^{1,\varepsilon}_{x_i},w_{x_i})_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+(\mathsf{N}u^{1,\varepsilon},w)_{\mathbb{R}^n}+(\Phi(\mathsf{E}u^{1,\varepsilon}),w)_{\mathbb{R}^n}-\pi^{1,\varepsilon}\operatorname{div}w-(F,w)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt=0, \qquad (3.58)$$

$$\varepsilon\langle\pi^{1,\varepsilon}_t,\chi_{0,\tau}\eta\rangle_{U_1(Q_{0,T})}+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\varepsilon\sum_{i=1}^n\pi^{1,\varepsilon}_{x_i}\eta_{x_i}+\eta\operatorname{div}u^{1,\varepsilon}-(f,\eta)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt=0. \quad (3.59)$$

Запишимо (3.20)-(3.21) для $\{u^{2,\varepsilon}, \pi^{2,\varepsilon}\}$:

$$\langle u_t^{2,\varepsilon}, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U_2(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^{2,\varepsilon}, w_{x_i})_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (\mathsf{N}u^{2,\varepsilon}, w)_{\mathbb{R}^n} + (\Phi(\mathsf{E}u^{2,\varepsilon}), w)_{\mathbb{R}^n} - \pi^{2,\varepsilon} \operatorname{div} w - (F, w)_{\mathbb{R}^n} \Big] \, dxdt = 0, \qquad (3.60)$$

$$\varepsilon \langle \pi_t^{2,\varepsilon}, \chi_{0,\tau} \eta\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{2,\varepsilon} \eta_{x_i} + \eta \operatorname{div} u^{2,\varepsilon} - (f, \eta)_{\mathbb{R}^n} \Big] \, dxdt = 0. \quad (3.61)$$

Віднявши (3.60) від (3.58) і (3.61) від (3.59), отримаємо:

$$\langle u_t^{\varepsilon}, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U_2(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^{\varepsilon}, w_{x_i})_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \Big( \mathsf{N}u^{1,\varepsilon} - \mathsf{N}u^{2,\varepsilon}, w \Big)_{\mathbb{R}^n} + \Big( \Phi(\mathsf{E}u^{1,\varepsilon}) - \Phi(\mathsf{E}u^{2,\varepsilon}), w \Big)_{\mathbb{R}^n} - \pi^{\varepsilon} \operatorname{div} w \Big] \, dxdt = 0, \quad (3.62)$$

$$\varepsilon \langle \pi_t^{\varepsilon}, \chi_{0,\tau} \eta\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{\varepsilon} \eta_{x_i} + \eta \operatorname{div} u^{\varepsilon} \Big] \, dxdt = 0. \qquad (3.63)$$

Візьмемо $w = u^{\varepsilon}$ в (3.62) і $\eta = \pi^{\varepsilon}$ в (3.63). Додавши отримані рівності, отримаємо

$$\langle u_t^{\varepsilon}, \chi_{0,\tau} u^{\varepsilon}\rangle_{U_2(Q_{0,T})} + \varepsilon \langle \pi_t^{\varepsilon}, \chi_{0,\tau} \pi^{\varepsilon}\rangle_{U_1(Q_{0,T})} +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{\varepsilon}|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\pi_{x_i}^{\varepsilon}|^2 \Big] \, dxdt + I_1 = I_2, \qquad (3.64)$$

де

$$I_1 := \int\limits_{Q_{0,\tau}} g(|u^{1,\varepsilon}|^{q(x,t)-2} u^{1,\varepsilon} - |u^{2,\varepsilon}|^{q(x,t)-2} u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon})_{\mathbb{R}^n} \, dxdt \geq 0,$$

$$I_2 := - \int\limits_{Q_{0,\tau}} (\Phi(\mathsf{E}u^{1,\varepsilon}) - \Phi(\mathsf{E}u^{2,\varepsilon}), u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon})_{\mathbb{R}^n} \, dxdt.$$

З умови **(E)**, нерівності Коші-Буняковського-Шварца і (2.46) отримаємо

$$|I_2| \leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\Phi(\mathsf{E}u^{1,\varepsilon}) - \Phi(\mathsf{E}u^{2,\varepsilon})| \cdot |u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}| \, dxdt \leq$$

$$\leq L \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\mathsf{E}u^{1,\varepsilon} - \mathsf{E}u^{2,\varepsilon}| \cdot |u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}| \, dxdt \leq$$

$$\leq L\Big(\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\mathsf{E}(u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon})|^2\,dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon}|^2\,dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= L||\,|\mathsf{E}(u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon})|;L^2(Q_{0,\tau})||\times$$

$$\times||\,|u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon}|;L^2(Q_{0,\tau})||\leq LE^0||\,|u^{1,\varepsilon}-u^{2,\varepsilon}|;L^2(Q_{0,\tau})||^2 = LE^0\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u^\varepsilon|^2\,dxdt.$$

Очевидно, що (див. [23, §1.4], Лема 4.5 [23, с. 119] та [16, с. 46-52])

$$\langle u^\varepsilon_t,\chi_{0,\tau}u^\varepsilon\rangle_{U_2(Q_{0,T})}+\varepsilon\langle\pi^\varepsilon_t,\chi_{0,\tau}\pi^\varepsilon\rangle_{U_1(Q_{0,T})}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^\varepsilon|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\pi^\varepsilon|^2\,dx\geq\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^\varepsilon|^2\,dx.$$

Тоді, з (3.64) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^\varepsilon|^2\,dx\leq LE^0\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u^\varepsilon|^2\,dxdt,\ \tau\in(0,T].$$

Використавши лему Гронуола-Белмана, матимемо, що $\int_{\Omega_\tau}|u^\varepsilon|^2\,dx\leq 0$ для $\tau\in(0,T]$. Отже, $u^{1,\varepsilon}=u^{2,\varepsilon}$ і з (3.64) отримаємо $\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_\tau}|\pi^\varepsilon|^2\,dx\leq 0$ for $\tau\in(0,T]$. Таким чином $\pi^{1,\varepsilon}=\pi^{2,\varepsilon}$ і Теорему 3.1 доведено. □

*Доведення Теореми 3.2.* Розв'язок будемо будувати за допомогою методу Фаедо-Гальоркіна.

Крок 1 (побудова наближень). Припустимо, що $s$ задовольняє (3.24), $\mathcal{W}_s$ візьмемо з (3.22), $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}\subset[\mathcal{W}_s]^n$ з Леми 3.1 для $\ell=n$, множина $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{W}_s$ взята з Твердження 3.4. Для простоти припускаємо, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ ортонормована в $[L^2(\Omega)]^n$ і $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Зауважимо, що виконуються вкладення

$$[\mathcal{W}_s]^n \circlearrowright Y_2,\qquad \mathcal{W}_s\circlearrowright Y_1. \tag{3.65}$$

Нехай

$$u^{\varepsilon,m}(x,t):=\sum_{k=1}^m\varphi^{\varepsilon,m}_k(t)w^k(x),\quad \pi^{\varepsilon,m}(x,t):=\sum_{k=1}^m\psi^{\varepsilon,m}_k(t)v^k(x),\quad (x,t)\in Q_{0,T},$$

$m\in\mathbb{N}$, де невідомі функції $\varphi^{\varepsilon,m}_1,\ldots,\varphi^m_{\varepsilon,m}$, $\psi^{\varepsilon,m}_1,\ldots,\psi^m_{\varepsilon,m}$ задовольняють

$$(u^{\varepsilon,m}_t(t),w^\mu)_\Omega+\langle A_2u^{\varepsilon,m}(t),w^\mu\rangle_{Y_2}+(N(t)u^{\varepsilon,m}(t),w^\mu)_\Omega+(\Phi(E(t)u^{\varepsilon,m}(t)),w^\mu)_\Omega-$$

$$-(\pi^{\varepsilon,m}(t),\operatorname{div}w^\mu)_\Omega=(F(t),w^\mu)_\Omega,\quad t\in(0,T),\quad \mu=\overline{1,m}, \tag{3.66}$$

$$\varepsilon(\pi_t^{\varepsilon,m}(t),v^\mu)_\Omega+\varepsilon\langle A_1\pi^{\varepsilon,m}(t),v^\mu\rangle_{Y_1}+(\operatorname{div}u^{\varepsilon,m}(t),v^\mu)_\Omega=$$

$$=(f(t),v^\mu)_\Omega,\quad t\in(0,T),\quad \mu=\overline{1,m}, \tag{3.67}$$

$$\varphi_1^{\varepsilon,m}(0)=\alpha_1^m,\quad \dots,\quad \varphi_m^{\varepsilon,m}(0)=\alpha_m^m, \tag{3.68}$$

$$\psi_1^{\varepsilon,m}(0)=\beta_1^m,\quad \dots,\quad \psi_m^{\varepsilon,m}(0)=\beta_m^m. \tag{3.69}$$

Тут числа $\alpha_1^m,\dots,\alpha_m^m$, $\beta_1^m,\dots,\beta_m^m\in\mathbb{R}$ вибираємо так, що $u_0^{\varepsilon,m}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u_0$ сильно в $[L^2(\Omega)]^n$, $\pi_0^{\varepsilon,m}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\pi_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, де

$$u_0^m(x):=\sum_{\mu=1}^m\alpha_\mu^m w^\mu(x),\quad \pi_0^m(x):=\sum_{\mu=1}^m\beta_\mu^m v^\mu(x),\quad x\in\Omega.$$

Зрозуміло, що виконуються наступні умови: $u^{\varepsilon,m}(0)=u_0^m$, $\pi^{\varepsilon,m}(0)=\pi_0^m$.

Покажемо, що вказані функції існують. Нехай

$$\xi=col(\varphi_1^{\varepsilon,m},\dots,\varphi_m^{\varepsilon,m},\psi_1^{\varepsilon,m},\dots,\psi_m^{\varepsilon,m}),\qquad \xi_0=col(\alpha_1^m,\dots,\alpha_m^m,\beta_1^m,\dots,\beta_m^m),$$

$L-$ функція з Леми 3.5. Тоді задача (3.66)-(3.69) набуде вигляду (2.34), де

$$M(t)=col\big((F(t),w^1)_\Omega,\dots,(F(t),w^m)_\Omega,(f(t),v^1)_\Omega,\dots,(f(t),v^m)_\Omega\big).$$

Аналогічно до Леми 3.25 та 3.27 [40, с. 874-875] доведемо, що $L$ задовольняє $L^\infty$-умову Каратеодорі. З умов **(U)**-**(W)** випливає, що $M\in L^2(0,T;\mathbb{R}^{2m})$. Використавши оцінки (3.55), (3.36) і умови $\varepsilon,G_0>0$, отримаємо

$$\Big(L(t,\xi),\xi\Big)_{\mathbb{R}^{2m}}\geq -LE^0\int\limits_\Omega|u^{\varepsilon,m}|^2\,dx\geq -LE^0m\int\limits_\Omega\sum_{k=1}^m|\varphi_k^m(t)|^2|w^k(x)|^2\,dx=$$

$$=-LE^0m(|\varphi^m(t)|^2+|\psi^m(t)|^2).$$

Тоді виконується оцінка (2.36) з функціями $\alpha(t)\equiv LE^0m$ та $\beta(t)\equiv 0$ і тому з теореми Каратеодорі-Ласаля (див. Твердження 2.3) матимемо існування $\varphi^m,\psi^m\in W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^m)$, які задовольняють (3.66)-(3.69).

Крок 2. Помножимо $\mu$-ту рівність з (3.66) на $\varphi_\mu^{\varepsilon,m}(t)$ і підсумувавши за $\mu=\overline{1,m}$ отримаємо:

$$\sum_{\mu=1}^m\Big(u_t^{\varepsilon,m}(t),w^\mu\varphi_\mu^{\varepsilon,m}(t)\Big)_\Omega+\sum_{\mu=1}^m\langle A_2\,u^{\varepsilon,m}(t),w^\mu\varphi_\mu^{\varepsilon,m}(t)\rangle_{Y_2}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^m\Big(N(t)u^{\varepsilon,m}(t),w^\mu\varphi_\mu^{\varepsilon,m}\Big)_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\Phi(E(t)u^{\varepsilon,m}(t)), w^{\mu}\varphi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}-\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\pi^{\varepsilon,m}(t), \operatorname{div} w^{\mu}\varphi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{m}\Big(F(t), w^{\mu}\varphi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}. \tag{3.70}$$

Тоді, помноживши $\mu$-ту рівність (3.67) на $\psi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)$ і підсумувавши за параметром $\mu=\overline{1,m}$, отримаємо

$$\varepsilon\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\pi_t^{\varepsilon,m}(t), v^{\mu}\psi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}+\varepsilon\sum_{\mu=1}^{m}\langle A_1\,\pi^{\varepsilon,m}(t), v^{\mu}\psi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\rangle_{Y_1}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}(t),\ v^{\mu}\psi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}=\sum_{\mu=1}^{m}\Big(f(t), v^{\mu}\psi_{\mu}^{\varepsilon,m}(t)\Big)_{\Omega}. \tag{3.71}$$

Таким чином отримаємо наступне:

$$(u_t^{\varepsilon,m}(t), u^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}+\langle A_2u^{\varepsilon,m}(t), u^{\varepsilon,m}(t)\rangle_{Y_2}+(N(t)u^{\varepsilon,m}(t), u^{\varepsilon,m}(t))_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+(\Phi(E(t)u^{\varepsilon,m}(t)), u^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}-(\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}(t), \pi^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}=(F(t), u^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega},$$

$$\varepsilon(\pi_t^{\varepsilon,m}(t), \pi^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}+\varepsilon\langle A_1\pi^{\varepsilon,m}(t), \pi^{\varepsilon,m}(t)\rangle_{Y_1}+(\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}(t), \pi^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}=$$

$$=(f(t), \pi^{\varepsilon,m}(t))_{\Omega}.$$

Додавши ці рівності та проінтегрувавши за $t\in(0,\tau)\subset(0,T)$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(u_t^{\varepsilon,m}, u^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}+\varepsilon\pi_t^{\varepsilon,m}\pi^{\varepsilon,m}\Big]\,dxdt+\int\limits_0^{\tau}\Big(L(t,\xi(t)),\xi(t)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(F, u^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}+(f, \pi^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt,\quad \tau\in(0,T]. \tag{3.72}$$

Очевидно, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}(u_t^{\varepsilon,m}, u^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|u^{\varepsilon,m}|^2)\,dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{\varepsilon,m}|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0^m|^2\,dx,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\pi_t^{\varepsilon,m}\pi^{\varepsilon,m}\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|\pi^{\varepsilon,m}|^2)\,dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\pi^{\varepsilon,m}|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\pi_0^m|^2\,dx,$$

$$\Big|(F, u^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}+(f, \pi^{\varepsilon,m})_{\mathbb{R}^n}\Big|\le|F|\cdot|u^{\varepsilon,m}|+|f|\cdot|\pi^{\varepsilon,m}|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\Big(|F|^2+|u^{\varepsilon,m}|^2\Big)+\frac{1}{2\varepsilon}|f|^2+\frac{\varepsilon}{2}|\pi^{\varepsilon,m}|^2.$$

(див. (3.35)). Тоді, з (3.72) та (3.55) випливає, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^{\varepsilon,m}|^2+\varepsilon|\pi^{\varepsilon,m}|^2\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2+g_0|u^{\varepsilon,m}|^{q(x,t)}+\varepsilon\sum_{i=1}^{m}|\pi^m_{x_i}|^2\Big]\,dxdt\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|u^m_0|^2+\varepsilon|\pi^m_0|^2\Big]\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|F|^2+\frac{1}{\varepsilon}|f|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\Big(\frac{1}{2}+LE^0\Big)|u^{\varepsilon,m}|^2+\frac{\varepsilon}{2}|\pi^{\varepsilon,m}|^2\Big]\,dxdt. \qquad (3.73)$$

Нехай $y(\tau)=\int_\Omega[|u^{\varepsilon,m}(x,\tau)|^2+\varepsilon|\pi^{\varepsilon,m}(x,\tau)|^2]\,dx,\ \ \tau\in[0,T]$. Тоді, з (3.73), матимемо:

$$y(\tau)\le C_7\mathcal{F}_\varepsilon(\tau)+C_8\int\limits_0^\tau y(t)\,dt,\quad \tau\in[0,T],$$

де

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\tau)=\int\limits_{\Omega}\Big[|u^m_0|^2+\varepsilon|\pi^m_0|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|F|^2+\frac{1}{\varepsilon}|f|^2\Big]\,dxdt,\ \ \tau\in(0,T], \qquad (3.74)$$

додатні сталі $C_7$ і $C_8$ не залежать від $m,\tau,\varepsilon$. Використавши твердження 2.8, отримаємо оцінку:

$$y(\tau)\le C_7\,e^{C_8T}\mathcal{F}_\varepsilon(\tau),\quad \tau\in[0,T]. \qquad (3.75)$$

Очевидно, що $0\le\mathcal{F}_\varepsilon(\tau)\le\mathcal{F}_\varepsilon(T)\le C_9$, де додатна стала $C_9$ не залежить від $m,\tau$.

З (3.73) та (3.75) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^{\varepsilon,m}(x,\tau)|^2+\varepsilon|\pi^{\varepsilon,m}(x,\tau)|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon,m}_{x_i}|^2+$$

$$+|u^{\varepsilon,m}|^2+|u^{\varepsilon,m}|^{q(x,t)}+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|\pi^{\varepsilon,m}_{x_i}|^2+\varepsilon|\pi^{\varepsilon,m}|^2\Big]\,dxdt\le C_{10},\quad \tau\in[0,T]. \quad (3.76)$$

З Твердження 3.2, Твердження 2.15 та (3.76), отримаємо

$$||\mathsf{N}u^{\varepsilon,m};[L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n||\le C_{11}||u^{\varepsilon,m};[L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n||\le C_{12}. \qquad (3.77)$$

З **(E)**, (2.46) та (3.76) випливає оцінка

$$||\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon,m});[L^2(Q_{0,T})]^n||\le C_{13}. \qquad (3.78)$$

Тут сталі $C_9, \dots, C_{13}$ не залежать від $m, \tau$. Зауважимо, що якщо $f \equiv 0$ та $\pi_0 \equiv 0$, то ці сталі також не залежать від $\varepsilon$.

З (3.76)-(3.78) випливає існування підпослідовностей $\{u^{\varepsilon,m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ and $\{\pi^{\varepsilon,m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\pi^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ таких, що

$$u^{\varepsilon,m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^{\varepsilon} \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \quad \text{та слабко в} \quad U_2(Q_{0,T}),$$

$$\pi^{\varepsilon,m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi^{\varepsilon} \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{та слабко в} \quad U_1(Q_{0,T}).$$

Крім того,

$$\mathsf{N}u^{\varepsilon,m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1^{\varepsilon} \quad \text{слабко в} \quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{3.79}$$

$$\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon,m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2^{\varepsilon} \quad \text{слабко} \quad [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{3.80}$$

Крок 3 (додаткові оцінки). Використаємо позначення (3.13). З (3.76) випливає нерівність

$$||\mathsf{A}_2 u^{\varepsilon,m}; [U_2(Q_{0,T})]^*|| \leq C_{14}. \tag{3.81}$$

З побудови простору $U_2(Q_{0,T})$ і вкладень (3.65) випливає

$$U_2(Q_{0,T}) \;\bar{\circlearrowleft}\; L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \;\bar{\circlearrowleft}\; [U_2(Q_{0,T})]^*, \tag{3.82}$$

$$U_2(Q_{0,T}) \;\bar{\circlearrowleft}\; [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \qquad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n \;\bar{\circlearrowleft}\; [U_2(Q_{0,T})]^*, \tag{3.83}$$

$$L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;[\mathcal{W}_s]^n) \;\bar{\circlearrowleft}$$

$$\bar{\circlearrowleft}\; L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;Y_2) \;\bar{\circlearrowleft}\; U_2(Q_{0,T}) \;\bar{\circlearrowleft}\; L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;Y_2). \tag{3.84}$$

Таким чином,

$$[U_2(Q_{0,T})]^* \;\bar{\circlearrowleft}\; L^r(0,T;Y_2^*) \;\bar{\circlearrowleft}\; L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^n), \quad r = \frac{\max\{2,q^0\}}{\max\{2,q^0\}-1}. \tag{3.85}$$

Використавши (3.76) і (3.84), отримаємо

$$||u^{\varepsilon,m}; L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;Y_2)|| \leq C_{15}||u^{\varepsilon,m}; U_2(Q_{0,T})|| \leq C_{16}. \tag{3.86}$$

З оцінки (3.76) випливає нерівність

$$||\mathsf{A}_1 \pi^{\varepsilon,m}; [U_1(Q_{0,T})]^*|| \leq C_{17}(\varepsilon). \tag{3.87}$$

З побудови простору $U_1(Q_{0,T})$, отримаємо

$$U_1(Q_{0,T}) \;\bar{\circlearrowleft}\; L^2(0,T;L^2(\Omega)) \;\bar{\circlearrowleft}\; [U_1(Q_{0,T})]^* =$$

$$= L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \mathbin{\bar{\circlearrowleft}} L^2(0,T;\mathcal{W}_s^*). \tag{3.88}$$

Використавши Твердження 2.1 і позначення (2.26)-(2.27) для $\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^n$ і $\mathcal{V} = [\mathcal{W}_s]^n$, таким ж чином як і в [86, с. 77], перепишимо (3.66) у вигляді

$$u_t^{\varepsilon,m} = \widehat{P}_m^*(F - \mathsf{A}_1 u^{\varepsilon,m} - \mathsf{N}u^{\varepsilon,m} - \Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon,m}) - \nabla\pi^{\varepsilon,m}). \tag{3.89}$$

Таким чином, з (3.51) при $\ell = n$, вкладень (3.82)-(3.85), і оцінок (3.76)-(3.78) та (3.81), випливає, що:

$$||u_t^{\varepsilon,m}; L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^n)|| =$$

$$= ||\widehat{P}_m^*(F - \mathsf{S}_2 u^{\varepsilon,m} - \nabla\pi^{\varepsilon,m}); L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^n)|| \leq$$

$$\leq ||F - \mathsf{S}_2 u^{\varepsilon,m} - \nabla\pi^{\varepsilon,m}; L^r(0,T;[\mathcal{W}_s^*]^n)|| \leq$$

$$\leq C_{18}||F - \mathsf{S}_2 u^{\varepsilon,m} - \nabla\pi^{\varepsilon,m}; [U_1(Q_{0,T})]^*|| \leq$$

$$\leq C_{19}\Big(||F; [L^2(Q_{0,T})]^n|| + ||\mathsf{A}_2 u^{\varepsilon,m}; [U_2(Q_{0,T})]^*|| + ||\mathsf{N}u^{\varepsilon,m}; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| +$$

$$+ ||\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon,m}); [L^2(Q_{0,T})]^n|| + ||\nabla\pi^{\varepsilon,m}; [L^2(Q_{0,T})]^n||\Big) \leq C_{20}(\varepsilon). \tag{3.90}$$

Використавши Твердження 2.1 і позначення (2.26)-(2.27) для $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ і $\mathcal{V} = \mathcal{W}_s$, з (3.67) так само, як і (3.89), отримаємо

$$\pi_t^{\varepsilon,m} = \widehat{P}_m^*\Big(\frac{1}{\varepsilon}f - \mathsf{A}_1\pi^{\varepsilon,m} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}\Big). \tag{3.91}$$

Таким чином, з (3.51) при $\ell = 1$, вкладень (3.88) і оцінок (3.76) та (3.87), отримаємо:

$$||\pi_t^{\varepsilon,m}; L^2(0,T;\mathcal{W}_s^*)|| = \Big|\Big|\widehat{P}_m^*\Big(\frac{1}{\varepsilon}f - \mathsf{A}_1\pi^{\varepsilon,m} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}\Big); L^2(0,T;\mathcal{W}_s^*)\Big|\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\Big|\frac{1}{\varepsilon}f - \mathsf{A}_1\pi^{\varepsilon,m} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}; L^2(0,T;\mathcal{W}_s^*)\Big|\Big| \leq$$

$$\leq C_{21}\Big|\Big|\frac{1}{\varepsilon}f - \mathsf{A}_1\pi^{\varepsilon,m} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}; [U_1(Q_{0,T})]^*\Big|\Big| \leq$$

$$\leq C_{22}\Big(\frac{1}{\varepsilon}||f; L^2(Q_{0,T})|| + ||\mathsf{A}_1\pi^{\varepsilon,m}; [U_1(Q_{0,T}]^*|| + \frac{1}{\varepsilon}||\operatorname{div} u^{\varepsilon,m}; L^2(Q_{0,T})||\Big) \leq$$

$$\leq C_{23}(\varepsilon). \tag{3.92}$$

Оскільки, $Y_2 \overset{K}{\subset} [L^2(\Omega)]^n \circlearrowleft [\mathcal{W}_s^*]^n$, то з (3.86), (3.90), теореми Обена (див. Твердження 2.5) і Твердження 2.7 отримаємо:

$$u^{\varepsilon,m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^\varepsilon \text{ в просторі } L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap C([0,T];[\mathcal{W}_s^*]^n)$$

$$\text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Отже, $\chi_1^\varepsilon = g|u^\varepsilon|^{q(x,t)-2}u^\varepsilon$ та $\chi_2^\varepsilon = \Phi(\mathsf{E}u^\varepsilon)$ (див. збіжності (3.79) та (3.80); використавши (3.52) при $r = \min\{2, q_0\}$), і (3.5) виконується. Оскільки, $Y_1 \overset{K}{\subset} L^2(\Omega) \circlearrowleft \mathcal{W}_s^*$, з (3.76), (3.92), теореми Обена (див. Твердження 2.5) і Твердження 2.7 отримаємо:

$$\pi^{\varepsilon,m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi^\varepsilon \quad \text{in} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];\mathcal{W}_s^*)$$

$$\text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}$$

і (3.6) виконується.

Крок 4 (граничний перехід). З (3.66)-(3.67) і наведених вище збіжностей отримаємо (3.20)-(3.21). Оскільки $u^\varepsilon \in U_2(Q_{0,T})$ і $u_t^\varepsilon \in [U_2(Q_{0,T})]^*$, отримаємо, що $u^\varepsilon \in C([0,T];[L^2(\Omega)]^n)$ (див. Лема 4.5 [23, с. 119]). Аналогічно, $\pi^\varepsilon \in C([0,T];L^2(\Omega))$ і Теорема 3.2 доведена. $\square$

*Доведення Теореми 3.3.* Використаємо метод параболічної регуляризації. Припустимо, що функції $\{u^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{\pi^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та $\{\pi^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ взято з доведення теореми 3.2, де $f \equiv 0$ та $\pi_0 \equiv 0$ (див. (3.2) та (3.6)). Візьмемо $\varepsilon \in (0,1)$ для спрощення.

Крок 1 (оцінки). З (3.76) отримаємо

$$\int\limits_\Omega |u^{\varepsilon,m_k}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{\varepsilon,m_k}|^2\, dxdt \le C_{24}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{3.93}$$

$\tau \in (0,T]$, $k \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що $C_{24}$ не залежить від $m, \tau, \varepsilon$. З (3.93) при $\tau = T$ отримаємо

$$||u^{\varepsilon,m_k}; L^2(0,T;Y_2)|| \le \sqrt{C_{24}}.$$

Для першого доданка з (3.93) отримаємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} ||u^{\varepsilon,m}(\tau); [L^2(\Omega)]^n|| \le \sqrt{C_{24}},$$

тобто $||u^{\varepsilon,m_k}; L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)|| \le \sqrt{C_{24}}$. Додавши ці нерівності, отримаємо:

$$||u^{\varepsilon,m_k}; L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)|| + ||u^{\varepsilon,m_k}; L^2(0,T;Y_2)|| \le 2\sqrt{C_{24}}. \tag{3.94}$$

З (3.94) і Твердження 3.1 матимемо:

$$2\sqrt{C_{24}} = \varliminf_{k\to\infty} 2\sqrt{C_{24}} \geq$$

$$\geq \varliminf_{k\to\infty}\Big(||u^{\varepsilon,m_k}; L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)|| + ||u^{\varepsilon,m_k}; L^2(0,T;Y_2)||\Big)\geq$$

$$\geq ||u^\varepsilon; L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)|| + ||u^\varepsilon; L^2(0,T;Y_2)||.$$

З цієї нерівності випливає, що (див. (3.93) для порівняння)

$$\int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u^\varepsilon_{x_i}|^2\,dxdt \leq C_{25}. \tag{3.95}$$

З (3.76)-(3.78), (3.86) і Твердження 3.1, аналогічно до (3.95), матимемо

$$\varepsilon\int\limits_\Omega |\pi^\varepsilon(x,\tau)|^2\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|u^\varepsilon|^2 + |u^\varepsilon|^{q(x)} + \varepsilon\sum_{i=1}^n|\pi^\varepsilon_{x_i}|^2 + \varepsilon|\pi^\varepsilon|^2\Big]\,dxdt \leq C_{26}, \quad \tau\in(0,T], \tag{3.96}$$

$$||\mathsf{N}u^\varepsilon; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| \leq C_{27}, \tag{3.97}$$

$$||\Phi(\mathsf{E}u^\varepsilon); [L^2(Q_{0,T})]^n|| \leq C_{28}, \tag{3.98}$$

$$||u^\varepsilon; L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;Y_2)|| \leq C_{29}. \tag{3.99}$$

Тут сталі $C_{25},\dots,C_{29}$ не залежать від $\varepsilon,\tau$. Отримаємо існування послідовностей $\{u^{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ та $\{\pi^{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{\pi^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ таких що

$$u^{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \quad \text{та слабко в } U_2(Q_{0,T}), \tag{3.100}$$

$$\sqrt{\varepsilon_j}\pi^{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\chi_0 \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{та слабко в } U_1(Q_{0,T}), \tag{3.101}$$

$$\mathsf{N}u^{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\chi_1 \quad \text{слабко в} \quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{3.102}$$

$$\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon_j})\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\chi_2 \quad \text{слабко в} \quad [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{3.103}$$

Крок 2 (додаткові оцінки). Оскільки $U(Q_{0,T})\subset U_2(Q_{0,T})$, то $\mathsf{A}_2u^\varepsilon\in[U(Q_{0,T})]^*$,

$$\langle\mathsf{A}_2u^\varepsilon, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle\mathsf{A}_2u^\varepsilon, v\rangle_{U_2(Q_{0,T})} = \int\limits_{Q_{0,T}}\sum_{i=1}^n(u^\varepsilon_{x_i}, v_{x_i})_{\mathbb{R}^n}\,dxdt \leq$$

$$\leq C_{30}||v;U(Q_{0,T})||,$$

для всіх $v \in U(Q_{0,T})$, де $C_{30}$ не залежать від $\varepsilon$, а також

$$||\mathsf{A}_2 u^{\varepsilon};[U(Q_{0,T})]^*|| \leq C_{30}. \tag{3.104}$$

Візьмемо $\psi \in D(0,T)$, помножимо $\mu$-те рівняння (3.67) з $m = m_k$ та $\varepsilon = \varepsilon_j$ на $\psi(t)$, проінтегруємо по $t \in (0,T)$, а перший доданок проінтегруємо частинами. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\varepsilon_j\, \pi^{\varepsilon_j,m_k} v^{\mu}\psi_t + \varepsilon_j \sum_{i=1}^{n} \pi^{\varepsilon_j,m_k}_{x_i} v^{\mu}_{x_i}\psi + v^{\mu}\psi\,\mathrm{div}\, u^{\varepsilon_j,m_k}\Big]\, dxdt = 0$$

(нагадаємо, що $f \equiv 0$). Якщо ми спрямуємо $k \to \infty$, тоді, після деяких перетворень, отримаємо

$$\sqrt{\varepsilon_j}\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-(\sqrt{\varepsilon_j}\,\pi^{\varepsilon_j})v^{\mu}\psi_t + \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\varepsilon_j}\pi^{\varepsilon_j})_{x_i} v^{\mu}_{x_i}\psi\Big]\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}} v^{\mu}\psi\,\mathrm{div}\, u^{\varepsilon_j}\, dxdt = 0.$$

Якщо ми спрямуємо $j \to \infty$, то $\int_{Q_{0,T}} v^{\mu}\psi\,\mathrm{div}\, u\, dxdt = 0,\ \mu \in \mathbb{N}$, $\psi \in D(0,T)$, а також (3.26) виконується.

Візьмемо $\varphi \in D(0,T)$, помножимо $\mu$-те рівняння (3.66) з $m = m_k$ та $\varepsilon = \varepsilon_j$ на $\varphi(t)$, проінтегруємо по $t \in (0,T)$ та перший доданок проінтегрумо частинами. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-(u^{\varepsilon_j,m_k}, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi_t + \sum_{i=1}^{n}(u^{\varepsilon_j,m_k}_{x_i}, w^{\mu}_{x_i})_{\mathbb{R}^n}\varphi + (\mathsf{N}u^{\varepsilon_j,m_k}, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi +$$

$$+ (\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon_j,m_k}), w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi - \pi^{\varepsilon_j,m}\varphi\,\mathrm{div}\, w^{\mu}\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi\, dxdt.$$

Якщо ми спрямуємо $k \to \infty$, то отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-(u^{\varepsilon_j}, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi_t + \sum_{i=1}^{n}(u^{\varepsilon_j}_{x_i}, w^{\mu}_{x_i})_{\mathbb{R}^n}\varphi + (\mathsf{N}u^{\varepsilon_j}, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi + (\Phi(\mathsf{E}u^{\varepsilon_j}), w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi -$$

$$- \pi^{\varepsilon_j}\varphi\,\mathrm{div}\, w^{\mu}\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F, w^{\mu})_{\mathbb{R}^n}\varphi\, dxdt.$$

Оскільки $Z_1 \subset H_0^1(\Omega)$, ми легко отримаємо цю рівність для кожного $z \in Z_1$ замість $w^\mu$. Але $\operatorname{div} z = 0$ і тому, після деяких перетворень, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} -(u^{\varepsilon_j}, z)_{\mathbb{R}^n} \varphi_t \, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ -\sum_{i=1}^{n} (u^{\varepsilon_j}_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} \varphi + (F - \mathsf{N} u^{\varepsilon_j} - \Phi(\mathsf{E} u^{\varepsilon_j}), z)_{\mathbb{R}^n} \varphi \Big] \, dxdt \tag{3.105}$$

для кожного $\varphi \in D(0,T)$ та $z \in Z_1$. Аналогічно, отримаємо (3.105) для кожного $z \in Z_s$, де $s$ взято з (3.24). Тоді, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $D^*(0,T;Z_s^*)$, отримаємо

$$u_t^{\varepsilon_j} = F - \mathsf{A}_2 u^{\varepsilon_j} - \mathsf{N} u^{\varepsilon_j} - \Phi(\mathsf{E} u^{\varepsilon_j}). \tag{3.106}$$

З побудови простору $U(Q_{0,T})$ та вибору $s$ з (3.24), матимемо

$$U(Q_{0,T}) \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} [L^2(Q_{0,T})]^n \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} [U(Q_{0,T})]^*, \tag{3.107}$$

$$L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;Z_s) \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;V_1) \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} U(Q_{0,T}). \tag{3.108}$$

Отже, для $r > 1$ яке візьмемо з (3.85), отримаємо

$$[U(Q_{0,T})]^* \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} L^r(0,T;V_1^*) \mathrel{\overline{\circlearrowleft}} L^r(0,T;Z_s^*). \tag{3.109}$$

Використавши (3.97)-(3.98), (3.104), і (3.106)-(3.109), отримаємо

$$||u_t^{\varepsilon_j}; L^r(0,T;Z_s^*)|| = ||F - \mathsf{A}_2 u^{\varepsilon_j} - \mathsf{N} u^{\varepsilon_j} - \Phi(\mathsf{E} u^{\varepsilon_j}); L^r(0,T;Z_s^*)|| \leq$$

$$\leq C_{31} ||F - \mathsf{A}_2 u^{\varepsilon_j} - \mathsf{N} u^{\varepsilon_j} - \Phi(\mathsf{E} u^{\varepsilon_j}); [U(Q_{0,T})]^*|| \leq$$

$$\leq C_{32}(||F; [L^2(Q_{0,T})]^n|| + ||\mathsf{A}_2 u^{\varepsilon_j}; [U(Q_{0,T})]^*|| + ||\mathsf{N} u^{\varepsilon_j}; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| +$$

$$+ ||\Phi(\mathsf{E} u^{\varepsilon_j}); [L^2(Q_{0,T})]^n||) \leq C_{33}, \tag{3.110}$$

де $C_{33} > 0$ не залежить від $\varepsilon_j$ (див. (3.90) для порівняння).

Крок 4 (граничний перехід). Оскільки, $Y_2 \overset{K}{\subset} [L^2(\Omega)]^n \circlearrowleft Z_s^*$, з (3.99), (3.110), теореми Обена (див. Твердження 2.5), і Твердження 2.7 отримаємо:

$$u^{\varepsilon_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в просторі} \quad L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap C([0,T];Z_s^*)$$

$$\text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Тому,

$$\chi_1 = g|u|^{q(x,t)-2}u, \qquad \chi_2 = \Phi(\mathsf{E}u)$$

(див. (3.102), (3.103); використавши (3.52) з $r = \min\{2, q_0\}$ ) і (3.28) виконується. Таким чином, з (3.105) та збіжностей наведених вище, випливає що, $u$ задовольняє (3.33).

<u>Крок 5</u> (знаходження $\pi$ ). Зауважимо, що ми поки не можемо довести збіжність $\{\pi^{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ , наприклад, для розв'язку $\pi$ задачі (3.25)-(3.28). Знайдемо $\pi$ з узагальненої теореми де Рама. З (3.105) отримаємо,

$$\int\limits_0^T \langle \mathcal{F}(t), w\rangle_{[D(\Omega)]^n}\, \varphi(t)\, dt = 0, \qquad w \in [D(\Omega)]^n, \quad \varphi \in D(0,T),$$

де

$$\mathcal{F} := u_t + \mathsf{A}_2 u + \mathsf{N}u + \Phi(\mathsf{E}u) - F, \qquad \operatorname{div} w = 0,$$

тому (2.39) виконується.

Нагадаємо, що якщо $p_1 \geq p_2$ , $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ , $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$ , то $p_2' \geq p_1'$ та $W_0^{1,p_2'}(\Omega) \overline{\circlearrowright} W_0^{1,p_1'}(\Omega)$ . Тоді

$$W^{-1,p_1}(\Omega) \overline{\circlearrowright} W^{-1,p_2}(\Omega) \tag{3.111}$$

і тому

$$H^{-1}(\Omega) + L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega) \overline{\circlearrowright} W^{-1,2}(\Omega) + W^{-1,\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega) \overline{\circlearrowright} W^{-1,h}(\Omega), \tag{3.112}$$

де $h$ взято з (3.24). Якщо $X$ – рефлексивний банахів простір та $\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = 1$ , то $W^{1,1}(0,T;X^*) \overline{\circlearrowright} C([0,T];X^*) \overline{\circlearrowright} L^{h'}(0,T;X^*)$ ,

$$L^h(0,T;X) \overline{\circlearrowright} W^{-1,\infty}(0,T;X). \tag{3.113}$$

Оскільки $u \in L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ , то $u_t \in W^{-1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ за означенням (2.14) (див. [107, p. 1099]). Тоді

$$\mathsf{A}_2 u + \mathsf{N}u + \Phi(\mathsf{E}u) - F \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q(x,t)}{q(x,t)-1}}(Q_{0,T})]^n + [L^2(Q_{0,T})]^n \subset$$

$$\subset L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(Q_{0,T})]^n \subset L^h\Big(0,T;[H^{-1}(\Omega) + L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega)]^n\Big) \subset$$

$$\subset L^h(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n) \subset W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n),$$

де $h$ взято з (3.24). Таким чином, $\mathcal{F} \in W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n)$ і узагальнена теорема де Рама (див. Твердження 2.4) показує, що існує розподіл

$$\pi \in W^{-1,\infty}(0,T;W^{0,h}(\Omega)) = W^{-1,\infty}(0,T;L^h(\Omega))$$

такий, що (2.40)-(2.41) виконується. Таким чином, $\pi$ задовольняє (3.25) в $\mathcal{D}^*$ і задовольняє (3.34) на $D^*(0,T)$. Теорему 3.3 доведено. $\square$

**Висновки до розділу 3.** У третьому розділі дисертації розглянуто нелінійну інтегро-диференціальну систему, яку названо системою Осколкова-Стокса, бо вона узагальнює систему, отриману при наближенні типу Осколкова відповідної системи Нав'є-Стокса.

В узагальнених просторів Лебега-Соболєва було встановлено, що мішана задача має єдиний узагальнений розв'язок для кожного значення параметра $\varepsilon > 0$, який отримано методом Фаедо-Гальоркіна. Також доведено збіжність при $\varepsilon \to 0$ розв'язку цієї задачі до розв'язку відповідної задачі для $\varepsilon = 0$.

Результати розділу опубліковано у статті [3] та додатково висвітлено у [5].

# 4. РОЗДІЛ
# СИСТЕМИ БУСІНЕСКА-СТОКСА

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено задачам для еволюційних систем типу

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{Y}_1(u,\theta) + \nabla\pi = F, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \theta_t + \mathcal{Y}_2(u,\theta) = f, \end{cases} \tag{4.1}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ – невідома вектор-функція, $\pi, \theta : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ – невідомі скалярні функції; $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ – дивергенція функції $u$; $\nabla\pi = (\frac{\partial\pi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\pi}{\partial x_n})$ – градієнт $\pi$; $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ – нелінійні диференціальні чи інтегро-диференціальні вирази; $F, f$ – деякі функції та виконуються позначення (1.4)-(1.7), причому, $n \geq 2$. Також, у цьому розділі розглянуто відповідну (4.1) стохастичну систему, збурену доданком типу білого шуму.

4.1. **Детермінована система Бусінеска-Стокса.** Розглянемо задачу знаходження функції $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, функцій $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $\theta : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$, що задовольняють такі співвідношення:

$$u_t - A\,\Delta u + G\,|u|^{q(x,t)-2}u + \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy +$$

$$+ B\,\theta + \nabla\pi = F(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{4.3}$$

$$\theta_t - a\Delta\,\theta + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_\Omega \pi(x,t)\,dx = 0 \quad \text{в} \quad (0,T), \tag{4.5}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{4.6}$$

$$\theta|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{4.7}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4.8}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4.9}$$

де $A, G, a > 0$ – деякі фіксовані числа; $\mathfrak{Z}$ – матриця-функція порядку $n$; $B, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^n$ – деякі вектори; $q = q(x,t)$ – змінний показник нелінійності.

Нехай $\mathcal{D}$ – простір основних функцій з (2.37),

$$Y_1 := H_0^1(\Omega), \qquad U_1(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Y_1). \tag{4.10}$$

Нехай множини соленоїдальних функцій (функцій, для яких виконується умова нестискуваності $\operatorname{div} u = 0$) $C_{\rm div}$, $H$, $Z_s$ ($s \in \mathbb{N}$) та $\mathcal{D}_{\rm div}$ взято з (2.11)-(2.13), (2.38). Зокрема, нехай $H$ – замикання $C_{\rm div}$ в $[L^2(\Omega)]^n$, $Z_1$ – замикання $C_{\rm div}$ в $[H^1(\Omega)]^n$. Припустимо, що виконуються позначення (2.125)-(2.127), (3.31), зокрема,

$$V(t) := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad t \in [0,T], \tag{4.11}$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{4.12}$$

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \quad | \quad u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}. \tag{4.13}$$

Нехай виконуються такі умови.

**(A):** $A, G, a > 0$; $B, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^n$;

**(Q):** $q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ (див. (1.36)) та $q_0 \geq 2$ (див. (1.20));

**(E):** $\mathfrak{Z}$ – квадратна матриця порядку $n$ з елементами з $L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$;

**(F):** $F \in L^2(0,T;H)$, $f \in L^2(Q_{0,T})$;

**(U):** $u_0 \in H$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Визначимо оператори $A_1 : Y_1 \to Y_1^*$, $A_2 : Z_1 \to Z_1^*$, $\mathsf{A}_1 : U_1(Q_{0,T}) \to [U_1(Q_{0,T})]^*$ та $\mathsf{A}_2 : L^2(0,T;Z_1) \to L^2(0,T;Z_1^*)$ так:

$$\langle A_1\xi, \eta\rangle_{Y_1} := \int\limits_\Omega a \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}(x)\eta_{x_i}(x)\, dx, \quad \xi, \eta \in Y_1; \tag{4.14}$$

$$\langle A_2 z, w\rangle_{Z_1} := \int\limits_\Omega A \sum_{i=1}^n \Big(z_{x_i}(x), w_{x_i}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n} dx, \quad z, w \in Z_1; \tag{4.15}$$

$$\langle \mathsf{A}_1 u, v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle A_1 u(t), v(t)\rangle_{Y_1}\, dt, \quad u, v \in U_1(Q_{0,T}); \tag{4.16}$$

$$\langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} := \int\limits_0^T \langle A_2 u(t), v(t)\rangle_{Z_1}\, dt, \quad u, v \in L^2(0,T;Z_1). \tag{4.17}$$

Аналогічно як (3.14)-(3.17) визначимо такі оператори:

$$(N(t)z)(x) := g(x,t)|z(x)|^{q(x,t)-2}z(x), \tag{4.18}$$

$z = z(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$;

$$(\mathsf{N}u)(x,t) := \big(N(t)u(t)\big)(x) = g(x,t)|u(x,t)|^{q(x,t)-2}u(x,t), \tag{4.19}$$

$u = u(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{0,T}$;

$$(E(t)z)(x) := \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)\,dy, \tag{4.20}$$

$z = z(x)\,,\ x \in \Omega\,,\ t \in (0,T)\,$;

$$(\mathsf{E}u)(x,t) := \big(E(t)u(t)\big)(x) = \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy, \tag{4.21}$$

$u = u(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_{0,T}\,.$

Використовуватимемо позначення (2.9) і оператори $S(t) : V(t) \to [V(t)]^*$ та $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$, які визначимо так:

$$\langle S(t)z, w\rangle_{V(t)} := \langle A_2 z, w\rangle_{Z_1} +$$

$$+\,(N(t)z,w)_\Omega + (E(t)z,w)_\Omega, \quad z,w \in V(t), \quad t \in (0,T); \tag{4.22}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(\mathsf{N}u)(x,t) + (\mathsf{E}u)(x,t)\Big]v(x,t)\,dxdt, \quad u,v \in U(Q_{0,T}). \tag{4.23}$$

Дамо означення розв'язку нашої задачі. Нехай $\chi_{0,\tau}$ взято з (1.40),

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big), \quad h = \min\Big\{2,\ \frac{q^0}{q^0-1}\Big\}. \tag{4.24}$$

**Означення 4.1.** *Трійка функцій $\{u,\pi,\theta\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (4.2)-(4.9), якщо*

$$u \in W(Q_{0,T}) \cap C([0,T];Z_s^*), \quad \pi \in W^{-1,h}(0,T;L^h(\Omega)),$$

$$\theta \in U_1(Q_{0,T}) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad \theta_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*;$$

*для всіх $z \in U(Q_{0,T})$, $v \in U_1(Q_{0,T})$ та $\tau \in (0,T]$ виконуються рівності*

$$\langle u_t, \chi_{0,\tau}z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A\sum_{i=1}^n (u_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u,z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E}u,z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+\,\theta(B,z)_{\mathbb{R}^n} - (F,z)_{\mathbb{R}^n}\Big]\,dxdt = 0, \tag{4.25}$$

$$\langle \theta_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[ a \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i} v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} v - fv \right] dxdt = 0; \qquad (4.26)$$

*виконуються початкові умови (4.8)-(4.9); функція* $\pi$ *задовольняє (4.2) в сенсі простору* $\mathcal{D}^*$ *і задовольняє (4.5) в* $D^*(0,T)$.

**Теорема 4.1** (єдиності). *Якщо виконуються умови **(A)-(E)**, то задача (4.2)-(4.9) не може мати більше одного узагальненого розв'язку* $\{u, \pi, \theta\}$.

**Теорема 4.2** (існування). *Якщо виконуються умови **(A)-(U)**, то існує узагальнений розв'язок* $\{u, \pi, \theta\}$ *задачі (4.2)-(4.9).*

Система Буссінеска зі змінним показником нелінійності, що залежить тільки від часової змінної розглядалися Конка К., Роджас-Медер М. та Суес-Грау Ф. у праці [55]. Задачі (4.2)-(4.9) для інтегро-диференціальних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності, що залежать від $(x,t)$ раніше не вивчалися.

4.1.1. *Доведення основних результатів.* Перейдемо до доведень.

*Доведення теореми 4.1.* Нехай $\{u^1, \pi^1, \theta^1\}$ та $\{u^2, \pi^2, \theta^2\}$ є розв'язками задачі (4.2)-(4.9), $w = u^1 - u^2$, $M = \theta^1 - \theta^2$. Запишемо рівності (4.25)-(4.26) для трійки $\{u^1, \pi^1, \theta^1\}$:

$$\langle u^1_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ A \sum_{i=1}^{n} (u^1_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N} u^1, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E} u^1, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \theta^1 (B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F, z)_{\mathbb{R}^n} \Big] dxdt = 0, \qquad (4.27)$$

$$\langle \theta^1_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[ a \sum_{i=1}^{n} \theta^1_{x_i} v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u^1)_{\mathbb{R}^n} v - fv \right] dxdt = 0. \qquad (4.28)$$

Запишемо (4.25)-(4.26) для $\{u^2, \pi^2, \theta^2\}$:

$$\langle u^2_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[ A \sum_{i=1}^{n} (u^2_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N} u^2, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E} u^2, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \theta^2 (B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F, z)_{\mathbb{R}^n} \Big] dxdt = 0, \qquad (4.29)$$

$$\langle \theta^2_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[ a \sum_{i=1}^{n} \theta^2_{x_i} v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u^2)_{\mathbb{R}^n} v - fv \right] dxdt = 0. \qquad (4.30)$$

Віднявши (4.29) від (4.27) та (4.30) від (4.28), отримаємо:

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A\sum_{i=1}^{n}(w_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u^1 - \mathsf{N}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (\mathsf{E}w, z)_{\mathbb{R}^n} + M(B, z)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0, \tag{4.31}$$

$$\langle M_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a\sum_{i=1}^{n} M_{x_i} v_{x_i} + v(\mathfrak{B}, w)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0. \tag{4.32}$$

Візьмемо в (4.31) $z = w$, а в (4.32) $v = M$. Додавши отримані рівності одержимо:

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U(Q_{0,T})} + \langle M_t, \chi_{0,\tau} M\rangle_{U_1(Q_{0,T})} +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2 + a\sum_{i=1}^{n}|M_{x_i}|^2\Big]\, dxdt = I, \tag{4.33}$$

де

$$I = -\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[G\Big(|u^1|^{q(x,t)-2}u^1 - |u^2|^{q(x,t)-2}u^2, u^1 - u^2\Big)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (\mathsf{E}w, w)_{\mathbb{R}^n} + M(B, w)_{\mathbb{R}^n} + M(\mathfrak{B}, w)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt.$$

Використавши, зокрема, оцінку (2.46), отримаємо таке:

$$I \le \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\mathsf{E}w|\cdot|w| + |M|\cdot|B+\mathfrak{B}|\cdot|w|\Big)\, dxdt \le C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2\Big)\, dxdt.$$

Використавши формули (1.39) та (1.44) і початкові умови (4.8)-(4.9), одержимо рівність

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U(Q_{0,T})} + \langle M_t, \chi_{0,\tau} M\rangle_{U_1(Q_{0,T})} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |M|^2\, dx.$$

Тоді з (4.33) отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \Big(|w|^2 + |M|^2\Big)\, dx \le C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2\Big)\, dxdt, \quad \tau \in (0, T].$$

Тому, використавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (твердження 2.8), звідси отримаємо, що $\int_{\Omega_\tau}(|w|^2 + |M|^2)\, dx \le 0$ для $\tau \in (0, T]$. Отже, $u^1 = u^2$ та $\theta^1 = \theta^2$. Тоді, аналогічно як при доведенні теореми 2.2 одержимо, що $\pi^1 = \pi^2$. Теорему доведено. $\square$

Введемо додаткові позначення:

$$\langle F_1(t), y\rangle_{Y_1} = \int\limits_{\Omega} f(x,t)y(x)\,dx, \quad y \in Y_1, \quad t \in (0,T); \tag{4.34}$$

$$\langle F_2(t), z\rangle_{Z_1} = \int\limits_{\Omega} \Big(F(x,t), z(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx, \quad z \in Z_1, \quad t \in (0,T). \tag{4.35}$$

*Доведення теореми 4.2.* Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна.

Крок 1 (побудова гальоркінських наближень). Нехай $Z_s$ та $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ взято з твердження 2.2. Нехай $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – база простору $Y_1$, яку ми (для спрощення) вважатимемо ортогональною в $L^2(\Omega)$. Розв'язок задачі (4.2)-(4.9) починаємо шукати у вигляді

$$u^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^m(t) w^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.36}$$

$$\theta^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu^m(t) v^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.37}$$

де невідомі скалярні функції $\varphi_1^m, ..., \varphi_m^m$, $\psi_1^m, ..., \psi_m^m$ шукатимемо з рівностей

$$(u_t^m(t), w^\mu)_\Omega + \langle A_2\, u^m(t), w^\mu\rangle_{Z_1} + (N(t)u^m(t), w^\mu)_\Omega +$$

$$+ (E(t)u^m(t), w^\mu)_\Omega + (B\theta^m, w^\mu)_\Omega = \langle F_2(t), w^\mu\rangle_{Z_1}, \tag{4.38}$$

$$(\theta_t^m(t), v^\mu)_\Omega + \langle A_1\, \theta^m(t), v^\mu\rangle_{Y_1} + \Big((\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}, v^\mu\Big)_\Omega = \langle F_1(t), v^\mu\rangle_{Y_1}, \tag{4.39}$$

$t \in (0,T)$, $\mu = \overline{1,m}$,

$$\varphi_1^m(0) = \alpha_1^m, \quad \ldots, \quad \varphi_m^m(0) = \alpha_m^m, \tag{4.40}$$

$$\psi_1^m(0) = \beta_1^m, \quad \ldots, \quad \psi_m^m(0) = \beta_m^m, \tag{4.41}$$

де числа $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m$, $\beta_1^m, \ldots, \beta_m^m \in \mathbb{R}$ вибираємо так, щоб $u_0^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0$ сильно в $H$, $\theta_0^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \theta_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, $u_0^m(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu^m w^\mu(x)$, $\theta_0^m(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m v^\mu(x)$, $x \in \Omega$. Зрозуміло, що виконуються рівності

$$u^m(0) = u_0^m, \tag{4.42}$$

$$\theta^m(0) = \theta_0^m. \tag{4.43}$$

Аналогічно, як при доведенні теорем 2.1 та 3.2 показуємо, що такі функції існують. Крім того, $\varphi \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ та $\psi \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$

Крок 2. Домножимо $\mu$-ту рівність (4.38) на $\varphi_\mu^m(t)$ і підсумовуємо за $\mu=\overline{1,m}$. Отримаємо, що

$$\sum_{\mu=1}^{m}\Big(u_t^m(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega+\sum_{\mu=1}^{m}\langle A_2\, u^m(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\rangle_{Z_1}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(N(t)u^m(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(E(t)u^m(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\Big(B\theta^m(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega=\sum_{\mu=1}^{m}\langle F_2(t), w^\mu\varphi_\mu^m(t)\rangle_{Z_1}. \tag{4.44}$$

Тепер $\mu$-ту рівність (4.39) помножимо на $\psi_\mu^m(t)$ і підсумовуємо за $\mu=\overline{1,m}$. Отримаємо

$$\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\theta_t^m(t), v^\mu\psi_\mu^m(t)\Big)_\Omega+\sum_{\mu=1}^{m}\langle A_1\,\theta^m(t), v^\mu\psi_\mu^m(t)\rangle_V+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\Big((\mathfrak{B}, u^m(t))_{\mathbb{R}^n},\ v^\mu\psi_\mu^m(t)\Big)_\Omega=\sum_{\mu=1}^{m}\langle F_1(t), v^\mu\varphi_\mu^m(t)\rangle_{Y_1}. \tag{4.45}$$

Тому з (4.44)-(4.45) матимемо, що

$$(u_t^m(t), u^m(t))_\Omega+\langle A_2u^m(t), u^m(t)\rangle_{Z_1}+(N(t)u^m(t), u^m(t))_\Omega+$$

$$+(E(t)u^m(t), u^m(t))_\Omega+(B\theta^m(t), u^m(t))_\Omega=\langle F_2(t), u^m(t)\rangle_{Z_1},$$

$$(\theta_t^m(t), \theta^m(t))_\Omega+\langle A_1\theta^m(t), \theta^m(t)\rangle_{Y_1}+((\mathfrak{B}, u^m(t))_{\mathbb{R}^n}, \theta^m(t))_\Omega=$$

$$=\langle F_1(t), \theta^m(t)\rangle_{Y_1}.$$

Додавши ці рівності і зінтегрувавши отриману рівність за $t\in(0,\tau)\subset[0,T]$, одержимо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(u_t^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}+A\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^m|^2+G|u^m|^{q(x,t)}+(\mathsf{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}+(B\theta^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+\theta_t^m\theta^m+a\sum_{i=1}^{m}|\theta_{x_i}^m|^2+(\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}\theta^m\Big]\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(F, u^m)_{\mathbb{R}^n}+f\theta^m\Big]\,dxdt. \tag{4.46}$$

Використавши (4.42)-(4.43), одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u_t^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m(x,t)|^2\, dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^m|^2\, dx,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \theta_t^m \theta^m\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\theta^m(x,t)|^2\, dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\theta^m|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\theta_0^m|^2\, dx.$$

Щоб оцінити інтегральний член, застосуємо нерівність Буняковського та оцінку (2.46):

$$\Big|\int\limits_{Q_{0,\tau}} (\mathsf{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt\Big| \leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\mathsf{E}u^m| \cdot |u^m|\, dxdt \leq$$

$$\leq ||\, |\mathsf{E}u^m|; L^2(Q_{0,\tau})|| \cdot ||\, |u^m|; L^2(Q_{0,\tau})|| \leq$$

$$\leq E^0||\,|u^m|; L^2(Q_{0,\tau})||^2 = E^0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^2\, dxdt. \qquad (4.47)$$

Використавши нерівність $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$, одержимо

$$\Big|(F, u^m)_{\mathbb{R}^n} + f\theta^m - (B\theta^m, u^m)_{\mathbb{R}^n} - (\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}\theta^m\Big| \leq$$

$$\leq |F| \cdot |u^m| + |f| \cdot |\theta^m| + |B| \cdot |\theta^m| \cdot |u^m| + |\mathfrak{B}| \cdot |u^m| \cdot |\theta^m| \leq$$

$$\leq C_2(B, b)\Big(|F|^2 + |u^m|^2 + |f|^2 + |\theta^m|^2 + |\theta^m|^2 + |u^m|^2 + |u^m|^2 + |\theta^m|^2\Big) \leq$$

$$\leq C_3(B, \mathfrak{B})\Big(|F|^2 + |u^m|^2 + |f|^2 + |\theta^m|^2\Big).$$

Тому з (4.46) отримаємо:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[|u^m|^2 + |\theta^m|^2\Big]\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 + G|u^m|^{q(x,t)} + a\sum_{i=1}^{m} |\theta_{x_i}^m|^2\Big]\, dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \Big[|u_0^m|^2 + |\theta_0^m|^2\Big]\, dx + C_4(B, \mathfrak{B}) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F|^2 + |f|^2\Big]\, dxdt +$$

$$+ C_5(E^0, B, \mathfrak{B}) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|u^m|^2 + |\theta^m|^2\Big]\, dxdt. \qquad (4.48)$$

Нехай $y(\tau) := \int_{\Omega_\tau}[|u^m|^2+|\theta^m|^2]\, dx,\ \ \tau\in[0,T]$. Тоді з (4.48) випливає оцінка

$$\frac{1}{2}y(\tau)\le C_6+C_7\int\limits_0^\tau y(t)\, dt,\ \ \tau\in[0,T].$$

Використавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (твердження 2.8), звідси отримаємо оцінку

$$y(\tau)\le C_8,\quad \tau\in[0,T]. \tag{4.49}$$

Тому з (4.48) матимемо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^m|^2+|\theta^m|^2\Big]\, dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2+|u^m|^2+|u^m|^{q(x,t)}+$$
$$+\sum_{i=1}^n|\theta^m_{x_i}|^2+|\theta^m|^2\Big]\, dtdt\le C_9,\quad \tau\in[0,T], \tag{4.50}$$

де стала $C_9>0$ не залежить від $m,\tau$.

З (2.46) та (4.50) випливають такі оцінки:

$$||\mathsf{N}u^m;[L^{q'(x,t)}(Q_{0,T}]^n||\le C_{10}, \tag{4.51}$$

$$||\mathsf{E}u^m;L^2(0,T;H)||\le C_{11}, \tag{4.52}$$

де сталі $C_{10},C_{11}>0$ не залежить від $m$.

З оцінок (4.50)-(4.52) випливає існування таких підпослідовностей $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ та $\{\theta^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{\theta^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що

$$u^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u\quad *\text{-слабко в}\quad L^\infty(0,T;H),$$

$$u^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u\quad \text{слабко в}\quad U(Q_{0,T}),$$

$$\mathsf{N}u^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\chi_1\quad \text{слабко в}\quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{4.53}$$

$$\mathsf{E}u^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\chi_2\quad \text{слабко в}\quad L^2(0,T;H), \tag{4.54}$$

$$\theta^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\theta\quad *\text{-слабко в}\quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$\theta^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\theta\quad \text{слабко в}\quad U_1(Q_{0,T}).$$

Крок 3 (додаткові оцінки). З оцінки (4.50) випливає нерівність

$$||\mathsf{A}_2u^m;[U(Q_{0,T})]^*||\le C_{12}. \tag{4.55}$$

З побудови простору $U(Q_{0,T})$, аналогічно як (2.182) та (2.183), маємо, що

$$U(Q_{0,T}) \subset L^2(0,T;H) \subset [U(Q_{0,T})]^*, \tag{4.56}$$

$$L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;Z_s) \subset U(Q_{0,T}) \subset L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-). \tag{4.57}$$

Тому (див. (2.184) та (2.185))

$$[U(Q_{0,T})]^* \subset L^r(0,T;Z_s^*), \quad r = \frac{\max\{2,q^0\}}{\max\{2,q_0\}-1}. \tag{4.58}$$

Використовуючи (4.50) та (4.57), одержимо оцінку

$$||u^m; L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-)|| \leq C_{13}||u^m; U(Q_{0,T})|| \leq C_{14}. \tag{4.59}$$

З оцінки (4.50) також випливає нерівність

$$||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T})]^*|| \leq C_{15}. \tag{4.60}$$

З означення простору $U_1(Q_{0,T})$ випливає, що

$$L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset [U_1(Q_{0,T})]^* = L^2(0,T;Y_1^*). \tag{4.61}$$

Використавши твердження 2.1 і позначення (2.26), (2.27), (4.23) для $\mathcal{H} = H$ та $\mathcal{V} = Z_s$, аналогічно як в (2.189), перепишемо (4.38) у вигляді

$$u_t^m = \widehat{P}_m^*(F_2 - \mathsf{S}u^m - B\theta^m). \tag{4.62}$$

Тому з оцінки типу (3.50) для $\mathcal{V} = Z_s$, використовуючи вкладення (4.56)-(4.58) та оцінки (4.50), (4.52) і (4.55), отримаємо нерівності

$$||u_t^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(F_2 - \mathsf{S}u^m - B\theta^m); L^r(0,T;Z_s^*)|| \leq$$

$$\leq ||F_2 - \mathsf{S}u^m - B\theta^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| \leq$$

$$\leq C_{16}||F_2 - \mathsf{A}_2u^m - \mathsf{N}u^m - \mathsf{E}u^m - B\theta^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \leq$$

$$\leq C_{17}\Big(||F_2; L^2(0,T;H)|| + ||\mathsf{A}_2u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| + ||\mathsf{N}u^m; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| +$$

$$+ ||\mathsf{E}u^m; L^2(0,T;H)|| + ||B\theta^m; L^2(0,T;H)||\Big) \leq$$

$$\leq C_{18}\Big(||F; L^2(0,T;H)|| + ||\mathsf{A}_2u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| + ||\mathsf{N}u^m; [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| +$$

$$+ ||\mathsf{E}u^m; L^2(0,T;H)|| + ||\theta^m; L^2(Q_{0,T})||\Big) \leq C_{19}. \tag{4.63}$$

Використавши твердження 2.1 для $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ та $\mathcal{V} = Y_1$, з (4.39) аналогічно як рівність (4.62) отримаємо, що

$$\theta_t^m = \widehat{P}_m^* \Big( F_1 - \mathsf{A}_1 \theta^m - (b, u^m)_{\mathbb{R}^n} \Big). \tag{4.64}$$

Тому з оцінки типу (3.50) для $\mathcal{V} = Y_1$, використавши вкладення (4.61) та оцінки (4.50) і (4.60), отримаємо нерівності

$$||\theta_t^m; L^2(0,T;Y_1^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(F_1 - \mathsf{A}_1\theta^m - (\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}); L^2(0,T;Y_1^*)|| \leq$$

$$\leq ||F_1 - \mathsf{A}_1\theta^m - (\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}; L^2(0,T;Y_1^*)|| \leq$$

$$\leq C_{20}\Big( ||F_1; L^2(Q_{0,T})|| + ||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T})]^*|| + ||(\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n}; L^2(Q_{0,T})|| \Big) \leq$$

$$\leq C_{21}\Big( ||f; L^2(Q_{0,T})|| + ||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T}]^*|| + ||u^m; L^2(0,T;H)|| \Big) \leq C_{22}. \tag{4.65}$$

Крок 4 (граничний перехід). Оскільки $V_- \overset{K}{\subset} H \circlearrowleft Z_s^*$, то з (4.59), (4.63), теореми Обена (твердження 2.5) і твердження 2.7 отримаємо, що

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;H) \cap C([0,T];Z_s^*) \quad \text{та м.с. в} \quad Q_{0,T}.$$

Тому $\chi_1 = \mathsf{N}u$ та $\chi_2 = \mathsf{E}u$ (див. (4.53) та (4.54)).

Оскільки $Y_1 \overset{K}{\subset} L^2(\Omega) \circlearrowleft Y_1^*$, то з (4.50), (4.65), теореми Обена (твердження 2.5) і твердження 2.7 отримаємо, що

$$\theta^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \theta \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];Y_1^*) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Нехай $\varphi \in C_0^1([0,T])$. Домноживши рівність (4.38) на $\varphi(t)$, зінтегрувавши за $t \in (0,T)$ і перший доданок зінтегрувавши частинами, отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ -\Big(u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi_t + A \sum_{i=1}^n \Big(u_{x_i}^m, w_{x_i}^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi + \Big(\mathsf{N}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi + \Big(\mathsf{E}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi +$$

$$+ \Big(B\theta^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi \Big] dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \Big(F, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dxdt. \tag{4.66}$$

Нехай $\psi \in C_0^1([0,T])$. Домноживши рівність (4.39) на $\psi(t)$, зінтегрувавши за $t \in (0,T)$ і перший доданок зінтегрувавши частинами, отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ -\theta^m v^\mu \psi_t + a \sum_{i=1}^n \theta_{x_i}^m v_{x_i}^\mu \psi + (\mathfrak{B}, u^m)_{\mathbb{R}^n} v^\mu \psi \Big] \, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} f v^\mu \varphi \, dxdt. \tag{4.67}$$

Взявши в (4.66) $m = m_k$ і спрямувавши $k \to \infty$, після певних перетворень одержимо таке:

$$\langle \mathcal{F}_2, z \rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, z \in U(Q_{0,T}), \tag{4.68}$$

де $\mathcal{F}_2 := u_t + \mathsf{A}_2 u + \mathsf{N}u + \mathsf{E}u + B\theta - F$, а тому виконується рівність (4.25) та $u_t \in [U(Q_{0,T})]^*$. З (4.67) випливає, що

$$\langle \mathcal{F}_1, v \rangle_{U_1(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, v \in U_1(Q_{0,T}), \tag{4.69}$$

де $\mathcal{F}_1 := \theta_t + \mathsf{A}_1\theta + (b, u)_{\mathbb{R}^n} - f$, а тому виконується (4.26) та $\theta_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*$.

Крок 5 (відшукання $\pi$). З вигляду функції $\mathcal{F}_2$ випливає, що

$$\mathcal{F}_2 \in W^{-1,2}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) + L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) +$$

$$+ [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n \subset W^{-1,h}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n), \tag{4.70}$$

де $h$ взято з (4.24). Тому з узагальненої теореми де Рама (див. твердження 2.4) випливає існування $\pi \in W^{-1,h}(0,T;W^{0,h}(\Omega)) = W^{-1,h}(0,T;L^h(\Omega))$ для якого виконуються (2.40)-(2.41). Отже, $\pi$ задовольняє (4.2) в сенсі простору $\mathcal{D}^*$ та задовольняє (4.5) в сенсі $D^*(0,T)$. Теорему доведено. $\square$

4.1.2. *Висновки до підрозділу 4.1.* У цьому підрозділі розглянуто нелінійну інтегро-диференціальну систему Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку відповідної мішаної задачі.

Результати підрозділу висвітлено у [6].

4.2. **Випадкова система Бусінеска-Стокса.** Перенесемо результати підрозділу 4.1 на випадок системи (4.1), перше рівняння якої збурене випадковим доданком $b_t$ типу білого шуму (див. підрозділ 2.2). Аналогічно як і в підрозділі 2.3 розглядатимемо відповідну систему без нелокального доданку.

Нехай $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, зокрема, $\mathbb{S}$ – простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – $\sigma$-алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Нехай виконуються позначення (1.4)-(1.6), $n \geq 2$ та, додатково, (1.8)-(1.9).

Шукатимемо залежний від випадкового параметра $\omega \in \mathbb{S}$ слабкий розв'язок $\{u, \pi, \theta\}$, де $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, $\pi : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $\theta : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$, задачі

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t) u_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q(x,t)-2} u +$$

$$+ B\theta + \nabla \pi = F(x,t,\omega) + b_t(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.71}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.72}$$

$$\theta_t - a\Delta\theta + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.73}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t,\omega)\, dx = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.74}$$

$$u(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.75}$$

$$\theta(x,t,\omega) = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.76}$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{4.77}$$

$$\theta(x,0,\omega) = \theta_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{4.78}$$

зі змінним показником нелінійності $q = q(x,t)$ та збуренням $b_t$ типу білого шуму (див. підрозділ 2.2). Припустимо, що виконуються такі умови:

**(A1):** $A_{ij}$ – квадратні матриці $n$-го порядку з елементами з $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij} = A_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$; м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ та д.в. $\xi^1, \ldots, \xi^n \in \mathbb{R}^n$, виконуються оцінки

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \Big( A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j \Big)_{\mathbb{R}^n} \leq a^0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \quad (0 < a_0 \leq a^0 < +\infty);$$

**(B1):** $B, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^n$ – деякі вектори, $a > 0$ – деяке фіксоване число;

**(G1):** $q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ (див. (1.36)) та $q_0 \geq 2$ (див. (1.20)); $G$ – квадратна матриця $n$-го порядку, $G = diag(g_1, \ldots, g_n)$, $g_l \in L^\infty(Q_{0,T})$ та $0 < g_0 \leq g_l(x,t) \leq g^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$, $l = \overline{1,n}$;

Нехай $\mathcal{D}$ взято з (2.37), виконуються позначення (4.10), тобто

$$Y_1 := H_0^1(\Omega), \qquad U_1(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Y_1), \tag{4.79}$$

множини соленоїдальних функцій (функцій, для яких виконується умова нестискуваності $\operatorname{div} u = 0$) $C_{\mathrm{div}}$, $H$, $Z_s$ ($s \in \mathbb{N}$) та $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ взято з (2.11)-(2.13), (2.38). Нехай також виконуються позначення (2.125)-(2.127), (3.31), зокрема, нехай $H$ – замикання $C_{\mathrm{div}}$ в $[L^2(\Omega)]^n$, $Z_1$ – замикання $C_{\mathrm{div}}$ в $[H^1(\Omega)]^n$,

$$V(t) := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{4.80}$$

$$V_- := Z_1 \cap [L^{q_0}(\Omega)]^n, \quad U_-(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q_0}(Q_{0,T})]^n, \tag{4.81}$$

$$V_+ := Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n, \quad U_+(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q^0}(Q_{0,T})]^n, \tag{4.82}$$

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \quad | \quad u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}. \tag{4.83}$$

Припустимо, що виконуються такі додаткові умови:

**(F1):** $F \in L_2\big(\mathbb{S}; L^2(0,T;H)\big)$, $f \in L_2\big(\mathbb{S}; L^2(Q_{0,T})\big)$ (див. зауваження 2.5);

**(U1):** $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$, $\theta_0 \in L_2(\mathbb{S}; L^2(\Omega))$ (див. зауваження 2.5);

**(W1):** $W$ – вінерівський процес (див. означення 2.8), $b_0 \in C_{\mathrm{div}}$,

$$b(x,t,\omega) = b_0(x) W(t,\omega), \quad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}. \tag{4.84}$$

Щоб ввести поняття розв'язку задачі (4.71)-(4.78) зробимо в ній заміну однієї з невідомих функцій $u \leftrightsquigarrow \widetilde{u}$ за правилом

$$u(x,t,\omega) = \widetilde{u}(x,t,\omega) + b(x,t,\omega). \tag{4.85}$$

Оскільки виконуються рівності $\operatorname{div} b = 0$, $b|_{x\in\partial\Omega} = 0$ та $b|_{t=0}$, то для знаходження нової трійки функцій $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$, де $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, $\pi : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$, та $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ отримаємо таку задачу:

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^n \Big( A_{ij}(x,t) \Big( \widetilde{u} + b(x,t,\omega) \Big)_{x_i} \Big)_{x_j} + G(x,t) \Big| \widetilde{u} + b(x,t,\omega) \Big|^{q(x,t)-2} \Big( \widetilde{u} +$$

$$+ b(x,t,\omega) \Big) + B\theta + \nabla \pi = F(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.86}$$

$$\operatorname{div} \widetilde{u} = 0, \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.87}$$

$$\theta_t - a\Delta\theta + \Big(\mathfrak{B},\ \widetilde{u} + b(x,t,\omega)\Big)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{4.88}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t,\omega)\, dx = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.89}$$

$$\widetilde{u}(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.90}$$

$$\theta(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4.91}$$

$$\widetilde{u}(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{4.92}$$

$$\theta(x,0,\omega) = \theta_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{4.93}$$

Нехай $A_1 : Y_1 \to Y_1^*$ взято з (4.14), $\mathsf{A}_1 : U_1(Q_{0,T}) \to [U_1(Q_{0,T})]^*$ – з (4.16), $N(t) : [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n \to [L^{q'(x,t)}(\Omega)]^n$ та $\mathsf{N} : [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n \to [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n$ взято з (4.18)-(4.19). Нехай $A_2(t) : Z_1 \to Z_1^*$, $\mathsf{A}_2 : L^2(0,T;Z_1) \to L^2(0,T;Z_1^*)$,

$$\langle A_2(t)z, w\rangle_{Z_1} := \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t) z_{x_i}(x),\, w_{x_j}(x)\Big) dx,\ z, w \in Z_1,\ t \in (0,T), \tag{4.94}$$

$$\langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} := \int\limits_0^T \langle A_2(t)u(t), v(t)\rangle_{Z_1}\, dt, \quad u, v \in L^2(0,T;Z_1). \tag{4.95}$$

Використовуватимемо позначення (2.9) і оператори $S(t) : V(t) \to [V(t)]^*$ та $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$, які визначимо так:

$$\langle S(t)z, w\rangle_{V(t)} := \langle A_2(t)z, w\rangle_{Z_1} + (N(t)z, w)_{\Omega}, \tag{4.96}$$

$z, w \in V(t)$, $t \in (0,T)$;

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} + \int\limits_{Q_{0,T}} (\mathsf{N}u)(x,t) v(x,t)\, dxdt, \tag{4.97}$$

$u, v \in U(Q_{0,T})$. Нехай $\chi_{0,\tau}$ взято з (1.40). Припустимо, що виконується умова

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq \max\Big\{2,\ \frac{n}{2},\ n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big)\Big\}, \quad h = \min\Big\{2, \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \tag{4.98}$$

Зазначимо, що з (4.98) випливає, що простір $Z_s$ з позначення (2.13) задовольняє включення: $Z_s \circlearrowright (Z_1 \cap [L^{q^0}(\Omega)]^n) \circlearrowright V(t)$, $t \in [0,T]$.

**Означення 4.2.** *Трійка функцій $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (4.86)-(4.93), якщо*

*1)* $\widetilde{u} \in W(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; Z_s^*)$ *м.н.,*
$\theta \in U_1(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ *м.н.,* $\theta_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*$ *м.н,*
$\pi \in W^{-1,\infty}(0,T; L^h(\Omega))$ *м.н.;*

*2) м.н. функції $\widetilde{u}$ та $\theta$ задовольняють рівності*

$$\langle \widetilde{u}_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), z_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\, z\Big) +$$

$$+ \theta\,(B, z)\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F,\, z)\, dxdt, \tag{4.99}$$

$$\langle \theta_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i} v_{x_i} + (\mathfrak{B}, \widetilde{u}+b)\, v\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} fv\, dxdt \tag{4.100}$$

*для всіх $\tau \in (0,T]$ і всіх пробних функцій $z \in \mathcal{D}_{\rm div}$ (див. (2.38)) та $v \in \mathcal{D}$ (див. (2.37), тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $\mathcal{D}^*_{\rm div}$ м.н. виконується рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u}+b) + B\theta = F, \tag{4.101}$$

*а в сенсі $[U_1(Q_{0,T})]^*$ та $\mathcal{D}^*$ м.н. виконується рівність*

$$\theta_t + \mathsf{A}_1\theta + (\mathfrak{B}, \widetilde{u}+b) = f; \tag{4.102}$$

*3) м.н. функція $\pi = \pi^0 + \pi^1_t$ $(\pi^0, \pi^1 \in L^h(Q_{0,T})$, див. (2.14)) для всіх пробних функцій $y \in \mathcal{D}$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ - \widetilde{u} y_t + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}), y_{x_j}\Big) + \Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\, y\Big) +$$

$$+ \theta(B, y) - \pi^0 \operatorname{div} y + \pi^1 \operatorname{div} y_t\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} (F,\, y)\, dxdt, \tag{4.103}$$

*тобто, м.н. в сенсі простору $\mathcal{D}^*$ виконується (4.86), а саме рівність*

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u}+b) + B\,\theta + \nabla\pi = F; \tag{4.104}$$

*4) $\pi$ м.н. задовольняє умову (4.89), $\widetilde{u}$ м.н. задовольняє умову (4.92), $\theta$ м.н. задовольняє умову (4.93).*

**Означення 4.3.** *Трійка* $\{u, \pi, \theta\}$ *називається узагальненим розв'язком задачі (4.71)-(4.78), якщо* $u$ *має вигляд (4.85), а трійка функцій* $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$ *є узагальненим розв'язком задачі (4.86)-(4.93).*

Основним результатом підрозділу є такі твердження.

**Теорема 4.3.** *Нехай виконуються умови* ***(A1)-(G1)***, ***(B1)-(W1)***. *Тоді задача (4.71)-(4.78) має єдиний узагальнений розв'язок* $\{u, \pi, \theta\}$. *Крім того,*
$u \in L_2\Big(\mathbb{S};\ L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;Z_1)\Big) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$,
$\theta \in L_2\Big(\mathbb{S};\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;Y_1)\Big)$.

4.2.1. *Детермінована задача.* Розглянемо схожу до (4.86)-(4.93) задачу

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x,t)\Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big)_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)\Big|\widetilde{u} + b(x,t)\Big|^{q(x,t)-2}\Big(\widetilde{u} + b(x,t)\Big) +$$

$$+ B\,\theta + \nabla\pi = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{4.105}$$

$$\operatorname{div}\widetilde{u} = 0, \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{4.106}$$

$$\theta_t - a\Delta\theta + \Big(\mathfrak{B},\ \widetilde{u} + b(x,t)\Big)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{4.107}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T), \tag{4.108}$$

$$\widetilde{u}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{4.109}$$

$$\theta(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{4.110}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.111}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.112}$$

де $F, b, f, u_0, \theta_0$ не залежать від випадкового параметра $\omega$ (тому казатимемо, що це – детермінована задача). Припустимо, що виконуються умови

**(F2):** $F \in L^2(0,T;H)$, $f \in L^2(Q_{0,T})$;

**(U2):** $u_0 \in H$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$;

**(W2):** $b \in U(Q_{0,T})$.

**Означення 4.4.** *Трійка* $\{\widetilde{u},\pi,\theta\}$ *називається узагальненим розв'язком детермінованої задачі (4.105)-(4.112), якщо*

*1)* $\widetilde{u}\in W(Q_{0,T})\cap C([0,T];Z_s^*))$ ,
$\theta\in U_1(Q_{0,T})\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ , $\theta_t\in[U_1(Q_{0,T})]^*$ ,
$\pi\in W^{-1,\infty}(0,T;L^h(\Omega))$ *(тут* $Z_s$ *взято з (2.13),* $h$ *взято з (4.98)),*

*2) функції* $\widetilde{u}$ *та* $\theta$ *задовольняють рівності*

$$\langle\widetilde{u}_t,\chi_{0,\tau}z\rangle_{U(Q_{0,T})}+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i}+b_{x_i}),z_{x_j}\Big)+\Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\,z\Big)+$$

$$+\,\theta\,(B,z)\Big]\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}(F,\,z)\,dxdt, \tag{4.113}$$

$$\langle\theta_t,\chi_{0,\tau}v\rangle_{U_1(Q_{0,T})}+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[a\sum_{i=1}^n\theta_{x_i}v_{x_i}+(\mathfrak{B},\widetilde{u}+b)\,v\Big]\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}fv\,dxdt \tag{4.114}$$

*для всіх* $\tau\in(0,T]$ *і всіх пробних функцій* $z\in\mathcal{D}_{\rm div}$ *(див. (2.38) та* $v\in\mathcal{D}$ *(див. (2.37), тобто, в сенсі просторів* $[U(Q_{0,T})]^*$ *та* $\mathcal{D}^*_{\rm div}$ *виконується рівність*

$$\widetilde{u}_t+\mathsf{S}(\widetilde{u}+b)+B\,\theta=F; \tag{4.115}$$

*а в сенсі* $[U_1(Q_{0,T})]^*$ *та* $\mathcal{D}^*$ *виконується рівність*

$$\theta_t+\mathsf{A}_1\theta+(\mathfrak{B},\widetilde{u}+b)=f; \tag{4.116}$$

*3) функція* $\pi=\pi^0+\pi^1_t$ $(\pi^0,\pi^1\in L^h(Q_{0,T})$ *, див. (2.14)) задовольняє*

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-\widetilde{u}\,y_t+\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(\widetilde{u}_{x_i}+b_{x_i}),y_{x_j}\Big)+\Big(G|\widetilde{u}+b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}+b),\,y\Big)+$$

$$+\,\theta\,(B,z)\Big]\,dxdt-\pi^0\operatorname{div}y+\pi^1\operatorname{div}y_t\Big]\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}(F,\,y)\,dxdt \tag{4.117}$$

*для всіх пробних функцій* $y\in\mathcal{D}$ *, тобто, в сенсі простору* $\mathcal{D}^*$ *виконується рівняння (4.105), а саме рівність*

$$\widetilde{u}_t+\mathsf{S}(\widetilde{u}+b)+B\,\theta+\nabla\pi=F; \tag{4.118}$$

*4)* $\pi$ *задовольняє умову (4.108);* $\widetilde{u}$ *задовольняє умову (4.111);*
$\theta$ *задовольняє умову (4.112).*

**Теорема 4.4.** *Нехай виконуються умови **(A1)-(G1)**, **(F2)-(W2)**, сталі $s$ та $h$ взято з умови (4.98). Тоді існує розв'язок $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$ детермінованої задачі (4.105)-(4.112).*

*Доведення. Крок 1 (побудова гальоркінських наближень).* Нехай простір $Z_s$ та набір функцій $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ взято з Твердження 2.2, причому $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – ортонормовані в $H$, а тому і в $[L^2(\Omega)]^n$. Зокрема, $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ є базою простору $V(t)$ для кожного $t \in [0,T]$. Нехай $\{v^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – база простору $Y_1$, яку ми (для спрощення) вважатимемо ортогональною в $L^2(\Omega)$.

Нехай вектори $(\alpha_1^m,\ldots,\alpha_m^m), (\beta_1^m,\ldots,\beta_m^m) \in \mathbb{R}^m$ є такими, що функції

$$u_0^m(x) = \sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu^m w^\mu(x), \quad \theta_0^m(x) = \sum_{\mu=1}^m \beta_\mu^m w^\mu(x), \quad x \in \Omega,$$

задовольняють умови:

$$u_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ сильно в } H \text{ та в } [L^2(\Omega)]^n; \quad \theta_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta_0 \text{ сильно в } L^2(\Omega). \tag{4.119}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що виконуються оцінки

$$\int_\Omega |u_0^m(x)|^2\,dx \le \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx, \tag{4.120}$$

$$\int_\Omega |\theta_0^m(x)|^2\,dx \le \int_\Omega |\theta_0(x)|^2\,dx. \tag{4.121}$$

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо такі функції:

$$\widetilde{u}^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^m \varphi_\mu^m(t) w^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{4.122}$$

$$\theta^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu^m(t) v^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.123}$$

де $(\varphi_1^m,\ldots,\varphi_m^m,\psi_1^m,\ldots,\psi_m^m)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$(\widetilde{u}_t^m(t), w^\mu)_\Omega + \Big\langle S(t)\Big(\widetilde{u}^m(t) + b(t)\Big), w^\mu\Big\rangle_{V(t)} + (B\theta^m(t), w^\mu)_\Omega =$$

$$= (F(t), w^\mu)_\Omega, \tag{4.124}$$

$$(\theta_t^m(t), v^\mu)_\Omega + \langle A_1\, \theta^m(t), v^\mu\rangle_{Y_1} + \Big((\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m(t) + b(t))_{\mathbb{R}^n}, v^\mu\Big)_\Omega =$$

$$= (f(t), v^\mu)_\Omega, \quad t \in (0,T), \quad \mu = \overline{1,m}, \tag{4.125}$$

з початковими умовами

$$\varphi_1^m(0) = \alpha_1^m, \quad \dots, \quad \varphi_m^m(0) = \alpha_m^m, \tag{4.126}$$

$$\psi_1^m(0) = \beta_1^m, \quad \dots, \quad \psi_m^m(0) = \beta_m^m, \tag{4.127}$$

Аналогічно як при доведенні теореми 2.1 показуємо існування глобального розв'язку $(\varphi_1^m, ..., \varphi_m^m, \psi_1^m, ..., \psi_m^m) \in H^1(0,T;\mathbb{R}^{2m})$ задачі Коші (4.124)-(4.127). Зрозуміло також, що

$$\widetilde{u}^m(0) = u_0^m, \tag{4.128}$$

$$\theta^m(0) = \theta_0^m. \tag{4.129}$$

*Крок 2 (апріорні оцінки).* Помножимо $\mu$-е рівняння (4.124) на функцію $\varphi_\mu^m(t)$ і, просумувавши за $\mu = \overline{1,m}$, отримаємо:

$$\sum_{\mu=1}^m \Big(\widetilde{u}_t^m(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega + \sum_{\mu=1}^m \Big\langle S(t)(\widetilde{u}^m(t) + b(t)),\ w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big\rangle_{V(t)} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^m \Big(B\theta^m(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega = \sum_{\mu=1}^m \Big(F(t), w^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega, \quad t \in (0,T). \tag{4.130}$$

Тепер $\mu$-ту рівність (4.125) помножимо на $\psi_\mu^m(t)$ і підсумовуємо за $\mu = \overline{1,m}$. Отримаємо

$$\sum_{\mu=1}^m \Big(\theta_t^m(t), v^\mu \psi_\mu^m(t)\Big)_\Omega + \sum_{\mu=1}^m \Big\langle A_1\, \theta^m(t), v^\mu \psi_\mu^m(t)\Big\rangle_V +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^m \Big((\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m(t) + b(t))_{\mathbb{R}^n},\ v^\mu \psi_\mu^m(t)\Big)_\Omega = \sum_{\mu=1}^m \Big(f(t), v^\mu \varphi_\mu^m(t)\Big)_\Omega. \tag{4.131}$$

Додамо (4.131) до (4.130). Після інтегрування одержаної рівності за змінною $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ і певних перетворень, отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(\widetilde{u}_t^m, \widetilde{u}^m) + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}\widetilde{u}_{x_i}^m, \widetilde{u}_{x_j}^m) + (G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), \widetilde{u}^m) + \theta_t^m \theta^m +$$
$$+ a \sum_{i=1}^m |\theta_{x_i}^m|^2\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(F, \widetilde{u}^m) - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij} b_{x_i}, \widetilde{u}_{x_j}^m) - (B, \widetilde{u}^m)\theta^m +$$
$$+ f\theta^m - (\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)\theta^m\Big]\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{4.132}$$

Використавши формулу (4.122), ортонормованість функції $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ в $H$ та в $[L^2(\Omega)]^n$, після інтегрування частинами і використання (4.120), отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (\widetilde{u}^m_t, \widetilde{u}^m)\; dxdt = \sum_{\mu,s=1}^{m} \int\limits_0^\tau (\varphi^m_s)_t(t)\varphi^m_\mu(t)\; dt \int\limits_\Omega (w^s(x), w^\mu(x))_{\mathbb{R}^n}\; dx =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \int\limits_0^\tau \Big(\varphi^m_\mu(t)\Big)_t \varphi^m_\mu(t)\; dt = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}\Big(|\varphi^m_\mu(t)|^2\Big)\; dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(\tau)|^2 - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(0)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(\tau)|^2 \int\limits_\Omega |w^\mu(x)|^2\; dx - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi^m_\mu(0)|^2 \int\limits_\Omega |w^\mu(x)|^2\; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\; dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,0)|^2\; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\; dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u^m_0(x)|^2\; dx \geq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\; dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\; dx. \tag{4.133}$$

Аналогічно матимемо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \theta^m_t \theta^m\; dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\theta^m(x,\tau)|^2\; dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\theta^m_0(x)|^2\; dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\theta^m(x,\tau)|^2\; dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\theta_0(x)|^2\; dx. \tag{4.134}$$

З умови **(A)** випливає, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}\widetilde{u}^m_{x_i}, \widetilde{u}^m_{x_j}) \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2. \tag{4.135}$$

З узагальненої нерівності Юнга типу (2.154) та умови **(G1)** випливає, що (візьмемо тут $\varepsilon_1 = g_0/2$)

$$\Big(G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), \widetilde{u}^m\Big)_{\mathbb{R}^n} = \Big(G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), \widetilde{u}^m + b\Big)_{\mathbb{R}^n} -$$

$$-\Big(G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), b\Big)_{\mathbb{R}^n} \geq g_0|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - g^0|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-1}|b| \geq$$

$$\geq g_0|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - \varepsilon_1|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - C_{23}(\varepsilon_1)|b|^{q(x,t)} =$$

$$= \frac{g_0}{2}|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} - C_{24}|b|^{q(x,t)}. \tag{4.136}$$

Зі стандартної нерівності Юнга (при $q'(x,t) \equiv q(x,t) \equiv 2$) одержимо

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}b_{x_i}, \widetilde{u}^m_{x_j}\Big) \le \sum_{i,j=1}^{n}|A_{ij}|\cdot|b_{x_i}|\cdot|\widetilde{u}^m_{x_j}| \le C_{25}\sum_{i,j=1}^{n}|\widetilde{u}^m_{x_j}|\cdot|b_{x_i}| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\varepsilon_2|\widetilde{u}^m_{x_j}|^2 + C_{26}(\varepsilon_2)\cdot C_{25}^2\cdot|b_{x_i}|^2\Big) = n\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}_{x_i}|^2 + C_{27}(\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}|^2. \tag{4.137}$$

Використавши стандартну нерівність Юнга, отримаємо таке:

$$\Big|(F,\widetilde{u}^m) + f\theta^m - (B,\widetilde{u}^m)\theta^m - (\mathfrak{B},\widetilde{u}^m + b)\theta^m\Big| \le$$

$$\le |F|\cdot|\widetilde{u}^m| + |f|\cdot|\theta^m| + |B|\cdot|\widetilde{u}^m|\cdot|\theta^m| + |\mathfrak{B}|\cdot|\widetilde{u}^m|\cdot|\theta^m| + |\mathfrak{B}|\cdot|b|\cdot|\theta^m| \le$$

$$\le C_{28}(B,\mathfrak{B})\Big(|F|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |f|^2 + |\theta^m|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\theta^m|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\theta^m|^2 +$$

$$+ |b|^2 + |\theta^m|^2\Big) \le C_{29}(B,\mathfrak{B})\Big(|F|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |f|^2 + |\theta^m|^2 + |b|^2\Big). \tag{4.138}$$

Використавши (4.133)-(4.138), з рівності (4.132) одержимо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2 + |\theta^m(x,\tau)|^2\Big]\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(a_0 - n\varepsilon_2)\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + a\sum_{i=1}^{n}|\theta^m_{x_i}|^2 +$$

$$+ \frac{g_0}{2}|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt \le C_{30}(\varepsilon_2)\mathtt{F}(\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|\widetilde{u}^m|^2 + |\theta^m|^2\Big]\,dxdt, \tag{4.139}$$

де

$$\mathtt{F}(\tau) = \int\limits_{\Omega}\Big[|u_0(x)|^2 + |\theta_0(x)|^2\Big]\,dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|F|^2 + |f|^2 + \sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}|^2 + |b|^2 + |b|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{4.140}$$

Нехай $y(t) := \int_{\Omega}[|\widetilde{u}^m(x,t)|^2 + |\theta^m(x,t)|^2]\,dx$, $t \in [0,T]$. Тоді з (4.139) при $\varepsilon_2 = \frac{a_0}{2n}$ отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\,y(\tau) \le C_{31}\mathtt{F}(\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau}y(t)\,dt, \quad \tau \in [0,T].$$

Тому, з узагальненої леми Гронуола-Белмана (твердження 2.8) випливає, що $y(\tau) \le C_{32}\mathtt{F}(\tau)$, тобто

$$\int\limits_{\Omega} \Big[|\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2 + |\theta^m(x,\tau)|^2\Big]\, dx \le C_{32}\mathtt{F}(\tau), \quad \tau \in (0,T]. \tag{4.141}$$

З (4.139) та (4.141) слідує, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} + \sum_{i=1}^{n} |\theta^m_{x_i}|^2 + |\theta^m|^2\Big]\, dxdt \le C_{33}\mathtt{F}(\tau), \tag{4.142}$$

$\tau \in (0,T]$. Враховуючи оцінку (2.157), звідси отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m|^2 + |\widetilde{u}^m|^{q(x,t)} + \sum_{i=1}^{n} |\theta^m_{x_i}|^2 + |\theta^m|^2\Big]\, dxdt \le C_{34}\, \mathtt{F}(\tau), \tag{4.143}$$

$\tau \in (0,T]$. З цієї оцінки випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b)\Big|^{q'(x,t)}\, dxdt \le C_{35} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)}\, dxdt \le$$

$$\le C_{36}. \tag{4.144}$$

З (4.141) та (4.142) слідують оцінки (використаємо позначення (4.19))

$$||\widetilde{u}^m; L^\infty(0,T;H)|| + ||\widetilde{u}^m; U(Q_{0,T})|| \le C_{37}, \tag{4.145}$$

$$||\theta^m; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))|| + ||\theta^m; U_1(Q_{0,T})|| \le C_{38}, \tag{4.146}$$

$$||\,\mathsf{N}(\widetilde{u}^m + b); [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n|| \le C_{37}. \tag{4.147}$$

Тут сталі $C_{24}, \ldots, C_{37}$ не залежать від $m$.

З (4.145)-(4.147) випливає існування підпослідовності $\{\widetilde{u}^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\widetilde{u}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ такої що,

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad *-\text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{і слабко в} \quad U(Q_{0,T}), \tag{4.148}$$

$$\theta^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \theta \quad *-\text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{і слабко в} \quad U_1(Q_{0,T}), \tag{4.149}$$

$$\mathsf{N}(\widetilde{u}^m + b) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad [L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})]^n. \tag{4.150}$$

<u>Крок 3</u> (додаткові оцінки). З побудови простору $U(Q_{0,T})$ отримаємо:

$$U(Q_{0,T}) \circlearrowright L^2(0,T;H) \circlearrowright [U(Q_{0,T})]^*. \tag{4.151}$$

Оскільки, $s$ задовольняє (4.98), то, використавши позначення (4.81)-(4.82) одержимо, що

$$L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;Z_s) \overline{\circlearrowright} L^{\max\{2,q^0\}}(0,T;V_+) \overline{\circlearrowright} U(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowright}$$

$$\overline{\circlearrowright} L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-). \tag{4.152}$$

Тому

$$[U(Q_{0,T})]^* \overline{\circlearrowright} L^r(0,T;V_+^*) \overline{\circlearrowright} L^r(0,T;Z_s^*), \tag{4.153}$$

де

$$r := \frac{\max\{2,q^0\}}{\max\{2,q^0\}-1}. \tag{4.154}$$

Використавши (4.152) і (4.145), отримаємо

$$||\widetilde{u}^m; L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;V_-)|| \le C_{39}||\widetilde{u}^m; U(Q_{0,T})|| \le C_{40}. \tag{4.155}$$

Візьмемо довільне $v \in U(Q_{0,T})$. З (4.97) та нерівності Юнга (1.33) маємо

$$\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b), v\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(\widetilde{u}^m_{x_i} + b_{x_i}), v_{x_j}) +$$

$$+ (G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), v)\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_{41} \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ \sum_{i,j=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i} + b_{x_i}| \cdot |v_{x_j}| + |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-1} \cdot |v|\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_{42} \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i} + b_{x_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)} + |v|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt. \tag{4.156}$$

Зрозуміло, що для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$|\alpha + \beta|^{q(x,t)} \le C_{43}(|\alpha|^{q(x,t)} + |\beta|^{q(x,t)}), \tag{4.157}$$

де стала $C_{43} > 0$ не залежить від $\alpha, \beta, x, t$. З (4.156), (4.157), оцінки (4.143) та леми 2.9 випливає, що якщо $||v; U(Q_{0,T})|| \le 1$, то

$$\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b), v\rangle_{U(Q_{0,T})} \le C_{44}\Big\{ \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}^m_{x_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}^m|^{q(x,t)} + |b|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[ \sum_{i=1}^{n} |(v_k)_{x_i}|^2 + |v_k|^{q(x,t)}\Big]\, dxdt\Big\} \le C_{45}, \tag{4.158}$$

де стала $C_{45} > 0$ не залежить від $m$. Тому для довільного $v \in U(Q_{0,T})$ виконуються оцінки

$$\Big\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b), \frac{v}{||v; U(Q_{0,T})||} \Big\rangle_{U(Q_{0,T})} \le C_{45}$$

та $\langle \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b), v\rangle_{U(Q_{0,T})} \le C_{45}||v; U(Q_{0,T})||$, а тому і оцінка

$$||\mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b); [U(Q_{0,T})]^*|| \le C_{45}, \tag{4.159}$$

де оператор $\mathsf{S}$ взято з (4.97), стала $C_{45} > 0$ не залежать від $m$.

Використавши твердження 2.1, позначення (4.97) та (2.27), аналогічно як в [86, Розд. 1, §5.3], перепишемо (4.124) у вигляді

$$\widetilde{u}_t^m = \widehat{P}_m^*(F - \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b) - B\theta^m). \tag{4.160}$$

Тому, для чисел $r$ з (4.154) та $s$ з (4.98), використавши (4.160), оцінку (2.31), вкладення (4.153) і (4.151) та оцінку (4.159), отримаємо:

$$||\widetilde{u}_t^m; L^r(0,T; Z_s^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(F - \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b) - B\theta^m); L^r(0,T; Z_s^*)|| \le$$

$$\le ||F - \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b) - B\theta^m; L^r(0,T; Z_s^*)|| \le$$

$$\le C_{46}||F - \mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b) - B\theta^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le C_{47}\Big(||F; L^2(0,T; H)|| +$$

$$+ ||\mathsf{S}(\widetilde{u}^m + b); [U(Q_{0,T})]^*|| + ||\theta^m; L^2(Q_{0,T})||\Big) \le C_{48}, \tag{4.161}$$

де стала $C_{48} > 0$ не залежить від $m$.

З означення простору $U_1(Q_{0,T})$ випливає, що

$$L^2(0,T; L^2(\Omega)) \subset [U_1(Q_{0,T})]^* = L^2(0,T; Y_1^*). \tag{4.162}$$

З оцінки (4.143), обмеженості оператора $\mathsf{A}_1$ та з (4.16) випливає оцінка

$$||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T})]^*|| \le C_{49}. \tag{4.163}$$

Використавши твердження 2.1 для $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ та $\mathcal{V} = Y_1$, з (4.125) аналогічно як рівність (4.160) отримаємо, що

$$\theta_t^m = \widehat{P}_m^*\Big(f - \mathsf{A}_1\theta^m - (\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)_{\mathbb{R}^n}\Big). \tag{4.164}$$

Тому з оцінки типу (3.50) для $\mathcal{V} = Y_1$, використавши вкладення (4.162) та оцінки (4.143) і (4.163), отримаємо нерівності

$$||\theta_t^m; L^2(0,T; Y_1^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(f - \mathsf{A}_1\theta^m - (\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)_{\mathbb{R}^n}); L^2(0,T; Y_1^*)|| \le$$

$$\leq ||f - \mathsf{A}_1\theta^m - (\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)_{\mathbb{R}^n}; L^2(0,T;Y_1^*)|| \leq$$

$$\leq C_{50}\Big(||f; L^2(Q_{0,T})|| + ||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T})]^*|| + ||(\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)_{\mathbb{R}^n}; L^2(Q_{0,T})||\Big) \leq$$

$$\leq C_{51}\Big(||f; L^2(Q_{0,T})|| + ||\mathsf{A}_1\theta^m; [U_1(Q_{0,T}]^*|| + ||\widetilde{u}^m; L^2(0,T;H)|| +$$

$$+ ||b; [L^2(Q_{0,T})]^n||\Big) \leq C_{52}. \tag{4.165}$$

<u>Крок 4</u> (граничний перехід). Оскільки, $V_- \overset{K}{\subset} H \circlearrowleft Z_s^*$, то з (4.155), (4.161), теореми Обена (див. Твердження 2.5) та Твердження 2.7 отримаємо:

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{в просторі} \quad L^{\min\{2,q_0\}}(0,T;H) \cap C([0,T]; Z_s^*),$$

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{майже скрізь} \quad Q_{0,T}.$$

Тому, (4.111) виконується і (див. (4.150)) $\chi_1 = \mathsf{N}(\widetilde{u} + b)$.

Оскільки $Y_1 \overset{K}{\subset} L^2(\Omega) \circlearrowleft Y_1^*$, то з (4.143), (4.165), теореми Обена (твердження 2.5) і твердження 2.7 отримаємо, що

$$\theta^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \theta \quad \text{в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; Y_1^*) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Використаємо отримані збіжності.

Візьмемо $\psi \in C_0^1([0,T])$. Коли ми перемножимо рівність (4.124) на $\psi(t)$, проінтегруємо по $t \in (0,T)$, і перший доданок проінтегруємо частинами, отримаємо наступне:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\Big(\widetilde{u}^m, w^\mu\Big)\psi_t + \sum_{i,j=1}^n \Big(A_{ij}(\widetilde{u}^m_{x_i} + b_{x_i}), w^\mu_{x_j}\Big)\psi +$$

$$+\Big(G|\widetilde{u}^m + b|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}^m + b), w^\mu\Big)\psi + \theta^m(B, w^\mu)\psi\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \Big(F, w^\mu\Big)\psi\, dxdt.$$

Взявши $m = m_k$ і спрямувавши $k \to \infty$, завдяки довільності $\psi$, того, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ – база в $V(t)$ та щільності $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ в $U(Q_{0,T})$ отримаємо (4.113) та

$$\langle \mathcal{F}, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, z \in U(Q_{0,T}), \tag{4.166}$$

де $\mathcal{F} := \widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u} + b) + B\theta - F$. Отже, $\widetilde{u}_t \in [U(Q_{0,T})]^*$ та (4.115) доведено.

Оскільки $u \in L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$, то (див. [107, с. 1099]) з означення (2.14) та вкладення (3.113) для $h$ з умови (4.98) отримаємо, що

$$u_t \in W^{-1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \subset W^{-1,\infty}(0,T;[L^h(\Omega)]^n) \subset W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n).$$

Тому з вигляду оператора $\mathcal{F}$, з (3.112) та (3.113) випливає, що

$$\mathcal{F} \in W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n) + L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q(x,t)}{q(x,t)-1}}(Q_{0,T})]^n \subset$$

$$\subset W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n) + L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(Q_{0,T})]^n \subset$$

$$\subset W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n) + L^h(0,T;[H^{-1}(\Omega) + L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega)]^n) \subset$$

$$\subset W^{-1,\infty}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n).$$

Тоді, з узагальненої теореми де Рама (див. Твердження 2.4) випливає існування такого $\pi \in W^{-1,\infty}(0,T;W^{0,h}(\Omega)) = W^{-1,\infty}(0,T;L^h(\Omega))$, що справджує рівності (4.108), (4.117).

Нехай $\psi \in C_0^1([0,T])$. Домноживши рівність (4.125) на $\psi(t)$, зінтегрувавши за $t \in (0,T)$ і перший доданок зінтегрувавши частинами, отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\theta^m v^\mu \psi_t + a\sum_{i=1}^n \theta^m_{x_i} v^\mu_{x_i}\psi + (\mathfrak{B}, \widetilde{u}^m + b)_{\mathbb{R}^n} v^\mu \psi\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} f v^\mu \psi \, dxdt. \tag{4.167}$$

З (4.167) випливає, що

$$\langle \mathcal{F}_1, v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, v \in U_1(Q_{0,T}), \tag{4.168}$$

де $\mathcal{F}_1 := \theta_t + \mathsf{A}_1\theta + (\mathfrak{B}, u+b)_{\mathbb{R}^n} - f$, а тому $\theta_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*$ та виконуються рівності (4.114), (4.116). Теорему 4.4 доведено. $\square$

Нехай $SP(u_0,F,b,\theta_0,f)$ – множина узагальнених розв'язків $\{\widetilde{u},\pi,\theta\}$ детермінованої задачі (4.105)-(4.112) в сенсі означення 4.4. В теоремі 4.4 ми довели, що $SP(u_0,F,b,\theta_0,f) \neq \varnothing$.

**Означення 4.5.** *Казатимемо, що розв'язок задачі (4.105)-(4.112) неперервно залежить від вхідних даних* $u_0, F, b, \theta_0, f$, *якщо для всіх функцій* $u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;H)$, $b \in U(Q_{0,T})$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_{0,T})$ *і для довільних* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що для довільних* $u_0^\delta \in H$, $F^\delta \in L^2(0,T;H)$, $b^\delta \in U(Q_{0,T})$, $\theta_0^\delta \in L^2(\Omega)$, $f^\delta \in L^2(Q_{0,T})$, *які задовольняють оцінки*

$$||u_0^\delta - u_0; H|| < \delta, \quad ||F^\delta - F; L^2(0,T;H)|| < \delta, \quad ||b^\delta - b; U(Q_{0,T})|| < \delta, \tag{4.169}$$

$$||\theta_0^\delta - \theta_0; L^2(\Omega)|| < \delta, \quad ||f^\delta - f; L^2(Q_{0,T})|| < \delta, \tag{4.170}$$

*розв'язки* $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\} \in SP(u_0, F, b, f)$ *та* $\{\widetilde{u}^\delta, \pi^\delta, \theta^\delta\} \in SP(u_0^\delta, F^\delta, b^\delta, f^\delta)$ *справджують нерівність*

$$||\widetilde{u}^\delta - \widetilde{u}; L^\infty(0,T;H)|| + ||\widetilde{u}^\delta - \widetilde{u}; U(Q_{0,T})|| +$$

$$+ ||\theta_0^\delta - \theta; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))|| + ||\theta^\delta - \theta; U_1(Q_{0,T})|| < \varepsilon. \tag{4.171}$$

Зауважимо, що ми в цьому означенні нічого не стверджуємо про близькість елементів $\pi$ та $\pi^\delta$.

**Теорема 4.5.** *Нехай виконуються умови теореми 4.4. Тоді узагальнений розв'язок* $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$ *задачі (4.105)-(4.112) неперервно залежить від вхідних даних* $u_0, F, b, \theta_0, f$.

*Доведення.* Нехай $\{\widetilde{u}_1, \pi_1, \theta_1\} \in SP(u_0^1, F^1, b^1, \theta_0^1, f^1)$. Запишемо (4.115) для функцій $\widetilde{u}_1, \theta_1$:

$$\widetilde{u}_{1\,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_1 + b^1) + B\theta_1 = F^1. \tag{4.172}$$

Нехай $\{\widetilde{u}_2, \pi_2, \theta_2\} \in SP(u_0^2, F^2, b^2, \theta_0^2, f^2)$. Запишемо (4.115) для $\widetilde{u}_2, \theta_2$:

$$\widetilde{u}_{2\,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_2 + b^2) + B\theta_2 = F^2. \tag{4.173}$$

Віднявши (4.173) від (4.172), подіємо елементами з цієї рівності на елемент $\widetilde{u} \cdot \chi_{0,\tau} \in U(Q_{0,T})$, де $\chi_{0,\tau}$ взято з (1.40), $\widetilde{u} := \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, $\theta := \theta_1 - \theta_2$. Отримаємо:

$$\langle \widetilde{u}_t, \chi_{0,\tau}\widetilde{u}\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int_0^\tau \Big[\langle S(t)(\widetilde{u}_1(t) + b^1(t)) - S(t)(\widetilde{u}_2(t) + b^2(t)), \widetilde{u}(t)\rangle_{V(t)} +$$

$$+ (B, \widetilde{u})\theta\Big]\, dt = \int_0^\tau (F^1(t) - F^2(t), \widetilde{u}(t))_\Omega\, dt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{4.174}$$

Запишемо (4.116) для функцій $\widetilde{u}_1, \theta_1$:

$$\theta_{1\,t} + \mathsf{A}_1\theta_1 + (\mathfrak{B}, \widetilde{u}_1 + b^1) = f_1. \tag{4.175}$$

Запишемо (4.116) для $\widetilde{u}_2, \theta_2$:

$$\theta_{2\,t} + \mathsf{A}_1\theta_2 + (\mathfrak{B}, \widetilde{u}_2 + b^2) = f_2. \tag{4.176}$$

Віднявши (4.176) від (4.175), подіємо елементами з цієї рівності на елемент $\theta \cdot \chi_{0,\tau} \in U(Q_{0,T})$. Отримаємо:

$$\langle \theta_t, \chi_{0,\tau}\theta\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int_{Q_{0,\tau}} \Big[a \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2 + (\mathfrak{B}, \widetilde{u} + b^1 - b^2)\,\theta\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,\tau}} (f^1 - f^2)\theta \, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{4.177}$$

Додавши (4.174) та (4.177), використавши формули інтегрування частинами (1.39) та (1.44), одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|\widetilde{u}(x,\tau)|^2+\theta(x,\tau)|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}\widetilde{u}_{x_i},\widetilde{u}_{x_j})+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(b^1_{x_i}-b^2_{x_i}),\widetilde{u}_{x_j})+$$

$$+\Big(G|\widetilde{u}_1+b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1+b^1)-G|\widetilde{u}_2+b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2+b^2),(\widetilde{u}_1+b^1)-(\widetilde{u}_2+b^2)\Big)-$$

$$-\Big(G|\widetilde{u}_1+b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1+b^1)-G|\widetilde{u}_2+b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2+b^2),b^1-b^2\Big)+$$

$$+(B,\widetilde{u})\theta+a\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}|^2+(\mathfrak{B},\widetilde{u}+b^1-b^2)\,\theta\Big]dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|u_0^1-u_0^2|^2+|\theta_0^1-\theta_0^2|^2\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(F^1-F^2,\widetilde{u})+(f^1-f^2)\theta\Big]\,dxdt. \tag{4.178}$$

Оскільки $q(x,t)\geq q_0\geq 2$, то, використавши (2.156) для цього $q=q(x,t)$ та для $\beta=\beta(x,t)=q(x,t)$, після елементарних перетворень, з (4.178) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|\widetilde{u}(x,\tau)|^2+\theta(x,\tau)|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[a_0\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}_{x_i}|^2+C_{53}|\widetilde{u}+b^1-b^2|^{q(x,t)}+$$

$$+a\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}|^2\Big]\,dxdt\leq\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|u_0^1-u_0^2|^2+|\theta_0^1-\theta_0^2|^2\Big]\,dx+$$

$$+I_1(\tau)+I_2(\tau)+I_3(\tau)+I_4(\tau)+I_5(\tau), \tag{4.179}$$

де стала $C_{53}>0$ залежить лише від $g_0,q_0,q^0$;

$$I_1(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|F^1-F^2|\cdot|\widetilde{u}|+|f^1-f^2|\cdot|\theta|\Big]\,dxdt,$$

$$I_2(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}||A_{ij}||\cdot|b^1_{x_i}-b^2_{x_i}|\cdot|\widetilde{u}_{x_j}|\,dxdt,$$

$$I_3(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}||G||\cdot\Big||\widetilde{u}_1+b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_1+b^1)-|\widetilde{u}_2+b^2|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_2+b^2)\Big|\cdot|b^1-b^2|\,dxdt,$$

$$I_4(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\mathfrak{B}| \cdot |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |\theta| \, dxdt, \qquad I_5(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} |B| \cdot |\widetilde{u}| \cdot |\theta| \, dxdt.$$

Зі стандартності нерівності Юнга легко отримаємо оцінки

$$I_1(\tau) \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F^1 - F^2|^2 + |f^1 - f^2|^2\Big] \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\widetilde{u}|^2 + |\theta|^2\Big] \, dxdt, \quad (4.180)$$

$$I_4(\tau) \le C_{54} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\widetilde{u}|^2 + |b^1 - b^2|^2 + |\theta|^2\Big] \, dxdt, \quad (4.181)$$

$$I_5(\tau) \le C_{55} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\widetilde{u}|^2 + |\theta|^2\Big] \, dxdt. \quad (4.182)$$

Аналогічно як оцінки (2.200), (2.209) матимемо, що

$$I_2(\tau) \le C_{56}(\varepsilon_3) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2 \, dxdt + \varepsilon_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 \, dxdt, \quad (4.183)$$

$$I_3(\tau) \le \varepsilon_5 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)} \, dxdt +$$

$$+(\varepsilon_4+\varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}+b^1-b^2|^{q(x,t)} \, dxdt + C_{57}(\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1-b^2|^{q(x,t)} \, dxdt, \quad (4.184)$$

де $\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_6 > 0$ – довільні сталі.

Застосувавши нерівності (4.180)-(4.184) до правої частини (4.179), після певних перетворень, отримаємо таке:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Big[|\widetilde{u}(x,\tau)|^2 + \theta(x,\tau)|^2\Big] \, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(a_0 - \varepsilon_3) \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + (C_{53} - \varepsilon_4 - \varepsilon_6)|\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)} + a \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2\Big] \, dxdt \le$$

$$\le \varepsilon_5 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)} \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \Big[|u^1_0 - u^2_0|^2 + |\theta^1_0 - \theta^2_0|^2\Big] \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F^1 - F^2|^2 + |f^1 - f^2|^2\Big] \, dxdt + C_{56}(\varepsilon_3) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2 \, dxdt +$$

$$+ C_{57}(\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)} \, dxdt + C_{58} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^2 \, dxdt +$$

$$+ C_{59} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\widetilde{u}|^2 + |\theta|^2\Big]\, dxdt. \qquad (4.185)$$

Нехай

$$J(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt. \qquad (4.186)$$

Вибравши $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_6 > 0$ досить малими та використавши оцінку (2.212), з (4.185) після деяких перетворень одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \Big[|\widetilde{u}(x,\tau)|^2 + \theta(x,\tau)|^2\Big]\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^2 + |\widetilde{u}|^{q(x,t)} + \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2\Big]\, dxdt \leq$$

$$\leq C_{60}\Big\{\varepsilon_5 J(\tau) + C_{61}(\varepsilon_5) M_1(\tau) + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\widetilde{u}|^2 + |\theta|^2\Big]\, dxdt\Big\}, \qquad (4.187)$$

де

$$M_1(\tau) = \int\limits_{\Omega} \Big[|u_0^1 - u_0^2|^2 + |\theta_0^1 - \theta_0^2|^2\Big]\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F^1 - F^2|^2 + |f^1 - f^2|^2\Big]\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^2 + |b^1 - b^2|^{q(x,t)} + |b^1 - b^2|^2\Big]\, dxdt; \qquad (4.188)$$

$\varepsilon_5 > 0$ – довільне число; стала $C_{61}(\varepsilon_5) > 0$ залежить від $\varepsilon_5$ та не залежить від $\tau, J(\tau), M_1(\tau), \widetilde{u}, \theta$; стала $C_{60} > 0$ не залежить від $\varepsilon_5, \tau, J(\tau), M_1(\tau), \widetilde{u}, \theta$.

Нехай

$$y(\tau) := \int\limits_{\Omega} \Big[|\widetilde{u}(x,\tau)|^2 + \theta(x,\tau)|^2\Big]\, dx, \quad \tau \in (0,T].$$

Тоді з (4.187) випливає, що

$$y(\tau) \leq C_{60}\Big(\varepsilon_5 J(\tau) + C_{61}(\varepsilon_5) M_1(\tau) + \int\limits_0^{\tau} y(t)\, dt\Big), \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (твердження 2.8), бачимо, що

$$y(\tau) \leq \Big(C_{60} \cdot \varepsilon_5 J(\tau) + C_{60} \cdot C_{61}(\varepsilon_5) M_1(\tau)\Big) e^{C_{60}\tau}.$$

Оскільки $J(\tau) \leq J(T)$, $M_1(\tau) \leq M_1(T)$, $e^{C_{60}\tau} \leq e^{C_{60}T}$, то з цієї нерівності, після деяких перепозначень, випливає, що

$$y(\tau) \leq \varepsilon_7 J(T) + C_{62}(\varepsilon_7) M_1(T), \quad \tau \in [0,T], \qquad (4.189)$$

де $\varepsilon_7 > 0$ – довільне число, стала $C_{62}(\varepsilon_7)$ залежить від $\varepsilon_7$ але не залежить від $\tau, y(\tau), J(T), M_1(T)$.

Нехай $\mathrm{B}_1(R)$ – куля радіуса $R > 0$ в просторі $U(Q_{0,T})$ з центром в точці нуль цього простору. Тоді існує $R_1 > 0$ таке, що $b^1, b^2 \in \mathrm{B}_1(R_1)$. Нехай $\mathrm{B}_2(R)$ та $\mathrm{B}_3(R)$ – кулі радіуса $R > 0$ в просторах $H$ та $L^2(0,T;H)$, відповідно, з центрами у відповідних нульових точках цих просторів. Тоді існують числа $R_2 > 0$ та $R_3 > 0$ такі, що $u_0^1, u_0^2 \in \mathrm{B}_2(R_2)$ та $F^1, F^2 \in \mathrm{B}_3(R_3)$. З оцінки типу (4.143) випливає існування такого числа $R_4 > 0$, що $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in \mathrm{B}_1(R_4)$.

Нехай $\mathrm{B}_4(R)$ – куля радіуса $R > 0$ в просторі $U_1(Q_{0,T})$ з центром в точці нуль цього простору. Нехай $\mathrm{B}_5(R)$ та $\mathrm{B}_6(R)$ – кулі радіуса $R > 0$ в просторах $L^2(\Omega)$ та $L^2(Q_{0,T})$, відповідно, з центрами у відповідних нульових точках цих просторів. Тоді існують числа $R_5 > 0$ та $R_6 > 0$ такі, що $\theta_0^1, \theta_0^2 \in \mathrm{B}_5(R_5)$ та $f^1, f^2 \in \mathrm{B}_6(R_6)$. З оцінки типу (4.143) випливає існування такого числа $R_7 > 0$, що $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{B}_4(R_7)$.

Нехай $R_8 = \max\{R_1, ..., R_7\}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Розглянемо праву частину нерівності (4.189). З наведених вище міркувань випливає оцінка $J(T) \leq C_{63}(R_8)$. Тоді візьмемо в (4.189) $\varepsilon_7 = \frac{\varepsilon}{2C_{63}(R_8)}$. Матимемо, що

$$y(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_{64}(R_8)M_1(T). \tag{4.190}$$

Вибравши $u_0^1$ близьким до $u_0^2$, $F^1$ – до $F^2$, $b^1$ – до $b^2$, $\theta_0^1$ – до $\theta_0^2$, $f^1$ – до $f^2$, (у відповідних просторах), можна зробити $M_1(T) > 0$ досить малим і досягнути оцінки

$$C_{64}(R_8) \cdot M_1(T) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Підставивши її в (4.190), одержимо, що $y(\tau) < \varepsilon$. Враховуючи вигляд $y(\tau)$, звідси випливає, що

$$||\widetilde{u}; L^\infty(0,T;H)|| + ||\theta; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))|| \leq \varepsilon, \tag{4.191}$$

Використавши (4.191) в правій частині (4.187) та провівши міркування, аналогічні як при отриманні (4.191), з (4.187) отримаємо, що

$$||\widetilde{u}; U(Q_{0,T})|| \leq C_{65}(\varepsilon), \quad ||\theta; U_1(Q_{0,T})|| \leq C_{66}(\varepsilon), \tag{4.192}$$

де $C_{65}(\varepsilon) \to +0$ та $C_{66}(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$. Теорему 4.5 доведено. $\square$

**Теорема 4.6.** *Нехай виконуються умови теореми 4.4. Тоді детермінована задача (4.105)-(4.112) не може мати більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Нехай $\{\widetilde{u}_1,\pi_1,\theta_1\},\{\widetilde{u}_2,\pi_2,\theta_2\}\in SP(u_0,F,b,\theta_0,f)$, $\widetilde{u}=\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2$, $\theta=\theta_1-\theta_2$. Аналогічно як в доведенні теореми 4.5 отримаємо оцінку типу (4.179) з $u_0^1=u_0^2$, $F_1=F_2$, $b_1=b_2$, $\theta_0^1=\theta_0^2$, $f_1=f_2$. Тому $\widetilde{u}=0$, $\theta=0$ і аналогічно як в теоремі 2.2 показуємо, що $\pi_1=\pi_2$. □

4.2.2. *Задача з випадковим параметром.* Нехай

$$\Gamma_1 : L^2(\Omega)\times L^2(Q_{0,T})\to L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap U_1(Q_{0,T}),$$

$$\Gamma_2 : H\times L^2(0,T;H)\times U(Q_{0,T})\to L^\infty(0,T;H)\cap U(Q_{0,T})$$

– такі відображення, що

$$\Gamma_1\{\theta_0,\ f\}=\theta,\quad \Gamma_2\{u_0,\ F,\ b\}=\widetilde{u}, \tag{4.193}$$

де $\{\widetilde{u},\pi,\theta\}$ – розв'язок задачі (4.105)-(4.112). З теорем 4.4-4.6 випливає, що функції $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$ визначені коректно і є неперервними.

Введемо функції випадкового аргументу

$$\phi_1 : \mathbb{S}\to L^2(\Omega)\times L^2(Q_{0,T}),$$

$$\phi_2 : \mathbb{S}\to H\times L^2(0,T;H)\times U(Q_{0,T})$$

за правилами

$$\phi_1(\omega):=\{\theta_0(\cdot,\omega),\ \ f(\cdot,\cdot,\omega)\},\quad \omega\in\mathbb{S}, \tag{4.194}$$

$$\phi_2(\omega):=\{u_0(\cdot,\omega),\ \ F(\cdot,\cdot,\omega),\ \ b(\cdot,\cdot,\omega)\},\quad \omega\in\mathbb{S}. \tag{4.195}$$

Використаємо позначення (4.193)-(4.195) для означення таких функцій $\Psi_1 : \mathbb{S}\to L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap U_1(Q_{0,T})$ та $\Psi : \mathbb{S}\to L^\infty(0,T;H)\cap U(Q_{0,T})$, що

$$\Psi_1(\omega):=\Gamma_1\circ\phi_1(\omega)=\Gamma_1(\phi_1(\omega)),\quad \omega\in\mathbb{S}, \tag{4.196}$$

$$\Psi_2(\omega):=\Gamma_2\circ\phi_2(\omega)=\Gamma_2(\phi_2(\omega)),\quad \omega\in\mathbb{S}. \tag{4.197}$$

Отже, для кожного $\omega\in\mathbb{S}$ значення $\Psi_1(\omega)$ дорівнює $\theta(\cdot,\cdot,\omega)$, а значення $\Psi_2(\omega)$ дорівнює $\widetilde{u}(\cdot,\cdot,\omega)$, де $\{\widetilde{u},\pi,\theta\}$ – розв'язок детермінованої задачі (4.105)-(4.112) з випадковим параметром $\omega$.

**Теорема 4.7.** *Якщо* $F \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;H))$, $u_0 \in L_2(\mathbb{S}; H)$, $b \in L_2(\mathbb{S}; L^2(0,T;Z_1)) \cap L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T})$, $f \in L_2(\mathbb{S}; L^2(Q_{0,T}))$, $\theta_0 \in L_2(\mathbb{S}; L^2(\Omega))$, *то задача (4.86)-(4.93) має єдиний розв'язок* $\{\widetilde{u}, \pi, \theta\}$. *Крім того,*

$$\widetilde{u} \in L_2\big(\mathbb{S}; L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;Z_1)\big), \tag{4.198}$$

$$\widetilde{u} \in L_{q(x,t)}(\Pi_{0,T}), \tag{4.199}$$

$$\theta \in L_2\big(\mathbb{S}; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap U_1(Q_{0,T})\big). \tag{4.200}$$

*Доведення.* *Крок 1.* Для кожного фіксованого $\omega \in \mathbb{S}$ задача (4.86)-(4.93) має розв'язок в сенсі означення 4.2 як розв'язок детермінованої задачі (4.105)-(4.112) з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$.

Оскільки функція $\phi_1$ з (4.194) є вимірною, а $\Gamma_1$ є неперервною, то функція $\Psi_1$ з (4.196) є вимірною. Отже, $\theta$ буде $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap U_1(Q_{0,T})$-значною випадковою величиною.

Оскільки функція $\phi_2$ з (4.195) є вимірною, а $\Gamma_2$ є неперервною, то функція $\Psi_2$ з (4.197) є вимірною. Отже, $\widetilde{u}$ буде $L^\infty(0,T;H) \cap U(Q_{0,T})$-значною випадковою величиною.

Крім того, $\widetilde{u}$ та $\theta$ задовольняють такий аналог оцінок (4.141) та (4.143) з доведення теореми 4.4:

$$\int\limits_\Omega \Big[|\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2 + |\theta(x,\tau,\omega)|^2\Big]\,dx \le C_{67}\mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{4.201}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^n |\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^2 + |\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)} + \\ + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |\theta(x,t,\omega)|^2\Big]\,dxdt \le C_{67}\mathbf{F}(\tau,\omega), \tag{4.202}$$

де стала $C_{67} > 0$ не залежить від $\omega, u_0, F, b, \theta_0, f$,

$$\mathbf{F}(\tau,\omega) = \int\limits_\Omega \Big[|u_0(x,\omega)|^2 + |\theta_0(x,\omega)|^2\Big]\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|F(x,t,\omega)|^2 + |f(x,t,\omega)|^2 + \\ + \sum_{i=1}^n |b_{x_i}(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^2 + |b(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt, \tag{4.203}$$

$\tau \in (0,T]$, $\omega \in \mathbb{S}$.

Візьмемо в (4.201) суттєвий супремум за $\tau$, а в (4.202) візьмемо $\tau = T$. Оскільки функція $\mathbf{F}(T,\cdot)$ належить до $L_1(\mathbb{S})$, то, зінтегрувавши отримані рівності за змінною $\omega \in \mathbb{S}$, отримаємо існування інтегралів, що гарантують виконання вкладень (4.198)-(4.200).

Крок 2. Доведення єдиності проводимо аналогічно як в теоремі 4.6. Аналогічно, як в доведенні теореми 4.5 отримаємо таку оцінку типу (4.179) з параметром $\omega \in \mathbb{S}$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[|\widetilde{u}(x,\tau,\omega)|^2+|\theta(x,\tau,\omega)|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[a_0\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}_{x_i}(x,t,\omega)|^2+$$

$$+C_{53}|\widetilde{u}(x,t,\omega)|^{q(x,t)}+a\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}(x,t,\omega)|^2\Big]\,dxdt\le$$

$$\le\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big(|\mathfrak{B}|+|B|\Big)\cdot|\widetilde{u}|\cdot|\theta|\,dxdt\le\Big(|\mathfrak{B}|+|B|\Big)\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|\widetilde{u}|^2+|\theta|^2\Big]\,dxdt,\quad(4.204)$$

$\tau\in(0,T]$, $\omega\in\mathbb{S}$, де $C_{53}>0$, $\widetilde{u}=\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2$, $\theta=\theta_1-\theta_2$, $\{\widetilde{u}_1,\pi_1,\theta_1\}$ та $\{\widetilde{u}_2,\pi_2,\theta_2\}$ – розв'язки задачі (4.86)-(4.93). Зінтегрувавши за $\omega\in\mathbb{S}$ та використавши узагальнену лему Гронуола-Белмана (твердження 2.8), отримаємо звідси, що $\widetilde{u}_1=\widetilde{u}_2$ та $\theta_1=\theta_2$. Затим стандартно показуємо, що $\pi_1=\pi_2$. Теорему 4.7 доведено. $\square$

4.2.3. *Доведення теореми 4.3.* Якщо виконується умова **(W1)**, то функція $b$ має вигляд (4.84), де $b_0\in C_{\mathrm{div}}$. Тоді існує стала $C_{68}>0$ така, що для всіх $x\in\Omega$ виконуються оцінки

$$|b_0(x)|\le C_{68},\quad |(b_0)_{x_i}(x)|\le C_{68},\quad i=\overline{1,n}.\qquad(4.205)$$

Тому

$$|b(x,t,\omega)|\le C_{68}|W(t,\omega)|,\qquad(4.206)$$

$$|b_{x_i}(x,t,\omega)|\le C_{68}|W(t,\omega)|,\quad i=\overline{1,n}.\qquad(4.207)$$

З оцінок (4.206)-(4.207), аналогічно як при доведенні леми 2.6 показуємо, що

$$\int\limits_{\Pi_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}(x,t,\omega)|^2+|b(x,t,\omega)|^2+|b(x,t,\omega)|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt\,\mathbb{P}\,(d\omega)\le C_{69}.\quad(4.208)$$

Тому функція $b$ з умови **(W1)** задовольняє умови теореми 4.7.

Оскільки в теоремі 4.7 ми довели існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (4.105)-(4.112), то згідно формули (4.85) та означення 4.3 маємо виконання тверджень теореми 4.3. $\square$

*Висновки до підрозділу 4.2.* У цьому підрозділі розглянуто нелінійну систему Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності та випадковим збуренням. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку відповідної мішаної задачі.

Результати підрозділу опубліковано у висвітлено у [9].

**Висновки до розділу 4.** У четвертому розділі дисертації досліджувались нелінійні системи Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності. Спершу розглянуто детерміновану систему, а в підрозділі 4.2 – відповідну систему з випадковим збуренням. В узагальнених просторах Лебега і Соболєва знайдено єдині розв'язки мішаних задач для розглянутих систем.

Результати розділу висвітлено у [6] та [9].

# ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено нелінійним параболічним системам Стокса зі змінними показниками нелінійності, які описують детерміновані та стохастичні проеси і моделюють динаміку векторних полів у багатовимірних просторах із умовами нестисливості.

Вивчаються системи Стокса, які містять:

– вектор-функцію швидкості та скалярну функцію тиску;
– нелінійні диференціальні та інтегро-диференціальні оператори;
– змінні показники нелінійності, які залежать від просторової та часової змінних;
– випадкові збурення типу білого шуму.

У дисертації отримано такі нові результати:

– встановлено умови існування та єдиність узагальнених розв'язків детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Стокса зі сталими показниками нелінійності;
– доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків з узагальнених просторів Лебега і Соболєва стохастичних мішаних задач для нелінійних диференціальних параболічних систем Стокса зі змінними показниками нелінійності;
– показано існування єдиного узагальненого розв'язку детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Осколкова-Стокса зі змінними показниками нелінійності та малим параметром, досліджено поведінку цього розв'язку при прямуванні параметра до нуля;
– встановлено умови існування та єдиність узагальнених розв'язків детермінованих мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності,
– доведено теорему про однозначну розв'язність стохастичних мішаних задач для нелінійних диференціальних параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності.

Результати роботи можна використати при моделюванні гідродинамічних процесів в матеріалах складної структури.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


[1] *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2018; 85: 107-119.

[2] *Khoma M.V., Buhrii O.M.* Stokes system with variable exponents of nonlinearity. Буковинський математичний журнал. 2022; 10 (2): 28-42.

[3] *Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity and small parameter. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 37-60.

[4] *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція “Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності” (присвячена пам’яті професорів Панкова О.А. і Трохименка В.С.) (Вінниця, 20-21 травня, 2021): Тези доповідей. – Вінниця, 2021. – С. 42-44.

[5] *Buhrii O., Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity. International Conference “Mathematics and IT: Research and Education (MITRE-2021)”, dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University (Chisinau, Republic of Moldova, July 01-03, 2021): Book of Abstracts. – Chisinau, 2021. – P. 46-47.

[6] *Хома М.В., Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності. Міжнародна наукова конф. (присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка) (Чернівці, 28-30 жовтня, 2021): Матеріали конф. – Чернівці, 2021. – С. 55.

[7] *Хома М.В., Бугрій О.М.* Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Міжнародна наукова конф. “Прикладна математика та інформаційні технології” (присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій) (Чернівці, 22-24 вересня, 2022): Матеріали конф. – Чернівці, 2022. – С. 107-110.

[8] *Buhrii O., Khoma M.* Stokes system with depending of time variable exponents of nonlinearity. IV International Scientific and Practical Internet Conf. “Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity” (dedicated to the 90th anniversary of the Department of

Mathematics and Informatics) (Vinnytsia, May 25-26, 2023): Book of Abstracts. – Vinnytsia, 2023. – P. 78-81.

[9] *Бугрій О. М., Хома М. В.* Системи Бусінеска-Стокса з випадковим збуренням. Всеукраїнська наукова конф. "Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025" (Львів, 8-9 травня, 2025): Тези доповідей. – Львів, 2025. – С. 63.

[10] *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998; 51: 85-98.

[11] *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2005.

[12] *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.

[13] *Бугрій О.М.* Про формули інтегрування частинами для степеневих функцій спеціального вигляду // Математичні студії. – 2016. – Т. 45, №2. – С. 118-131.

[14] *Бугрій О. Бугрій М.* Про існування в узагальнених просторах Соболєва розв'язків задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, пов'язаних з європейським опціоном // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2016. – Вип. 81. – С. 61-84.

[15] *Бугрій О., Бугрій Н., Власов В.* Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда // Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. – 2024. – Т. 1, № 1. – С. 13-26.

[16] *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44-61.

[17] *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2000; 56: 33-43.

[18] *Бугрій О., Хома М., Вовк І.-М.* Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2024. – Вип. 96. – С. 83-104.

[19] *Бокало Т., Бугрій О.* Деякі формули інтегрування частинами в просторах функцій зі змінним степенем нелінійності. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2009; 71: 13-26.

[20] *Мішура Ю.С., Ральченко К.В., Сахно Л.М., Шевченко Г.М.* Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2023.

[21] *Antontsev S.N., de Oliveira H.B.* The Navier-Stokes problem modified by an absorption term. Applicable Analysis. 2010, **89** (12), 1805-1825.

[22] *Antontsev S., Shmarev S.* A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: Existence and uniqueness of weak solutions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2005. **60(3)**, 515-545.

[23] *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up. Atlantis Studies in Diff. Eq., Vol. 4, Paris: Atlantis Press, 2015.

[24] *Aoun M.* Existence of weak-renormalized solutions for a nonlinear phase-field model system. HAL., 2025, hal-04988521.

[25] *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite. Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. 1963; 256 (24): 5042-5044.

[26] *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. Math. Ann. 1988; 279: 373-394.

[27] *Bensoussan A., Temam R.* Equations stochastiques du type Navier-Stokes. J. Funct. Anal. 1973; 13: 195-222.

[28] *Bokalo M.M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations. J. Math. Sciences. 2011, **178** (1), 41-64.

[29] *Bokalo M.M.* Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Electron. J. Differential Equations. 2014, **2014** (169), 1-13.

[30] *Bokalo M., Buhrii O., Hryadil N.* Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity. Nonlinear Analysis. 2020; 192: 111700.

[31] *Bokalo M., Dmytriv V.* Boundary value problems for integro-differential equations in anicotropic spaces. Visnyk (Herald) of Lviv Univ. Series Mech.-Math. 2001; 59: 84-101.

[32] *Bokalo M.M., Ilnytska O.V.* Classical solutions of problems for parabolic equations with variable integral delay. Bukovinian Math. J. **5** (2017), № 1-2, 18-36.

[33] *Bokalo M., Skira I.* Almost periodic solutions for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearty. International J. of Evolution Equat. **10** (2017), №3-4, 297-314.

[34] *Bokalo M.M., Skira I.V.* The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems. Mat. Stud. **51** (2019), 59-73.

[35] *Bokalo T.M., Buhrii O.M.* Doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – Vol. 63, № 5. – P. 709-728.

[36] *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011.

[37] *Brzezniak Z.* On stochastic convolution in Banach spaces. Stochastics and Stochastic Reports. 1997; 61 (3-4): 245-295.

[38] *Buhrii O.M.* On the existence of mild solutions of the initial-boundary-value problems for the Petrovskii-type semilinear parabolic systems with variable exponents of nonlinearity // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 66, № 4. – P. 487-498.

[39] *Buhrii O.M.* Visco-plastic, Newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity. Математичні студії. 2018; 49 (2): 165-180.

[40] *Buhrii O., Buhrii N.* Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity Open Mathematics. 2017; 15: 859-883.

[41] *Buhrii O., Buhrii N.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity // New Trends in Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 5, № 3. – P. 128-153.

[42] *Buhrii O., Buhrii N.* Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019; 473: 695-711.

[43] *Buhrii O.M., Buhrii N.V.* Doubly nonlinear elliptic-parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities. Advances in Nonlinear Variational Inequalities. 2019; 22 (2): 1-22.

[44] *Buhrii O., Buhrii N., Kholyavka O.* On Caratheodory-LaSalle's theorems for systems of ordinary differential equations and their application // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2019. – Вип. 27. – С. 9-17.

[45] *Buhrii O.M., Lavrenyuk S.P.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration. Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – Vol. 53, № 7. – P. 1027-1042.

[46] *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. 2009; 70 (6): 2325-2331.

[47] *Bulicek M., Gwiazda P., Malek J., Swierczewska-Gwiazda A.* On unsteady flows of implicitly constituted incompressible fluids. SIAM Journal on Mathematical Analysis, **44(4)** 2012, 2756-2801.

[48] *Cannon J.R., DiBenedetto E.* The initial value problem for the Boussinesq equations with data in $L^p$. Approximation Methods for Navier-Stokes Problems (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 771, pp. 129-144). Springer, 1980.

[49] *Chernyakov V.Ya.* Some problems of the theory of motion of a viscous incompressible fluid with heat transfer. Proceedings of the Comp. Center of the SBASUSSR. 1966; 6: 3-20.

[50] *Chipot M.* Elements of nonlinear analysis. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 2012.

[51] *Chipot M., Chang N.-H.* Nonlinear nonlocal evolution problems. Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. 2003; 97 (3): 423-445.

[52] *Chipot M., Rougirel A.* On some class of problems with nonlocal source and boundary flux. Adv. Differential Equations. 2001; 6 (9): 1025-1048.

[53] *Coayla-Teran E.A., Ferreira J., Magalhaes P.M.D.* Weak solutions for random nonlinear parabolic equations of nonlocal type. Random Operators and Stochastic Equations. 2008; 16: 213-222.

[54] *Cochin N.E., Cybele I.A., Rose N.V.* Theoretical fluid mechanics. Part 2. M., 1963.

[55] *Conca C., Rojas-Medar M. A., Suaez-Grau F.* The Boussinesq system in non-cylindrical domains. Advances in Differential Equations. 2014; 19 (3/4): 313-338.

[56] *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. – Lecture Notes Math. – Vol. 2017. Springer, Heidelberg, 2011.

[57] *Diening L., Nägele P., Růžička M.* Monotone operator theory for unsteady problems in variable exponent spaces. Complex Variables and Elliptic Equations, 2012, **57** (11), 1209-1231.

[58] *Droniou J.* Intégration et espaces de Sobolev *à* valeurs vectorielles. Lecture notes, Universite de Provence, Marseille, 2001.

[59] *Evans L.C.* Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[60] *Evans L.C.* An introduction to stochastic differential equations. Vol. 82. American Mathematical Soc., 2012.

[61] *Fan X.-L., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 2001; 263: 424-446.

[62] *Farwig R., Kozono H., Sohr H.* An $L^q$-approach to Stokes and Navier-Stokes equations with nonhomogeneous data. Journal of the Mathematical Society of Japan. 2007; 59 (1): 127-150.

[63] *Flandoli F.* Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations. Nonlinear Differential Equations and Applications. 1994; 1 (4): 403-426.

[64] *Flandoli F., Gatarek D.* Martingale and stationary solutions for stochastic Navier-Stokes equations. Probability Theory and Related Fields. 1995; 102 (3): 367-391.

[65] *Gajewski H., Groger K., Zacharias K.* Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen. Vol. 38. Walter de Gruyter GmbH Co. KG, 1974.

[66] *Galdi G.P.* An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem. Fundamental directions in mathematical fluid mechanics. Basel: Birkhauser Basel, 2000.

[67] *Galdi G.P., Simader C.G., Sohr H.* On Stokes problem in Lipschitz domain. Annali di Matematica pura ed applicata. CLXVII (IV) (1994) 147-163.

[68] *Galdi G.P., Simader C.G., Sohr H.* A class of solution to stationary Stokes and Navier-Stokes equations with boundary data in $W^{-\frac{1}{q},q}$. Math. Ann. **331** (2005) 41-74.

[69] *Getling A.V.* Formation of the spatial structures of Rayleigh-Benard convection. Usp. Phys. Sciences. 1991; 161 (9): 1-80.

[70] *Glatt-Holtz N., Vicol V.* Local and global existence of smooth solutions to the stochastic Euler equations with multiplicative noise. Annals of Probability. 2014; 42 (1): 80-145.

[71] *Guillope C., Saut J.C.* Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 1990; 15(9), 849-869.

[72] *Hron J., Malek L., Rajagopal K.* Simple flows of fluids with pressure-dependent viscosities. The Royal Society Publishing. 2011; 457: 2001.

[73] *Joseph D.D.* Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids. Springer-Verlag, 1990.

[74] *Kadets V.* A course in functional analysis and measure theory. Springer International Publ., 2018.

[75] *Kaltenbach A.* Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2329. Springer Nature Switzerland AG 2023.

[76] *Karazeeva N.A.* Solvability of initial boundary value problems for equations describing motions of linear viscoelastic fluids. J. Applied Math. **2005**, №1 (2005) 59-80.

[77] *Kim H., Kim J.* On the existence and uniqueness of solutions of the Stokes problem in a bounded domain. Journal of the Korean Mathematical Society. 2004; 41 (4): 665-678.

[78] *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$. Fasciculi Mathematici. 1995; 25: 87-94.

[79] *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 1991; 41 (116); 592-618.

[80] *Kuttler K.L., Li J.* Measurable solutions for stochastic evolution equations without uniqueness. Applicable Analysis. 2015; 94 (12): 2456-2477.

[81] *Ladyzhenskaya O.* Solution "in the large" to the boundary-value problem for the Navier-Stokes equations in two space variables. Sov. Phys. Dok. 1958; 123 (3), 427-429.

[82] *Langa J.A., Real J., Simon J.* Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier-Stokes equations. Applied Mathematics and Optimization. **48**, №3 (2003) 195-210.

[83] *Lavrentyev M.A., Shabat B.V.* Problems of hydrodynamics and their mathematical models. M., 1973.

[84] *Lee J.W., O'Regan D.* Existence results for differential equations in Banach spaces. Comment. Math. Univ. Carolin. 1993; 34 (2): 239-251.

[85] *Liang H., Hou L., Ming J.* The velocity tracking problem for Wick-stochastic Navier-Stokes flows using Weiner chaos expansion. J. Computat. Appl. Math. 2016; 307: 25-36.

[86] *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[87] *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications: Vol. 181. Springer Science and Business Media, 2012.

[88] *Liu W., Ruckner M.* SPDE in Hilbert space with locally monotone coefficients. Journal of Functional Analysis. **259(11)** (2010), 2902-2922.

[89] *Liu W., Ruckner M.* Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer, 2015, p.266.

[90] *Lukaszewicz G., Kalita P.* Navier-Stokes Equations. Advances in Mechanics and Mathematics. Vol. 34. Springer Int. Publ. Switzerland, 2016.

[91] *Mikhailov V.P.* Partial differential equations. M., 1976.

[92] *Mikulevicius R., Rozovskii B.* Stochastic Navier-Stokes equations for turbulent flows. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2004; 35 (5): 1250-1310.

[93] *Mitrea M., Monniaux S., Taylor M.* Stokes equations in Lipschitz domains. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 2013; 49 (1): 1-50.

[94] *Morimoto H.* On non-stationary Boussinesq equations. Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1991; 67 (5): 159-161.

[95] *Morimoto H.* A remark on non-stationary Boussinesq equations of elliptic-parabolic type. Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1991; 67 (10): 349-352.

[96] *Munteanu I.* Boundary stabilisation of the Navier-Stokes equation with fading memory. Intern. J. of Control. **88**, №3 (2015) 531-542.

[97] *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen. Studia Mathematica. 1931; 3: 200-211.

[98] *Oskolkov A.P.* A small-parameter quasilinear parabolic system approximating the Navier-Stokes system. J. Math. Sci. **1** (1973), №4, 452-470.

[99] *Oskolkov A.P., Kotsiolis A. A* The initial boundary value problem with a free surface condition for the $\varepsilon$-approximations of the Navier-Stokes equations and some of their regularizations. J. Math. Sci. **80** (1996), №3, 1773-1801.

[100] *Peszat S., Zabczyk J.* Stochastic partial differential equations with Levy noise. Vol. 113 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[101] *Rădulescu V., Repovš D.* Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.

[102] *Roubicek T.* Nonlinear partial differential equations with applications (Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005).

[103] *Rougirel A.* Blow-up rate for parabolic problems with nonlocal source and boundary flux. Electronic J. of Diff. Eq. 2003; 2003 (98): 1-18.

[104] *Růžička M.* Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory. in: Lecture Notes in Mathematics, 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[105] *Samko S.G.* Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. In: R. Gilbert, J. Kajiwara and S.Yongzhi Xu (Eds), International Society for Analysis, Applications and Computations, 2000, Vol. 5, Direct and Inverse Problems of Math. Physics (Kluwer Academic Publishers), pp. 333-342.

[106] *Seregin G.* Lecture notes on regularity theory for the Navier-Stokes equations. Oxford Univ., March 2, 2014.

[107] *Simon J.* Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and preassure. SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), №5, 1093-1117.

[108] *Sohr H.* The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2001.

[109] *Solonnikov V.A.* On nonstationary Stokes equations in a bounded domain. Journal of Mathematical Sciences. 1997; 87 (3): 3673-3688.

[110] *Solonnikov V.A.* Weighted Schauder estimates for evolution Stokes problem. Annali Univ. Ferrara. **52** (2006) 137-172.

[111] *Souplet Ph.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source. J. Diff. Equations. 1999; 153: 374-406.

[112] *Suhubi E.* Functional analysis. Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, Boston, London, 2003.

[113] *Temam R.* Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. North-Holland Publ., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[114] *Vage G.* Stochastic differential equations and Kondratiev spaces. Dr. Ing. Thesis. Trondheim, 1995.

# ДОДАТОК А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

**Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації**

1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2018; 85: 107-119. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.107-119

   (Особисті внески співавторів: Бугрію О. М. належать постановка задач та обговорення основних результатів, а Хомі М. В. належить формулювання та доведення усіх тверджень і теорем)
2) *Khoma M.V., Buhrii O.M.* Stokes system with variable exponents of nonlinearity. Буковинський математичний журнал. 2022; 10 (2): 28-42.

   https://doi.org/https:/doi.org/10.31861/bmj2022.02.03

   (Особисті внески співавторів: Бугрію О. М. належать постановка задач та обговорення основних результатів, а Хомі М. В. належить формулювання та доведення усіх тверджень і теорем)
3) *Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity and small parameter. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 37-60.

   http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.037-060

**Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

1) *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція "Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності" (присвячена пам'яті професорів Панкова О.А. і Трохименка В.С.) (Вінниця, 20-21 травня, 2021): Тези доповідей. – Вінниця, 2021. – С. 42-44.
2) *Buhrii O., Khoma M.* On nonlinear integro-differential Oskolkov-Stokes system with variable exponent of nonlinearity. International Conference "Mathematics and IT: Research and Education (MITRE-2021)", dedicated to the 75th anniversary of Moldova State University (Chisinau, Republic of Moldova, July 01-03, 2021): Book of Abstracts. – Chisinau, 2021. – P. 46-47.

3) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності. Міжнародна наукова конф. (присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка) (Чернівці, 28-30 жовтня, 2021): Матеріали конф. – Чернівці, 2021. – С. 55.
4) *Хома М.В., Бугрій О.М.* Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Міжнародна наукова конф. "Прикладна математика та інформаційні технології" (присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій) (Чернівці, 22-24 вересня, 2022): Матеріали конф. – Чернівці, 2022. – С. 107-110.
5) *Buhrii O., Khoma M.* Stokes system with depending of time variable exponents of nonlinearity. IV International Scientific and Practical Internet Conf. "Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity" (dedicated to the 90th anniversary of the Department of Mathematics and Informatics) (Vinnytsia, May 25-26, 2023): Book of Abstracts. – Vinnytsia, 2023. – P. 78-81.
6) *Хома М., Бугрій О., Вовк І.-М.* Стохастичне диференціювання в рівняннях зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024; 96: 83-104. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092

   (Особисті внески співавторів: Хомі М. В. належать результати підрозділу 2. Бугрію О. М. та Вовк І.-М. належать результати висвітлені у підрозділах 1, 3 і 4.)
7) *Бугрій О. М., Хома М. В.* Системи Бусінеска-Стокса з випадковим збуренням. Всеукраїнська наукова конф. "Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025" (Львів, 8-9 травня, 2025): Тези доповідей. – Львів, 2025. – С. 63.

### Відомості про апробацію результатів дисертації

1) Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (Львів, 2021-2025, дистанційна форма, усні доповіді).
2) III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція, присвяченій пам'яті проф. Панкова О. А. і Трохименка В.С. "On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system." (Вінниця, 2021, дистанційна форма участі, усна доповідь.)

3) Math. and IT: Research and Education (MITRE-2021). Conf. dedicate to the 75th anniversary of Moldova State University. “On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system with variable exponent of nonlinearity”. (Chisinau, 2021, дистанційна форма участі, усна доповідь.)
4) Міжнародна наукова конф. (присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка. “Мішана задача для параболічних систем Бусінеска-Стокса зі змінним показником нелінійності”. (Чернівці, 2021, дистанційна форма участі, усна доповідь.)
5) Міжнародна наукова конф. “Прикладна математика та інформаційні технології” (присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій) “Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва”. (Чернівці, 2022, дистанційна форма участі, усна доповідь.)
6) IV International Scientific and Practical Internet Conf. “Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity” (dedicated to the 90th anniversary of the Department of Mathematics and Informatics) “Stokes system with depending of time variable exponents of nonlinearity” (Вінниця, 2023, дистанційна форма участі, усна доповідь.)
7) Всеукраїнська наукова конф. “Диференціальні рівняння і аналіз даних, DEDAL-2025” “Системи Бусінеска-Стокса з випадковим збуренням”. (Львів, 2025, дистанційна форма участі, усна доповідь.)