Анотація

Єременко І. С. Реалістичні вимірювання багатомодового квантового світла. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 — Фізика та астрономія. — Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова Національної академії наук України, Київ, 2026.

Сучасна квантова оптика дедалі частіше працює з багатомодовими станами світла, у яких квантові властивості проявляються не лише в окремих модах, а й у складних кореляціях між ними. Такі стани є основою для квантових комунікацій, квантових обчислень, задач вибірки з оптичних розподілів та експериментальної перевірки некласичної поведінки світла. Водночас інформація про квантовий стан стає доступною лише через конкретну схему вимірювання. Тому послідовний опис вимірювального процесу є не менш важливим, ніж опис самого стану.

У дисертації розглянуто два рівні такого опису. У задачі гібридних вимірювань основну роль відіграє явне врахування конкретних вимірювальних приладів: збалансованого гомодинного детектування в одному каналі та порогового фотодетектування після фазово-просторового зміщення в іншому. У задачі гаусівської бозонної вибірки центральним є вже детальний опис неідеального фотонного підрахунку, зокрема скінченної здатності детекторів до розрізнення чисел фотонів, мертвого часу та релаксаційних ефектів. Саме в цьому випадку обмеження реальних фотодетекторів можуть істотно змінювати статистику вихідних подій і впливати на процедури валідації.

Метою дисертаційної роботи є розвиток теоретичного опису вимірювань багатомодового квантового світла та застосування цього опису до двох задач: аналізу гібридних вимірювальних схем для виявлення некласичних кореляцій світла та опису гаусівської бозонної вибірки з реалістичним розрізненням чисел фотонів. Для досягнення цієї мети використано операторний опис багатомодових квантових станів, формалізм додатних операторнозначних мір, характеристичні функції гаусівських станів, фазово-просторові представлення Кехілла–Глаубера та статистичні методи аналізу вимірювальних результатів.

У дисертації послідовно викладено теоретичний апарат, необхідний для

опису багатомодових оптичних станів і вимірювань. Сформульовано базовий операторний опис оптичних мод, багатомодових станів, гаусівських станів та їхніх коваріаційних матриць. Окрему увагу приділено опису квантових вимірювань через додатні операторнозначні міри, оскільки саме цей підхід дозволяє однаково описувати як неперервні, так і дискретні вимірювальні результати, а також ураховувати неідеальності фотодетекторів у задачах фотонного підрахунку. У фазово-просторовому представленні правило Борна записано в інтегральній формі, що встановлює зв'язок між квазіймовірнісним описом стану та фазово-просторовими символами елементів додатних операторнозначних мір. Такий підхід є спільною теоретичною основою для подальшого аналізу гібридних вимірювань і гаусівської бозонної вибірки. Це дозволяє розглядати не лише стан сам по собі, а й вимірювальну поведінку, тобто статистику результатів для заданого набору локальних налаштувань. Саме на рівні такої поведінки порівнюються локально-реалістичний опис і фазово-просторово класичне відтворення статистики.

У першій частині роботи розглянуто гібридну схему вимірювання, у якій одна мода світла аналізується за допомогою збалансованого гомодинного детектування, а друга — за допомогою порогового фотодетектування після фазово-просторового зміщення. Така схема поєднує неперервну змінну, представлену квадратурою поля, і дискретну змінну, що відповідає неспрацьовуванню або спрацьовуванню порогового детектора. Для цієї схеми сформульовано простір локальних налаштувань і результатів, записано спільні ймовірності вимірювань та показано, як ці ймовірності можуть бути представлені у фазово-просторовій формі через символи відповідних елементів додатних операторнозначних мір.

Як показовий приклад у дисертації розглянуто двомодовий стиснений вакуумний стан. Його окремі моди мають тепловий, тобто локально класичний, вигляд, тоді як повний двомодовий стан містить некласичні міжмодові кореляції. Для цього прикладу проаналізовано статистику гібридного вимірювання та її залежність від параметра стиснення і локальних налаштувань. Показано, що відповідна поведінка не демонструє порушення локального реалізму у сенсі нелокальності Белла, але порушує більш слабку модель класичного фазо-просторового опису. Отже, гібридне вимірювання дозволяє виявляти некласичні кореляції світла на рівні конкретної вимірювальної статистики.

Інша частина дисертації присвячена гаусівській бозонній вибірці за умов

реалістичного розрізнення чисел фотонів під час детектування. Гаусівська бозонна вибірка є спеціалізованою моделлю неуніверсальних квантових обчислень: вона не призначена для виконання довільного квантового алгоритму, а реалізує конкретну задачу вибірки з розподілу фотонних подій на виході лінійного інтерферометра. У цій схемі на входи інтерферометра подаються гаусівські стани світла, а на виході реєструються фотонні події. Події з кратною реєстрацією, тобто події з більш ніж одним фотоном у певній вихідній моді, є відносно рідкісними, але саме вони можуть нести важливу інформацію для валідації експерименту. Тому обмежена здатність реалістичних детекторів розрізняти сусідні числа фотонів має принципове значення для правильної інтерпретації вихідної статистики.

У роботі побудовано загальний опис фотолічильної статистики на виході гаусівської бозонної вибірки для довільних детекторів, які описуються елементами додатної операторнозначної міри. Отримано компактну формулу для ймовірності реєстрації заданого патерну, у якій результат виражається через функціонал матриці, пов'язаної з коваріаційною матрицею Q-представлення вихідного гаусівського стану. Цей підхід узагальнює відомі результати для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів і порогових детекторів. У відповідних граничних випадках загальний матричний функціонал зводиться до відомих структур, зокрема до хафніана для детекторів з ідеальним розрізненням чисел фотонів та торонтоніана для порогових детекторів. При цьому принципово розрізняються фотонний патерн перед детектуванням і зареєстрований патерн результатів, оскільки реалістичний фотодетектор повертає результат власної вимірювальної процедури, а не обов'язково істинне число фотонів у моді. Це розрізнення є важливим для інтерпретації експериментально доступної статистики, оскільки модель детектора визначає, які властивості початкового багатофотонного розподілу залишаються спостережуваними, а які втрачаються на етапі реєстрації. Тому реалістичне детектування входить у теорію не як другорядна поправка, а як невід'ємна частина переходу від вихідного квантового стану до вимірюваної статистики.

Окремо розглянуто реалістичні моделі детектування з розрізненням чисел фотонів. Для масивів порогових детекторів отримано відповідний матричний функціонал, що враховує скінченну кількість елементарних порогових детекторів у масиві. Для фотодетектування на основі підрахунку імпульсів фотоструму

розглянуто моделі з мертвим часом, характерні для лавинних фотодіодів, а також моделі з релаксаційним часом, важливі для надпровідникових нанодротових однофотонних детекторів. Для окремих важливих режимів отримано аналітичні спрощення, придатні для подальшого використання у задачах гаусівської бозонної вибірки.

На основі розробленого формалізму проаналізовано задачу валідації гаусівської бозонної вибірки за наявності реалістичного розрізнення чисел фотонів. Оскільки повний розподіл вихідних патернів у великих багатомодових системах є надто складним для прямого відновлення й порівняння, у роботі використано згруповані статистики. Зокрема, розглянуто орбіти — класи зареєстрованих патернів, які переходять один в один перестановками мод, а також статистики подій із кратною реєстрацією. Такі величини можуть бути оцінені з експериментальних даних і водночас залишаються чутливими до відмінностей між квантовою статистикою та класичними моделями.

Для оцінювання орбітальних ймовірностей розглянуто пряме сумування за патернами та фазово-просторові методи моделювання на основі додатного P-представлення. Показано, що фазово-просторовий підхід є придатним для оцінювання згрупованих статистик у режимах із великою кількістю вихідних мод і фотонних подій, де прямі методи стають обчислювально складними. На цій основі сформульовано процедури валідації гаусівської бозонної вибірки з використанням критерію Пірсона χ^2 та баєсівського тесту. Порівняння проводиться між статистикою цільових термалізованих стиснених станів і статистиками класичних еталонних моделей, зокрема теплових та сплющених гаусівських станів. Така валідація не є повною сертифікацією квантової переваги, але дає практичний спосіб перевіряти узгодженість доступних згрупованих статистик із цільовою моделлю та класичними еталонними альтернативами. Зокрема, вона дозволяє аналізувати, які сектори згрупованого розподілу залишаються інформативними для заданої моделі детектора і як часткове розрізнення чисел фотонів змінює розрізнювальну здатність статистичних тестів. Це особливо важливо в режимах, де окремі вихідні патерни є надто рідкісними для надійного оцінювання, тоді як згруповані орбітальні статистики залишаються експериментально доступними.

У чисельних прикладах показано, що реалістична здатність детекторів до розрізнення чисел фотонів істотно впливає на орбітальні ймовірності та на ефе-

ктивність валідаційних тестів. Навіть мінімальне розрізнення чисел фотонів, доступне для масивів порогових детекторів або для детекторів із підрахунком імпульсів фотоструму, може підвищувати впевненість у розрізненні квантової статистики гаусівської бозонної вибірки від класичних альтернатив. Водночас моделі з мертвим часом і релаксацією можуть суттєво змінювати результати, тому використання ідеалізованих моделей детекторів може призводити до некоректної оцінки вихідної статистики та результатів валідації.

Наукова новизна дисертації полягає у демонстрації некласичних кореляцій світла в гібридній схемі вимірювання, що поєднує збалансоване гомодинне детектування та порогове фотодетектування після фазово-просторового зміщення; у виведенні загального матрично-функціонального виразу для фотолічильної статистики гаусівської бозонної вибірки з довільними реалістичними фотодетекторами; у конкретизації цього виразу для основних моделей детектування з розрізненням чисел фотонів; а також у формулюванні валідаційних процедур для гаусівської бозонної вибірки, які безпосередньо враховують неідеальну здатність детекторів розрізняти числа фотонів.

Теоретичне значення отриманих результатів полягає у побудові послідовного опису взаємодії багатомодових квантових станів із реалістичними вимірювальними пристроями. Запропонований підхід може бути використаний для аналізу фотонних експериментів, у яких важливу роль відіграють втрати, скінченна здатність до розрізнення чисел фотонів, мертвий час і релаксаційні ефекти детекторів. Практичне значення результатів пов’язане з можливістю коректнішої інтерпретації експериментів із гаусівської бозонної вибірки та з побудовою методів її валідації, які враховують фактичні характеристики використовуваних фотодетекторів.

У підсумку в дисертації показано, що реалістичний опис вимірювання є необхідною складовою аналізу багатомодового квантового світла. Для гібридних вимірювань він дозволяє виявляти некласичні кореляції, які не зводяться до нелокальності Белла. Для гаусівської бозонної вибірки він приводить до узагальненого опису фотолічильної статистики та демонструє, що навіть часткова здатність до розрізнення чисел фотонів може суттєво впливати на валідацію квантових оптичних пристроїв.

Ключові слова: квантова оптика, багатомодове квантове світло, фазово-просторовий формалізм, додатні операторнозначні міри, гаусівські стани, роз-

різнення чисел фотонів, реалістичні фотодетектори, гомодинне детектування, порогове детектування, некласичні кореляції, гаусівська бозонна вибірка, валідація квантових пристроїв, матричні функціонали.

Список публікацій здобувача за темою дисертації:

[I] V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, "Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality", *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)

[II] I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, "Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling", *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)

Abstract

Yeremenko I. S. Realistic measurements of multimode quantum light. — Qualifying scientific work in manuscript form. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 104 — Physics and Astronomy. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

Modern quantum optics is increasingly concerned with multimode states of light, in which quantum properties are manifested not only in individual modes but also in complex correlations between them. Such states form the basis for quantum communication, quantum computation, sampling from optical probability distributions, and experimental tests of the nonclassical behavior of light. At the same time, information about a quantum state becomes accessible only through a specific measurement scheme. Therefore, a consistent description of the measurement process is no less important than the description of the state itself.

This thesis considers two aspects of such a description. In the problem of hybrid measurements, the central role is played by the explicit treatment of specific measurement devices: balanced homodyne detection in one channel and displaced threshold photodetection, i.e. unbalanced homodyne detection, in the other. In the problem of Gaussian boson sampling, the central issue is a detailed description of realistic photocounting, in particular the finite photon-number resolution of detectors, dead time, and relaxation effects. In this case, the limitations of realistic photodetectors can substantially modify the statistics of output events and affect validation procedures.

The aim of the thesis is to develop a theoretical description of measurements of multimode quantum light and to apply this description to two problems: the analysis of hybrid measurement schemes for detecting nonclassical correlations of light, and the description of Gaussian boson sampling with realistic photon-number resolution. To achieve this aim, the thesis uses the operator description of multimode quantum states, the formalism of positive operator-valued measures, characteristic functions of Gaussian states, Cahill–Glauber phase-space representations, and statistical methods for analyzing measurement outcomes.

The thesis consistently presents the theoretical framework necessary for describing multimode optical states and measurements. The basic operator description

of optical modes, multimode states, Gaussian states, and their covariance matrices is formulated. Special attention is paid to the description of quantum measurements in terms of positive operator-valued measures, since this approach makes it possible to describe both continuous and discrete measurement outcomes in the same framework and to account for imperfections of photodetectors in photon-counting problems. In the phase-space representation, the Born rule is written in an integral form, which establishes a connection between the quasiprobability description of a state and the phase-space symbols of the elements of positive operator-valued measures. This approach provides a common theoretical basis for the subsequent analysis of hybrid measurements and Gaussian boson sampling. It makes it possible to consider not only the state itself but also the measurement behavior, that is, the statistics of outcomes for a given set of local settings. It is at the level of such behavior that the local-realistic description and the phase-space classical reconstruction of statistics are compared.

The first part of the thesis considers a hybrid measurement scheme in which one mode of light is analyzed by balanced homodyne detection, while the other is analyzed by displaced threshold photodetection. This scheme combines a continuous variable, represented by a field quadrature, and a discrete variable corresponding to the no-click or click event of a threshold detector. For this scheme, the space of local settings and outcomes is formulated, joint measurement probabilities are written, and it is shown how these probabilities can be represented in phase-space form through the symbols of the corresponding elements of positive operator-valued measures.

As an illustrative example, the thesis considers a two-mode squeezed vacuum state. Its individual modes are thermal, and therefore locally classical, whereas the full two-mode state contains nonclassical intermode correlations. For this example, the statistics of the hybrid measurement and its dependence on the squeezing parameter and local settings are analyzed. It is shown that the corresponding behavior remains compatible with local realism in the sense of Bell nonlocality, while nevertheless violating an inequality associated with a weaker model of a classical phase-space description. Thus, hybrid measurement makes it possible to reveal nonclassical correlations of light at the level of specific measurement statistics.

The other part of the thesis is devoted to Gaussian boson sampling under conditions of realistic photon-number resolution in detection. Gaussian boson sampling is a specialized model of non-universal quantum computation: it is

not intended to perform an arbitrary quantum algorithm but realizes a specific sampling task from the distribution of photocounting events at the output of a linear interferometer. In this scheme, Gaussian states of light are injected into the inputs of the interferometer, and photon events are registered at the output. Collision events, that is, events with more than one photon in a certain output mode, are relatively rare, but they can carry important information for experimental validation. Therefore, the limited ability of realistic detectors to distinguish adjacent photon numbers is of fundamental importance for the correct interpretation of the output statistics.

The thesis constructs a general description of the photocounting statistics at the output of Gaussian boson sampling for arbitrary detectors described by the elements of a positive operator-valued measure. A compact formula is obtained for the probability of registering a given pattern, in which the result is expressed through a functional of a matrix associated with the Q-function covariance matrix of the output Gaussian state. This approach generalizes known results for ideal photon-number-resolving detectors and threshold detectors. In the corresponding limiting cases, the general matrix functional reduces to known structures, in particular to the hafnian for ideal photon-number-resolving detectors and to the Torontonian for threshold detectors. At the same time, photon patterns before detection and registered outcome patterns are distinguished in this formalism, since a realistic photodetector returns the result of its own measurement procedure and not necessarily the true photon number in a mode. This distinction is essential for the interpretation of experimentally accessible statistics, because the detector model determines which features of the underlying multiphoton distribution remain observable and which are lost at the registration stage. Therefore, realistic detection enters the theory not as a secondary correction, but as an intrinsic part of the mapping from the output quantum state to the measured statistics.

Realistic models of detection with photon-number resolution are considered separately. For multiplexed arrays of threshold detectors, the corresponding matrix functional is obtained, taking into account the finite number of elementary threshold detectors in the array. For photodetection based on counting photocurrent pulses, models with dead time, typical for avalanche photodiodes, as well as models with relaxation time, important for superconducting nanowire single-photon detectors, are considered. For several important regimes, analytical simplifications suitable for further use in Gaussian boson sampling problems are obtained.

On the basis of the developed formalism, the problem of validating Gaussian boson sampling in the presence of realistic photon-number resolution is analyzed. Since the full distribution of output patterns in large multimode systems is too complex for direct reconstruction and comparison, grouped statistics are used in the thesis. In particular, orbits are considered, that is, classes of registered patterns that are transformed into one another by permutations of modes, as well as statistics of collision events. Such quantities can be estimated from experimental data and at the same time remain sensitive to differences between quantum statistics and classical models.

To estimate orbital probabilities, direct summation over patterns and phase-space simulation methods based on the positive-P representation are considered. It is shown that the phase-space approach is suitable for estimating grouped statistics in regimes with a large number of output modes and photon events, where direct methods become computationally complicated. On this basis, validation procedures for Gaussian boson sampling are formulated using Pearson's χ^2 test and a Bayesian test. The comparison is performed between the statistics of target thermalized squeezed states and the statistics of classical reference models, in particular thermal and squashed Gaussian states. Such validation is not a full certification of quantum advantage, but it provides a practical way to test the consistency of accessible grouped statistics with the target model and with classical reference alternatives. In particular, it makes it possible to analyze which sectors of the grouped distribution remain informative under a given detector model and how partial photon-number resolution changes the discrimination power of the statistical tests. This is especially relevant in regimes where individual output patterns are too rare to be estimated reliably, while grouped orbital statistics remain experimentally accessible.

Numerical examples show that realistic photon-number resolution of detectors substantially affects orbital probabilities and the efficiency of validation tests. Even minimal photon-number resolution, available for arrays of threshold detectors or for detectors based on counting photocurrent pulses, can increase confidence in distinguishing the quantum statistics of Gaussian boson sampling from classical alternatives. At the same time, models with dead time and relaxation can substantially change the results; therefore, the use of overly idealized detector models can lead to an incorrect assessment of the output statistics and validation results.

The scientific novelty of the thesis lies in demonstrating nonclassical

correlations of light in a hybrid measurement scheme combining balanced homodyne detection and displaced threshold photodetection; in deriving a general matrix-functional expression for the photocounting statistics of Gaussian boson sampling with arbitrary realistic photodetectors; in specifying this expression for the main models of detection with photon-number resolution; and in formulating validation procedures for Gaussian boson sampling that directly account for the imperfect ability of detectors to distinguish photon numbers.

The theoretical significance of the obtained results lies in constructing a consistent description of the interaction between multimode quantum states and realistic measurement devices. The proposed approach can be used to analyze photonic experiments in which losses, finite photon-number resolution, dead time, and detector relaxation effects play an important role. The practical significance of the results lies in enabling a more accurate interpretation of Gaussian boson sampling experiments and in developing validation methods that take into account the actual characteristics of the photodetectors used.

In summary, the thesis shows that a realistic description of measurement is a necessary component in the analysis of multimode quantum light. For hybrid measurements, it enables the detection of nonclassical correlations that are not reducible to Bell nonlocality. For Gaussian boson sampling, it leads to a generalized description of photocounting statistics and demonstrates that even partial photon-number resolution can substantially affect the validation of quantum optical devices.

Keywords: quantum optics, multimode quantum light, phase-space formalism, positive operator-valued measures, Gaussian states, photon-number resolution, realistic photodetectors, homodyne detection, threshold detection, nonclassical correlations, Gaussian boson sampling, validation of quantum devices, matrix functionals.

List of publications of the applicant on the topic of the thesis:

[I] V. S. Kovtoniuk, I. S. Yeremenko, S. Ryl, W. Vogel, and A. A. Semenov, “Nonclassical correlations of radiation in relation to Bell nonlocality”, *Phys. Rev. A* **105**, 063722 (2022), doi: 10.1103/PhysRevA.105.063722. (Q1)

[II] I. S. Yeremenko, M. A. Dmytruk, and A. A. Semenov, “Realistic photon-number resolution in Gaussian boson sampling”, *Phys. Rev. A* **110**, 043715 (2024), doi: 10.1103/PhysRevA.110.043715. (Q1)