Український державний університет науки і технологій
ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»
Міністерство освіти і науки України

Український державний університет науки і технологій
ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КУЧИН ІЛЛЯ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 699.84:534.1:620.22

ДИСЕРТАЦІЯ
НЕОДНОРІДНІ МЕТАМАТЕРІАЛИ ТА КОНСТРУКЦІЇ ДЛЯ ЗАХИСТУ СПОРУД ВІД СЕЙСМІЧНИХ ТА ВІБРАЦІЙНИХ ВПЛИВІВ

Спеціальність 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
Галузь знань 19 «Архітектура та будівництво»

Подається на здобуття ступеня доктора філософії
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Кучин І. О.

Науковий керівник: Данішевський Владислав Валентинович, доктор технічних наук, професор

Дніпро – 2026

АНОТАЦІЯ

Кучин І. О. Неоднорідні метаматеріали та конструкції для захисту споруд від сейсмічних та вібраційних впливів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія. – Український державний університет науки і технологій, Дніпро, 2026.

Дисертація присвячена розробці та чисельному обґрунтуванню неоднорідних метаматеріальних конструкцій для захисту будівель і споруд від сейсмічних та техногенних вібраційних впливів. У роботі розглянуто двовимірні періодичні бетонно-гумові конструкції фундаментного типу, здатні формувати заборонені зони пружних хвиль у низькочастотному діапазоні. Запропонований підхід ґрунтується на використанні принципів фононних кристалів і механічних метаматеріалів, у яких ослаблення передачі коливань досягається завдяки керованій взаємодії хвильового поля з періодичною неоднорідністю. Досліджено двокомпонентні комірки з гумовим включенням і трикомпонентні локально-резонансні комірки з гумовим кільцем та важким сталевим ядром. Для цих конструкцій побудовано дисперсійні діаграми, визначено межі та ширину заборонених зон, проаналізовано вплив геометричних і матеріальних параметрів на положення робочого частотного діапазону, а також розглянуто скінченний періодичний масив у нестаціонарній постановці.

Актуальність роботи обумовлена необхідністю розвитку ефективних пасивних засобів захисту споруд від низькочастотних динамічних впливів, зокрема сейсмічних хвиль, транспортних та промислових вібрацій. Традиційні підходи до сейсмічного та вібраційного захисту не завжди забезпечують достатньо вибіркове пригнічення коливань у заданому частотному діапазоні за прийнятних конструктивних параметрів. Періодичні метаматеріальні системи відкривають можливість формування частотних інтервалів, у яких поширення пружних хвиль істотно послаблюється. Разом з тим для

будівельних застосувань залишаються недостатньо дослідженими питання вибору архітектури бетонно-гумової комірки, переходу від спектральних характеристик нескінченної періодичної структури до оцінювання скінченного конструктивного масиву, масштабного налаштування захисного частотного діапазону та врахування невизначеності фізико-механічних властивостей матеріалів.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, показано зв'язок роботи з науковими програмами і темами, сформульовано мету та задачі дослідження, визначено об'єкт, предмет і методи дослідження, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про особистий внесок здобувача, апробацію результатів та публікації.

У **першому розділі** проведено огляд та проаналізовано сучасний стан досліджень у галузі захисту будівель і споруд від сейсмічних та техногенних вібраційних впливів із застосуванням періодично-неоднорідних структур, фононних кристалів і механічних метаматеріалів. Розглянуто традиційні підходи до динамічного захисту конструкцій і показано їхні обмеження щодо ефективного ослаблення низькочастотних хвиль у заданому частотному діапазоні. Проаналізовано механізми формування заборонених зон у періодичних структурах, зокрема брегівське розсіяння та локальний резонанс, а також приклади їх використання у фононних кристалах, метаматеріальних фундаментах і метабар'єрах. Особливу увагу приділено двовимірним бетонно-гумовим системам із круговими включеннями, локально-резонансним коміркам з важкими ядрами, методам числового визначення зонних діаграм та проблемі переходу від нескінченної періодичної структури до скінченного конструктивного масиву. Розглянуто вплив розкиду фізико-механічних характеристик матеріалів на положення та ширину заборонених зон і можливість застосування апарату нечітких множин для опису такої невизначеності. Встановлено, що недостатньо дослідженими залишаються питання порівняння двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових комірок в єдиній чисельній постановці, масштабного налаштування захисного

частотного діапазону, перевірки частотно-вибіркового ослаблення у скінченному масиві та оцінювання чутливості результатів до зміни властивостей бетону, гуми і сталі. На основі проведеного аналізу визначено напрямок наукових досліджень дисертації та шляхи вирішення поставлених задач.

У **другому розділі** розглянуто теоретико-методологічні засади аналізу хвильових процесів у періодично-неоднорідних середовищах, які використано для подальшого чисельного дослідження бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій. Викладено метод Флоке–Блоха як основний інструмент переходу від нескінченної періодичної структури до розрахунку одиничної комірки з квазіперіодичними граничними умовами. Розглянуто дискретну двовимірну модель, у якій проаналізовано періодичні й антиперіодичні моди, акустичні та оптичні гілки, а також умови виникнення частотних інтервалів, де поширення хвиль пригнічується. Наведено аналітичні співвідношення для модельних періодичних систем, розглянуто вплив демпфування та довгохвильові неперервні наближення. Метод Флоке–Блоха поширено на неперервне волокнисте середовище з періодичними включеннями, після чого сформульовано скінченноелементну постановку задачі про власні частоти одиничної комірки. Визначено дві базові архітектури для подальшого дослідження: двокомпонентну бетонно-гумову комірку з суцільним гумовим включенням і трикомпонентну локально-резонансну комірку з бетонною матрицею, гумовим кільцем та сталевим ядром. Задано фізико-механічні характеристики матеріалів, граничні умови Флоке–Блоха, маршрут обходу першої зони Бриллюена та вихідні умови для чисельного визначення заборонених зон у розділі 3.

У **третьому розділі** виконано чисельне дослідження заборонених зон у двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових періодичних конструкціях у межах плоскої задачі лінійної теорії пружності з граничними умовами Флоке–Блоха. Сформовано геометричні моделі двох архітектур комірки: бетонної матриці з суцільним гумовим включенням та бетонної

матриці з гумовим кільцем і важким сталевим ядром. Для обох типів конструкцій задано єдині матеріальні параметри, скінченноелементну постановку, маршрут обходу першої зони Бриллюена Г–Х–М–Г та робочий критерій виділення забороненої зони за контурним критерієм. Проведено перевірку збіжності за рівнем скінченноелементної сітки, що підтвердило чисельну стійкість отриманих меж заборонених зон. Для двокомпонентної бетонно-гумової комірки при базових параметрах отримано першу заборонену зону за контурним критерієм 30,10–30,30 Гц шириною близько 0,21 Гц; встановлено, що ця зона не є чисельним артефактом, однак має малу практичну ширину. Для трикомпонентної локально-резонансної комірки з гумовим кільцем і сталевим ядром при тих самих зовнішніх розмірах включення визначено першу заборонену зону 19,70–27,77 Гц шириною 8,07 Гц. Аналіз форм власних коливань на нижній і верхній межах цієї зони показав, що її формування пов’язане з відносним рухом важкого ядра у податливому гумовому прошарку та концентрацією деформацій у гумовому кільці, тобто з локально-резонансним механізмом, а не лише з брегівським розсіюванням на періодичній неоднорідності. Досліджено вплив площової частки включення на межі заборонених зон; для трикомпонентної конструкції у розглянутому діапазоні встановлено монотонне зниження нижньої межі та зростання ширини першої зони, тоді як для двокомпонентної конструкції перша зона залишається вузькою. Окремо виконано масштабування геометрії комірки та підтверджено обернено пропорційний зв’язок між розміром комірки і частотами меж забороненої зони. Показано, що збільшення масштабу конструкції дозволяє переносити першу заборонену зону з діапазону десятків герц до частот одиниць герц, зокрема до верхньої частини сейсмічно та вібраційно релевантного діапазону. Отримані результати визначили трикомпонентну бетонно-гумову локально-резонансну архітектуру як основний об’єкт подальшого дослідження у скінченній нестаціонарній постановці.

У **четвертому розділі** виконано перехід від спектрального аналізу нескінченної періодичної комірки до оцінювання фактичного ослаблення коливань у скінченному масиві трикомпонентних бетонно-гумових комірок. Розроблено нестаціонарну скінченноелементну модель у постановці плоскої деформації, у якій скінченний масив порівнюється з еталонною бетонною моделлю тієї самої геометрії без включень. Передачу коливань оцінено за піковою швидкістю в контрольних точках, на основі чого визначено частотно-залежний коефіцієнт передачі та вставні втрати. Для базового масиву з розміром комірки 0,4 м встановлено, що у межах першої зони, визначеної для нескінченної періодичної комірки у третьому розділі, спостерігається додатне ослаблення відносно еталонної моделі, насамперед у нижній і центральній частині діапазону 20–26 Гц, де вставні втрати становлять близько 1,7–2,1 дБ. Показано, що ділянка безпосередньо вище першої зони, зокрема 28–30 Гц, є майже прохідною, тоді як в інших позазонних інтервалах можуть виникати локальні максимуми ослаблення, пов’язані з особливостями відповіді скінченного масиву. Досліджено вплив кількості комірок уздовж напряму поширення хвилі; встановлено систематичне зростання вставних втрат зі збільшенням довжини масиву. Виконано масштабування скінченного масиву до більших розмірів комірки і показано перенесення ділянок ослаблення до нижчих частот, що якісно узгоджується із законом подібності, встановленим для нескінченної періодичної структури. Проведено контроль стійкості результатів до зменшення кроку інтегрування за часом. Результати розділу показали якісну узгодженість між положенням забороненої зони нескінченної трикомпонентної комірки та частотно-вибірковим ослабленням у скінченному масиві, а також сформували основу для подальшого уточнення таких конструкцій з урахуванням ґрунтових умов, схеми споруди та граничних умов.

У **п’ятому розділі** досліджено вплив невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів на параметри заборонених зон бетонно-гумової редукованої розрахункової моделі, що використовується для оцінювання чутливості таких структур до зміни властивостей компонентів. Для опису

можливого розкиду властивостей бетону, гуми та сталі застосовано апарат нечітких множин і рівневий аналіз, що дозволяє оцінювати межі зміни частотних характеристик за умов обмеженої статистичної інформації. Розглянуто вплив модулів пружності, густин і коефіцієнтів Пуассона компонентів на нижню та верхню межі першої забороненої зони, її ширину і центральну частоту. У межах редукованої моделі встановлено, що зміна пружних характеристик і густин компонентів може зміщувати межі забороненої зони та впливати на її ширину; найбільш помітний внесок пов'язаний із параметрами гумового шару та густинами компонентів. Показано, що зміна матеріальних характеристик може не лише зміщувати межі забороненої зони, а й впливати на її ширину, тому врахування невизначеності є необхідним етапом попереднього обґрунтування метаматеріальних конструкцій для задач сейсмічного та вібраційного захисту. На основі отриманих результатів сформульовано практичні рекомендації щодо вибору архітектури комірки, геометричного масштабу та матеріальних параметрів бетонно-гумових періодичних систем. Показано, що поєднання локально-резонансної трикомпонентної комірки, масштабного налаштування геометрії та оцінювання чутливості до матеріальної невизначеності формує розрахункову основу для подальшого розроблення метаматеріальних фундаментів, метабар'єрів і захисних конструкцій, призначених для ослаблення сейсмічних та техногенних вібраційних впливів.

Ключові слова: пружні хвилі, механічні метаматеріали, заборонені зони, локальний резонанс, бетонно-гумові конструкції, сейсмічний та вібраційний захист, метод скінченних елементів, чисельне моделювання, напружено-деформований стан, гомогенізація, континуалізація, залізобетонні конструкції, бетон, фізико-механічні характеристики, нечіткі множини.

ABSTRACT

Kuchyn I. O. Heterogeneous Metamaterials and Structures for the Protection of Buildings and Structures against Seismic and Vibration Effects. – Qualifying scientific work on the rights of a manuscript.

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 192 – Building and Civil Engineering. Ukrainian State University of Science and Technology. Dnipro, 2026.

The dissertation is devoted to the development and numerical substantiation of heterogeneous metamaterial structures for protecting buildings and structures against seismic and technogenic vibration effects. The work considers two-dimensional periodic concrete–rubber foundation-type structures capable of forming elastic-wave band gaps in the low-frequency range. The proposed approach is based on the principles of phononic crystals and mechanical metamaterials, in which vibration transmission is reduced through the controlled interaction of the wave field with periodic heterogeneity. Two-component unit cells with a rubber inclusion and three-component locally resonant unit cells with a rubber ring and a heavy steel core are investigated. For these structures, dispersion diagrams are constructed, band-gap boundaries and widths are determined, the influence of geometric and material parameters on the operating frequency range is analyzed, and a finite periodic array in a transient formulation is considered.

The relevance of the work is determined by the need to develop effective passive means of protecting structures against low-frequency dynamic effects, including seismic waves, transport-induced vibrations, and industrial vibrations. Traditional approaches to seismic and vibration protection do not always provide sufficiently selective suppression of vibrations in a prescribed frequency range while maintaining acceptable structural parameters. Periodic metamaterial systems make it possible to form frequency intervals in which the propagation of elastic waves is significantly attenuated. At the same time, for civil engineering applications, a number of issues remain insufficiently studied, including the selection of the architecture of a concrete–rubber unit cell, the transition from spectral characteristics

of an infinite periodic structure to the assessment of a finite structural array, scale tuning of the protective frequency range, and allowance for uncertainty in the physical-mechanical properties of materials.

The **introduction** substantiates the relevance of the dissertation topic, shows the relation of the work to scientific programs and research topics, formulates the aim and objectives of the study, defines the object, subject, and research methods, presents the scientific novelty and practical significance of the obtained results, and provides information on the personal contribution of the applicant, approbation of the results, and publications.

The **first chapter** reviews and analyzes the current state of research in the field of protecting buildings and structures against seismic and technogenic vibration effects using periodically heterogeneous structures, phononic crystals, and mechanical metamaterials. Traditional approaches to dynamic protection of structures are considered, and their limitations in terms of effective attenuation of low-frequency waves within a specified frequency range are shown. The mechanisms of band-gap formation in periodic structures are analyzed, including Bragg scattering and local resonance, as well as examples of their use in phononic crystals, metamaterial foundations, and metabarriers. Special attention is paid to two-dimensional concrete–rubber systems with circular inclusions, locally resonant unit cells with heavy cores, methods for numerical determination of band diagrams, and the problem of transition from an infinite periodic structure to a finite structural array. The influence of scatter in the physical-mechanical characteristics of materials on the position and width of band gaps is considered, along with the possibility of applying fuzzy-set theory to describe such uncertainty. It is established that the issues of comparing two-component and three-component concrete–rubber unit cells within a unified numerical formulation, scale tuning of the protective frequency range, verification of frequency-selective attenuation in a finite array, and assessment of the sensitivity of results to changes in the properties of concrete, rubber, and steel remain insufficiently studied. Based on the analysis, the direction

of the dissertation research and the ways of solving the formulated tasks are determined.

The **second chapter** considers the theoretical and methodological foundations for analyzing wave processes in periodically heterogeneous media, which are used for the subsequent numerical study of concrete–rubber metamaterial structures. The Floquet–Bloch method is presented as the main tool for reducing an infinite periodic structure to the calculation of a single unit cell with quasi-periodic boundary conditions. A discrete two-dimensional model is considered, in which periodic and antiperiodic modes, acoustic and optical branches, and the conditions for the occurrence of frequency intervals where wave propagation is suppressed are analyzed. Analytical relations for model periodic systems are presented, and the influence of damping and long-wave continuum approximations is considered. The Floquet–Bloch method is extended to a continuous fibrous medium with periodic inclusions, after which the finite element formulation of the eigenfrequency problem for a unit cell is formulated. Two basic architectures are defined for further study: a two-component concrete–rubber unit cell with a solid rubber inclusion and a three-component locally resonant unit cell consisting of a concrete matrix, a rubber ring, and a steel core. The physical-mechanical properties of the materials, Floquet–Bloch boundary conditions, the path along the boundary of the first Brillouin zone, and the initial conditions for the numerical determination of band gaps in Chapter 3 are specified.

The **third chapter** presents a numerical study of band gaps in two-component and three-component concrete–rubber periodic structures within the framework of the plane problem of linear elasticity with Floquet–Bloch boundary conditions. Geometric models of two unit-cell architectures are formed: a concrete matrix with a solid rubber inclusion and a concrete matrix with a rubber ring and a heavy steel core. For both types of structures, unified material parameters, a finite element formulation, the Γ–X–M–Γ path along the first Brillouin zone, and a working criterion for identifying a band gap according to the contour criterion are specified. Mesh convergence is verified, confirming the numerical stability of the obtained

band-gap boundaries. For the two-component concrete–rubber unit cell with the basic parameters, the first band gap according to the contour criterion of 30.10–30.30 Hz with a width of approximately 0.21 Hz is obtained; it is established that this band gap is not a numerical artifact but has a small practical width. For the three-component locally resonant unit cell with a rubber ring and a steel core, under the same external inclusion dimensions, the first band gap of 19.70–27.77 Hz with a width of 8.07 Hz is determined. The analysis of eigenmodes at the lower and upper boundaries of this band gap shows that its formation is associated with the relative motion of the heavy core in the compliant rubber layer and the concentration of deformations in the rubber ring, that is, with a locally resonant mechanism rather than only with Bragg scattering on periodic heterogeneity. The influence of the inclusion area fraction on the band-gap boundaries is investigated; for the three-component structure in the considered range, a monotonic decrease in the lower boundary and an increase in the width of the first band gap are established, whereas the first band gap of the two-component structure remains narrow. Geometric scaling of the unit cell is also performed, confirming an inversely proportional relationship between the unit-cell size and the frequencies of the band-gap boundaries. It is shown that increasing the scale of the structure makes it possible to shift the first band gap from the range of tens of hertz to frequencies of a few hertz, including the upper part of the seismic and vibration-relevant frequency range. The obtained results identify the three-component concrete–rubber locally resonant architecture as the main object for further investigation in a finite transient formulation.

The **fourth chapter** performs the transition from the spectral analysis of an infinite periodic unit cell to the assessment of actual vibration attenuation in a finite array of three-component concrete–rubber unit cells. A transient finite element model is developed in a plane-strain formulation, in which the finite array is compared with a reference homogeneous concrete model of the same geometry without inclusions. Vibration transmission is evaluated using peak velocity at the control points, on the basis of which the frequency-dependent transmission

coefficient and insertion loss are determined. For the basic array with a unit-cell size of 0.4 m, it is established that within the first band gap determined for the infinite periodic unit cell in Chapter 3, positive attenuation relative to the reference model is observed, primarily in the lower and central part of the 20–26 Hz range, where the insertion loss is approximately 1.7–2.1 dB. It is shown that the interval immediately above the first band gap, in particular 28–30 Hz, is almost transmissive, whereas local attenuation maxima may occur in other out-of-gap intervals due to the specific response of the finite array. The influence of the number of unit cells along the wave propagation direction is investigated; a systematic increase in insertion loss with increasing array length is established. Scaling of the finite array to larger unit-cell sizes is performed, and the shift of attenuation intervals to lower frequencies is shown to be qualitatively consistent with the similarity law established for the infinite periodic structure. The stability of the results with respect to a reduced time-integration step is checked. The results of the chapter show qualitative agreement between the position of the band gap of the infinite three-component unit cell and frequency-selective attenuation in the finite array, and also form the basis for further refinement of such structures with allowance for soil conditions, the structural scheme of the building, and boundary conditions.

The **fifth chapter** investigates the influence of uncertainty in the physical-mechanical characteristics of materials on the band-gap parameters of a reduced concrete–rubber computational model used to assess the sensitivity of such structures to variations in component properties. To describe the possible scatter in the properties of concrete, rubber, and steel, fuzzy-set theory and level-wise analysis are applied, which make it possible to estimate the ranges of variation in frequency characteristics under conditions of limited statistical information. The influence of elastic moduli, densities, and Poisson’s ratios of the components on the lower and upper boundaries of the first band gap, its width, and its central frequency is considered. Within the reduced model, variations in the elastic properties and densities of the components are shown to shift the band-gap boundaries and affect the band-gap width; the most pronounced influence is associated with the rubber

layer parameters and component densities. It is shown that changes in material characteristics may not only shift the boundaries of the band gap but also affect its width; therefore, allowance for uncertainty is a necessary stage in the preliminary substantiation of metamaterial structures for seismic and vibration protection problems. Based on the obtained results, practical recommendations are formulated regarding the choice of unit-cell architecture, geometric scale, and material parameters of concrete–rubber periodic systems. It is shown that the combination of a locally resonant three-component unit cell, geometric scale tuning, and sensitivity assessment with respect to material uncertainty forms a computational basis for the further development of metamaterial foundations, metabarriers, and protective structures intended to attenuate seismic and technogenic vibration effects.

Keywords: elastic waves, mechanical metamaterials, band gaps, local resonance, concrete-rubber structures, seismic and vibration protection, finite element, numerical modelling, stress-strain state, homogenization, continualization, reinforced concrete structures, concrete, physical-mechanical characteristics, fuzzy sets.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях України та виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах

1. Volchok D., Danishevskyy V., Slobodianiuk S., **Kuchyn I.** Fuzzy sets application in the problems of structural mechanics and optimal design. Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. P. 6191–6204. DOI: 10.1007/s00707-023-03713-0. **(особистий внесок:** формулювання задачі, оцінювання отриманих результатів та узагальнення підходів, використаних у дисертаційній роботі для оцінювання чутливості заборонених зон**).**

2. **Кучин І. О.** Двовимірні ґрунтові метаструктури та періодичні фундаменти для вібросейсмічного захисту: огляд. Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 2 (032). С. 160–166. DOI: 10.30838/UJCEA.2312.290426.160.1237. **(особистий внесок:** аналіз джерел за темою дослідження, систематизація підходів до використання двовимірних метаструктур і періодичних фундаментів, узагальнення сучасного стану досліджень для задач вібраційного та сейсмічного захисту будівель і споруд**).**

3. Данішевський В. В., **Кучин І. О.** Двовимірні бетонно-гумові періодичні конструкції для захисту будівель від вібрацій та сейсмічних навантажень. Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 3 (033). С. 62–66. DOI: 10.30838/UJCEA.0333.270526.62.1243. (**особистий внесок:** розроблення чисельних моделей двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій, виконання розрахунків заборонених зон, аналіз впливу геометричних параметрів комірки на положення та ширину захисного частотного діапазону, підготовка висновків щодо застосування таких конструкцій для вібраційного та сейсмічного захисту).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Bezverkhyi D., **Kuchyn I.**, Danishevskyy V. Propagation of elastic transient waves in 1D periodically heterogeneous structures. *Науково-практична*

конференція студентів, аспірантів і молодих вчених (Дніпро, 27–28 березня 2023 р.). Дніпро: ПДАБА, 2023. С. 358–360.

5. Андріанов І., Данішевський В., Безверхий Д., **Кучин І.** Шаруваті конструкції для вібро- та сейсмоізоляції. *Стародубовські читання – 2023: матеріали XXXIII науково-практичної конференції* (Дніпро, 19 квітня 2023 р.). Дніпро, 2023. С. 5–7.

6. Danishevskyy V., **Kuchyn I.** Splash effects in propagation of elastic waves in heterogeneous structures. *Інноваційні технології забезпечення параметрів комфорту, енергоефективності і екологічності житлових будівель на основі смарт-технологій: матеріали міжнародної науково-практичної конференції.* 2024. С. 21–23.

7. **Kuchyn I.** Investigation of the Impact of Geometric Configuration on Wave Attenuation in a Composite Beam with Circular Inclusions. *Mathematical modeling and experimental studies of civil and mechanical engineering problems: abstracts of the scientific and practical conference* (Bratislava, 28 January 2025). Bratislava: ROEZ, s.r.o., 2025. P. 12. DOI: 10.30838/PSACEA.978-966-3232-52-3

8. Данішевський В., **Кучин І. О.** Вплив конфігурації круглих включень на затухання хвиль у композитній балці. *Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення: збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції MPMSPS-2025* (Дніпро, 26–28 березня 2025 р.). Дніпро, 2025. С. 144–146.

9. Danishevskyy V., **Kuchyn I.,** Bezverkhyi D. Band gaps in seismic metamaterials: two-layer unit cell and design maps. *Innovative Technologies in Construction, Civil Engineering and Architecture: proceedings of the XX International Scientific and Practical Conference*. 2025. P. 406–407.

10. Shekhorkina S., Bezverkhyi D., **Kuchyn I.** Sound transmission loss of an eco-wall with CLT and straw insulation. *Innovative Technologies in Construction, Civil Engineering and Architecture: proceedings of the XX International Scientific and Practical Conference*. 2025. P. 407–409.

ЗМІСТ

ВСТУП **19**

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ **26**

1.1. Актуальність задачі захисту споруд від сейсмічних та вібраційних впливів 26

1.2. Хвильові процеси у дискретних і неоднорідних середовищах: від ланцюжкових моделей до континуальних наближень 28

1.3. Фононні кристали: фізика заборонених зон і ключові механізми 31

1.4. Двовимірні фононні кристали з циліндричними включеннями: типи, геометрія, матеріальний контраст 33

1.5. Локально-резонансні метаматеріали і субхвильові заборонені зони .. 35

1.6. Числові методи розрахунку зонних діаграм: МСЕ з умовами Флоке–Блоха 37

1.7. Застосування 2D метаматеріальних конструкцій для захисту споруд 39

1.8. Невизначеність матеріальних параметрів і методи нечітких множин 42

1.9. Висновки до розділу 1 45

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНА БАЗА ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ **47**

2.1. Загальна теорія хвиль у періодично-неоднорідних середовищах..... 47

2.2. Дискретна двовимірна модель: аналітична основа 52

2.3. Вплив в’язкого демпфування..... 58

2.4. Довгохвильові неперервні наближення..... 60

2.5. Метод Флоке–Блоха для неперервного волокнистого середовища 63

2.6. Узагальнена скінченноелементна постановка спектральної задачі з умовами Флоке–Блоха..... 68

2.7. Критерій виділення забороненої зони та масштабна подібність 70

2.8. Локально-резонансна інтерпретація трикомпонентної комірки..... 71

2.9. Просторове згасання у забороненій зоні та зв’язок із вставними втратами 73

2.10. Висновки до розділу 2 74
РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАБОРОНЕНИХ ЗОН У ДВОКОМПОНЕНТНИХ І ТРИКОМПОНЕНТНИХ БЕТОННО-ГУМОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ КОНСТРУКЦІЯХ 76
3.1. Загальна логіка чисельного етапу дослідження 76
3.2. Геометрія періодичних конструкцій і матеріальні параметри 77
3.3. Скінченноелементна постановка та параметризація контуру Бриллюена 80
3.4. Критерій виділення забороненої зони та обробка власних частот 83
3.5. Перевірка збіжності та чисельної стійкості 84
3.6. Базові дисперсійні діаграми та порівняння двох архітектур 86
3.7. Форми власних коливань на межах першої зони 88
3.8. Вплив площової частки включення 90
3.9. Масштабування розміру комірки періодичності 92
3.10. Інтерпретація результатів і межі застосовності 94
3.11. Висновки до розділу 3 100
РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЛАБЛЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У СКІНЧЕННОМУ МАСИВІ ТРИКОМПОНЕНТНИХ БЕТОННО-ГУМОВИХ КОМІРОК У НЕСТАЦІОНАРНІЙ ПОСТАНОВЦІ 102
4.1. Загальна логіка переходу від забороненої зони до ослаблення в скінченному масиві 102
4.2. Математична постановка нестаціонарної задачі та геометрія скінченного масиву 103
4.3. Метрика передачі за піковою швидкістю та її межі 107
4.4. Базовий випадок a_{total} = 0,4 м: частотна залежність IL та часові сигнали 109
4.5. Вплив числа комірок уздовж напряму поширення 112
4.6. Масштабування розміру комірки до нижчих частот 114
4.7. Чисельна перевірка стійкості за кроком інтегрування 118

4.8. Висновки до розділу 4 та межі застосовності 119
РОЗДІЛ 5. ОЦІНКА ЧУТЛИВОСТІ ЗАБОРОНЕНИХ ЗОН ДО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ МАТЕРІАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕТОДАМИ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА ІНЖЕНЕРНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ 122
5.1. Постановка задачі врахування невизначеності матеріальних параметрів 122
5.2. Базова модель: метод матриці переносу для шаруватої бетонно-гумової структури 124
5.3. Однофакторний аналіз чутливості заборонених зон 128
5.4. Нечітке подання невизначеності: α-рівні та дефазифікація 132
5.5. Сумісна невизначеність параметрів і гарантована заборонена зона . 136
5.6. Перенесення результатів на двовимірну комірку та інженерні рекомендації 138
5.7. Висновки до розділу 5 141
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ 143
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 147
ДОДАТКИ 159
ДОДАТОК А 160
ДОДАТОК Б 162

ВСТУП

Актуальність теми. Забезпечення динамічної надійності будівель і споруд за сейсмічних та техногенних вібраційних впливів є актуальною задачею сучасної будівельної механіки та цивільної інженерії. В урбанізованому середовищі природні сейсмічні небезпеки поєднуються з постійними джерелами техногенних коливань - рейковим транспортом, метрополітеном, промисловим обладнанням та інженерною інфраструктурою, що може знижувати експлуатаційну придатність конструкцій і погіршувати умови перебування людей у будівлях. Традиційні засоби сейсмічного та вібраційного захисту - підвищення жорсткості й маси конструкцій, класичні ізоляційні системи, демпфери та активне керування - не завжди забезпечують ефективне частотно-вибіркове ослаблення коливань, особливо в низькочастотному діапазоні. Перспективним напрямом є використання періодично-неоднорідних структур, фононних кристалів і механічних метаматеріалів, здатних формувати заборонені зони, у межах яких поширення пружних хвиль істотно пригнічується. Водночас для будівельних застосувань недостатньо дослідженими залишаються вибір архітектури двовимірної бетонно-гумової комірки, порівняння дво- і трикомпонентних локально-резонансних систем, перехід від спектрального аналізу нескінченної структури до скінченного масиву, масштабне налаштування робочого частотного діапазону та врахування невизначеності фізико-механічних параметрів матеріалів. Це визначає актуальність дисертаційного дослідження, спрямованого на розроблення та чисельне обґрунтування неоднорідних метаматеріальних конструкцій для захисту споруд від сейсмічних і вібраційних впливів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась відповідно до тематики наукових досліджень Українського державного університету науки і технологій, ННІ

«Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», у межах таких наукових програм і науково-дослідних робіт:

– міжнародний науковий проєкт HORIZON 2020 «Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications», № 101008140, виконавець;

– науково-дослідна робота «Механіка будівельних конструкцій з однорідних і неоднорідних матеріалів», державний реєстраційний номер 0124U002119, виконавець;

– науково-дослідна робота «Науково-практичні засади проектування біопозитивних реабілітаційних будівель для ветеранів та цивільних, постраждалих внаслідок російсько-української війни», державний реєстраційний номер 0124U000542, виконавець.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення та чисельне обґрунтування неоднорідних бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій для захисту споруд від сейсмічних і техногенних вібраційних впливів шляхом формування, аналізу та масштабного налаштування низькочастотних заборонених зон пружних хвиль у двовимірних періодичних структурах.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- проаналізувати сучасний стан досліджень у галузі сейсмічного та вібраційного захисту споруд із застосуванням періодично-неоднорідних структур, фононних кристалів, механічних метаматеріалів, метаматеріальних фундаментів і метабар’єрів;

- систематизувати теоретико-методологічні засади аналізу хвильових процесів у періодичних середовищах і сформулювати чисельну постановку задачі визначення заборонених зон для двовимірних бетонно-гумових комірок із граничними умовами Флоке–Блоха;

- розробити та порівняти дві базові архітектури періодичної комірки: двокомпонентну бетонно-гумову комірку з суцільним гумовим включенням і

трикомпонентну локально-резонансну комірку з бетонною матрицею, гумовим кільцем та сталевим ядром;

- визначити межі та ширину заборонених зон для двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових періодичних структур, проаналізувати форми власних коливань на межах заборонених зон та встановити фізичний механізм їх формування;

- дослідити вплив площової частки включення та геометричного масштабу комірки на положення і ширину першої забороненої зони та оцінити можливість перенесення робочого частотного діапазону до сейсмічно та вібраційно релевантних частот;

- розробити нестаціонарну скінченноелементну модель скінченного масиву на основі вибраної трикомпонентної локально-резонансної комірки та виконати порівняння його динамічної відповіді з еталонною бетонною моделлю тієї самої геометрії без включень;

- оцінити частотно-вибіркове ослаблення коливань у скінченному масиві та зіставити його з положенням забороненої зони, визначеної для нескінченної періодичної структури, зокрема за коефіцієнтом передачі та вставними втратами, а також дослідити вплив кількості комірок і масштабування конструкції на захисний ефект;

- застосувати апарат нечітких множин і рівневого аналізу на основі редукованої розрахункової моделі для оцінювання впливу невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів на межі, ширину та центральну частоту заборонених зон бетонно-гумових структур;

- сформулювати науково обґрунтовані положення щодо вибору архітектури комірки, геометричного масштабу та матеріальних параметрів бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій для попереднього обґрунтування рішень сейсмічного та вібраційного захисту споруд.

Об'єкт дослідження. Процеси поширення та ослаблення пружних хвиль у неоднорідних періодичних конструкціях будівельного призначення за сейсмічних і техногенних вібраційних впливів.

Предмет дослідження. Закономірності формування заборонених зон і частотно-вибіркового ослаблення коливань у двовимірних бетонно-гумових метаматеріальних конструкціях залежно від архітектури комірки, геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик матеріалів.

Методи дослідження. Методи інформаційного пошуку та аналізу наукових джерел; методи теорії пружності й динаміки деформівних середовищ; метод Флоке–Блоха для аналізу періодичних комірок; метод скінченних елементів для побудови дисперсійних діаграм, визначення заборонених зон і розрахунку нестаціонарної динамічної відповіді; параметричне чисельне моделювання для оцінювання впливу геометричних параметрів; порівняльний аналіз метаматеріального масиву та однорідної бетонної еталонної моделі; методи обробки часових залежностей для визначення коефіцієнтів передачі та вставних втрат; метод матриці переносу, апарат нечітких множин і рівневий аналіз на основі редукованої розрахункової моделі для оцінювання впливу невизначеності матеріальних параметрів.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Розроблено та обґрунтовано єдину чисельну постановку визначення заборонених зон пружних хвиль для двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій фундаментного типу на основі методу скінченних елементів із граничними умовами Флоке–Блоха, що дає змогу порівнювати двокомпонентні та трикомпонентні бетонно-гумові комірки за однаковими критеріями положення та ширини захисного частотного діапазону.

2. Визначено закономірності формування низькочастотної забороненої зони локально-резонансного типу в трикомпонентній бетонно-гумовій метаматеріальній комірці з важким внутрішнім ядром, зумовленої відносним рухом ядра в податливому гумовому прошарку; показано істотне розширення захисного частотного діапазону порівняно з двокомпонентними комірками із суцільним гумовим включенням.

3. Набув подальшого розвитку чисельний метод вибору параметрів двовимірних бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій шляхом

урахування впливу архітектури комірки, площової частки включення та геометричного масштабу структури на межі й ширину забороненої зони, що дає можливість попередньо налаштовувати захисний частотний діапазон.

4. Вперше для досліджуваного класу бетонно-гумових періодичних структур проведено оцінку впливу невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів на межі та ширину заборонених зон із використанням апарату нечітких множин і α-рівневого аналізу на основі редукованої розрахункової моделі; це дає змогу визначати стійкість захисного частотного діапазону до варіації властивостей бетону, гуми і сталі.

5. Набув подальшого розвитку чисельний метод оцінювання захисного ефекту скінченних бетонно-гумових метаматеріальних масивів шляхом зіставлення їхньої динамічної відповіді з однорідною бетонною еталонною моделлю тієї самої геометрії без включень; це дає змогу кількісно характеризувати захисний ефект практичною вхідно-вихідною метрикою ослаблення коливань.

Практичне значення одержаних результатів полягає в наступному:

- обґрунтовано застосування двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій фундаментного та бар’єрного типу як пасивних систем частотно-вибіркового ослаблення сейсмічних і техногенних вібраційних впливів;
- одержано розрахункові залежності для вибору архітектури комірки, площової частки включення, геометричного масштабу та кількості комірок з урахуванням необхідного захисного частотного діапазону;
- запропоновано чисельний метод для оцінки захисного ефекту скінченних бетонно-гумових метаматеріальних масивів шляхом порівняння їхньої динамічної відповіді з однорідною бетонною еталонною моделлю тієї самої геометрії без включень;
- проведено оцінку чутливості заборонених зон до невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів на основі редукованої розрахункової моделі.

Результати роботи можуть бути використані проєктними та науково-дослідними організаціями при виборі параметрів і попередньому обґрунтуванні конструктивних рішень метаматеріальних фундаментів, метабар'єрів і періодичних бетонно-гумових захисних систем для будівель і споруд.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійно виконаним науковим дослідженням, у якому основні наукові положення та результати отримано здобувачем особисто. Здобувачем виконано аналіз сучасного стану досліджень за темою дисертації, сформульовано розрахункові постановки задач, побудовано скінченноелементні моделі двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових періодичних комірок, визначено заборонені зони пружних хвиль із використанням граничних умов Флоке–Блоха, проведено параметричний аналіз впливу архітектури комірки, площової частки включення та геометричного масштабу на захисний частотний діапазон. Здобувачем також виконано моделювання скінченних бетонно-гумових метаматеріальних масивів у часовій області, порівняння їхньої динамічної відповіді з однорідною бетонною еталонною моделлю без включень, обробку часових залежностей для визначення коефіцієнтів передачі та вставних втрат, а також оцінювання впливу невизначеності матеріальних параметрів на характеристики заборонених зон із використанням редукованої розрахункової моделі, апарату нечітких множин і рівневого аналізу. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належать такі результати (згідно зі списком публікацій здобувача):

– у публікації № 1 зі списку праць здобувача здобувачу належать формулювання задачі, оцінювання отриманих результатів та узагальнення підходів до врахування параметричної невизначеності в задачах будівельної механіки;

– у публікації № 3 зі списку праць здобувача здобувачем виконано побудову чисельних моделей двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій, розрахунок заборонених зон, аналіз впливу геометричних

параметрів комірки на положення й ширину захисного частотного діапазону та підготовку висновків щодо застосування таких конструкцій для вібраційного й сейсмічного захисту.

Одноосібну наукову публікацію № 2 зі списку праць здобувача виконано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дослідження. Основні положення дисертаційної роботи Кучина І. О. пройшли апробацію на 6 науково-практичних та міжнародних конференціях: Науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (27–28 березня 2023 р., м. Дніпро); XXXIII науково-практична конференція «Стародубовські читання – 2023» (19 квітня 2023 р., м. Дніпро); Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційні технології забезпечення параметрів комфорту, енергоефективності і екологічності житлових будівель на основі смарт-технологій» (2024 р.); scientific and practical conference «Mathematical modeling and experimental studies of civil and mechanical engineering problems» (28 січня 2025 р., м. Братислава, Словацька Республіка); міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» MPMSPS-2025 (26–28 березня 2025 р., м. Дніпро); XX International Scientific and Practical Conference «Innovative Technologies in Construction, Civil Engineering and Architecture» (2025 р., м. Дніпро).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 наукових праць, із них 3 наукові статті: 1 стаття у виданні, що індексується у міжнародній наукометричній базі Scopus, 2 статті у фахових виданнях України категорії Б, а також 7 праць апробаційного характеру у матеріалах наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Повний обсяг дисертації становить 163 сторінки, з них основний текст 128 сторінок. Робота містить 26 рисунків, 21 таблицю, список використаних джерел зі 119 найменувань та 2 додатки.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Актуальність задачі захисту споруд від сейсмічних та вібраційних впливів

Динамічні впливи на будівлі та споруди охоплюють широкий спектр джерел і частотних діапазонів: землетруси з домінуючими частотами 1–10 Гц, техногенні вібрації від рейкового транспорту і метрополітену у діапазоні 10–200 Гц, промисловий шум і структурні коливання від обладнання у діапазоні до сотень герц. Кожний тип впливу формує специфічні вимоги до системи захисту, і єдиний традиційний метод не дає однаково добрих результатів у всіх діапазонах [1].

Класичні підходи до динамічного захисту умовно поділяються на три категорії. Перша - пасивне підсилення несучих конструкцій підвищенням жорсткості та маси, ефективне за помірних рівнів збудження, але супроводжується суттєвим збільшенням власної ваги. Друга - інерційні системи ізоляції: настроювані масові демпфери, гумо-металеві опори, фрикційні маятники. Теорія настроюваних масових демпферів і методика визначення їхніх оптимальних параметрів детально викладена у класичній монографії Ден Гартога [2]; сучасний огляд стратегій проектування в'язких демпферів для сейсмічного захисту - у [3]. Принциповим обмеженням демпферів є вузькосмуговість: ефективність зосереджена у вузькій смузі поблизу налаштованої частоти і спадає при розстроюванні. Третя категорія - активні і напівактивні системи з виконавчими механізмами, що адаптуються до широкосмугових збурень, але потребують надійного енергопостачання та інфраструктури зворотного зв'язку.

Значущість власних частот, форм коливань і демпфування проявляється також у суміжних задачах оцінювання динамічної вразливості будівельних конструкцій за екстремальних впливів, зокрема під час аналізу механізмів

прогресуючого обвалення після локального пошкодження [4]. Це підкреслює необхідність спеціального динамічного аналізу конструктивних систем поряд із традиційними статичними оцінками.

Альтернативний напрям, що активно розвивається останні два десятиліття, - застосування штучно сконструйованих структур з ефективними механічними властивостями, не характерними для природних матеріалів, відомих як фононні кристали та механічні метаматеріали. Такі структури здатні формувати частотні заборонені зони - діапазони, у яких поширення пружних хвиль ускладнене або відсутнє за рахунок інтерференційного або резонансного механізму, - без активного керування [5, 6]. Перший великомасштабний польовий дослід із сейсмічним метаматеріалом проведено Брюле та ін. [5]: у м'якому ґрунті встановлено масив свердловин, і вимірювання продемонстрували перебудову поля сейсмічної енергії, узгоджену з розрахунками методом скінченних елементів (МСЕ). Систематичний огляд напряму від концепції до інженерних застосувань - у роботах [1, 6, 7].

Двовимірні конфігурації відрізняються від шаруватих одновимірних (1D) систем здатністю фільтрувати хвилі, що поширюються у двох горизонтальних напрямах. Фундаментна конструкція або плита з циліндричними включеннями у регулярному порядку (умовно «волокниста» структура у площині розрізу) є технологічно реалізованим рішенням для сейсмічного і вібраційного захисту окремих будівель. Ефективність шаруватих і двовимірних конфігурацій підтверджена у роботах [8, 9]. Технічний звіт [10] узагальнює напрацювання щодо проектування систем ізоляції на основі матеріалів із забороненими зонами.

Окремий аспект задачі - розсіяння механічних параметрів матеріалів у реальному будівництві. Модуль пружності гуми залежить від рецептури, умов вулканізації, температури; бетон є матеріалом зі значним природним розкидом характеристик. Заборонені зони, обчислені для номінальних значень параметрів, на практиці зміщуються або звужуються, і ця зміна не є малою для

будівельних застосувань. Класичні ймовірнісні методи потребують достатньої статистичної бази; за її відсутності методи нечітких множин дають інструмент роботи з невизначеністю на рівні функцій належності.

Дослідження, представлене в дисертаційній роботі, обмежується таким класом задач: двовимірні (2D) періодичні бетонно-гумові конструкції з циліндричними включеннями для захисту окремих споруд від сейсмічних впливів у діапазоні 1–10 Гц і техногенних вібраційних впливів до сотень герц; ефект на хвильові процеси розглядається у лінійній постановці; вплив невизначеності матеріальних параметрів на характеристики заборонених зон оцінюється методами нечітких множин на основі редукованої розрахункової моделі. Поза межами роботи лишаються нелінійні режими, ефекти взаємодії групи будівель, тривалі реологічні процеси у гумі, а також тривимірні постановки повного масштабу. Огляд літератури охоплює напрями, що формують теоретичний і числовий апарат для зазначеного кола задач.

1.2. Хвильові процеси у дискретних і неоднорідних середовищах: від ланцюжкових моделей до континуальних наближень

Теоретична база для опису хвильових процесів у періодичних і неоднорідних середовищах сформована у роботах з асимптотичних методів механіки і гомогенізації. Монографія Андріанова, Авреєвіча і Данішевського [11] охоплює лінійні і нелінійні задачі поширення хвиль у мікроструктурованих твердих тілах через процедури гомогенізації і асимптотичні наближення. Ці результати дають теоретичну рамку для переходу від мікроскопічного опису неоднорідного середовища до ефективних континуальних рівнянь.

Розглянемо моноатомну пружну решітку як базовий об'єкт. Рівняння руху n-ї маси, з'єднаної пружинами з сусідами, має вигляд

$$m \cdot d^2u_n/dt^2 = \kappa \cdot (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \qquad (1.1)$$

де m - маса елемента решітки, κ - жорсткість пружини, що з'єднує сусідні маси, u_n - переміщення n-ї маси, t - час.

Підстановка хвильового розв'язку $u_n = U \cdot \exp[i(k\,l\,n - \omega\,t)]$ дає точне дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 = (4\,\kappa / m) \cdot \sin^2(k\,l / 2), \tag{1.2}$$

де U - амплітуда хвилі, k - хвильове число, l - крок решітки, ω - кругова частота.

У довгохвильовій границі $k\,l \to 0$ співвідношення (1.2) переходить в акустичну гілку $\omega^2 \approx (\kappa\,l^2 / m) \cdot k^2$, що відповідає одновимірному хвильовому рівнянню з ефективною швидкістю $c_{eff} = l \cdot \sqrt{(\kappa / m)}$. У короткохвильовій границі $k\,l \to \pi$ частота досягає максимального значення $\omega_{max} = 2 \cdot \sqrt{(\kappa / m)}$, і подальше збільшення k не змінює ω, що відповідає утворенню антиперіодичної моди - стоячої хвилі.

Ключова задача - побудова континуального диференціального рівняння, дисперсійний закон якого відтворює (1.2) у всьому діапазоні хвильових чисел, а не лише у довгохвильовій границі. У роботі [12] для цього застосовано двоточковий апроксимант Паде, що поєднує асимптотичні наближення в обох граничних режимах. Загальна теорія апроксимантів Паде у механіці систематизована у [13]; огляди асимптотичних методів і процедур підсумовування рядів - у [14–17].

Дисперсійні властивості двовимірних і двоатомних решіток досліджені у [18]. Для 2D решіток виявлено антиперіодичні моди - стоячі хвилі на краях зони Бриллюена, що не виникають у довгохвильовому наближенні і важливі для розуміння формування заборонених зон на краях зон Бриллюена [18, 19]. Низькочастотні коливання ортотропних решіток з високим контрастом пружних сталих, де виникають режими, що не мають аналогів в однорідних системах, розглянуті у [20].

Сучасним прикладом такого дискретно-континуального переходу є континуалізація двоатомної решітки з узгодженням дисперсійних співвідношень дискретної та неперервної моделей за допомогою апроксимантів Паде [21]; отримана стійка система вищого порядку з модифікованою інерцією доповнює наведену лінію континуальних наближень.

Гомогенізація неоднорідних середовищ ґрунтується на двомасштабному розкладанні. Поле переміщень шукається у вигляді

$$u(x, t) = u_0(x, X, t) + \varepsilon \cdot u_1(x, X, t) + \varepsilon^2 \cdot u_2(x, X, t) + \ldots, \qquad (1.3)$$

де x - повільна (макроскопічна) координата, $X = x / \varepsilon$ - швидка координата, $\varepsilon = l / L$ - малий параметр (l - період комірки, L - характерний макроскопічний масштаб), u_0, u_1, u_2 - коефіцієнти асимптотичного ряду.

Підстановка (1.3) у рівняння теорії пружності і збирання членів за порядками ε дає послідовність крайових задач на комірці, з яких визначаються ефективні коефіцієнти. Класичний апарат двомасштабної гомогенізації систематизований у фундаментальних монографіях [22–24]; вищепорядкова гомогенізація для динамічних задач - у [25]; поліпшені континуальні моделі для дискретних середовищ - у [26]. Метод високочастотної гомогенізації з розкладанням поблизу антиперіодичної точки $k = \pi / l$ дає аналітичні наближення в околі меж заборонених зон [27, 28].

При проходженні імпульсного збудження через дискретну або шарувату мікронеоднорідну структуру виникають локальні просторові максимуми переміщень і деформацій, амплітуда яких може перевищувати відповідні значення в однорідному середовищі. Цей ефект перерозподілу енергії між елементами регулярної структури аналітично розглянутий у [12] для напівнескінченної решітки; показано, що при поширенні хвильового пакету внутрішні сили, що виникають у дискретних зв'язках, можуть значно перевищувати амплітуду початкового збудження. Подібні ефекти у

волокнистих композитах з недосконалою міжфазною адгезією і в умовах нелінійних і в'язкопружних взаємодій - у [29, 30].

Гомогенізація 1D неоднорідних динамічних задач з нелінійними ефектами і впливом мікроструктури - у [31]. Вібрації механічних систем із регулярною структурою, включаючи аналітичні методи для гратчастих і циклічно-симетричних систем, систематизовані у монографії [32]. Цей масив результатів формує теоретичний апарат, який буде використано в подальших розділах для опису хвильових процесів у 2D неоднорідних конструкціях.

1.3. Фононні кристали: фізика заборонених зон і ключові механізми

Фононні кристали - штучні структури з просторово-періодичним розподілом пружних властивостей і густини, у яких поширення пружних та акустичних хвиль описується теоремою Блоха–Флоке, запозиченою з фізики твердого тіла [33]. Згідно з цією теоремою, у періодичному середовищі розв'язки рівнянь руху мають вигляд

$$u(x + a, t) = u(x, t) \cdot \exp(i\, k \cdot a), \tag{1.4}$$

де x - просторова координата, a - вектор трансляції періодичної структури, k - вектор Блоха в першій зоні Бриллюена.

Співвідношення (1.4) дозволяє замінити аналіз нескінченної структури задачею для одиничної комірки з фазовими граничними умовами на протилежних гранях. Фундаментальна теорія хвиль у дискретних гратчастих структурах закладена у класичній монографії Бриллюена [33], а динамічна теорія кристалічних решіток - у монографії Борна і Хуана [34].

Піонерські роботи Кушвахи та ін. [35] і Сігаласа та Економу [36] (1992–1993 рр.) методом плоских хвиль розрахували зонну структуру пружних хвиль у двовимірних масивах циліндричних включень і встановили існування повних заборонених зон для певних поєднань матеріалів. Розгорнутий огляд

фізики, методів розрахунку і застосувань 2D фононних кристалів - у [37]; монографії [38–40] систематизують теорію і практику фононних кристалів і акустичних метаматеріалів. Сучасний стан напряму та орієнтири розвитку поля представлені у роботі [41].

Класичний механізм формування заборонених зон - брегґівське розсіяння. Заборонена зона виникає за умови конструктивної інтерференції хвиль, відбитих від сусідніх неоднорідностей: при $\lambda \approx 2\,a$, де a - період структури, λ - довжина хвилі. Звідси характерна частота брегґівської забороненої зони

$$f_{Bragg} \approx c_{eff} / (2\,a), \qquad (1.5)$$

де c_{eff} - ефективна швидкість хвилі в композитному середовищі, a - період структури.

Ширина зони визначається акустичним контрастом між компонентами: чим більше відношення хвильових імпедансів $\rho_1 c_1 / (\rho_2 c_2)$, тим ширша заборонена зона. Для системи бетон–гума акустичний контраст є великим за рахунок різниці модулів пружності на кілька порядків (модуль пружності бетону на п'ять порядків перевищує модуль пружності гуми), що забезпечує помітні заборонені зони вже при помірних площових частках включення. Конкретні значення параметрів, прийнятих у дисертаційному дослідженні, наведені у розділі, присвяченому числовому моделюванню.

Дисперсійна діаграма - залежність частоти від хвильового вектора у першій зоні Бриллюена - є основним інструментом аналізу фононних кристалів. Для 1D шаруватих структур метод матриці переносу [42] дає аналітичний розв'язок у замкненому вигляді; класичний підхід Міда для 1D і квазі-1D систем - у [43]. Комплексні дисперсійні діаграми, де хвильове число є комплексним, дають коефіцієнт просторового загасання всередині забороненої зони і дозволяють оцінити необхідну кількість комірок для заданого рівня ізоляції у скінченній конструкції [44, 45].

Окремий напрям - фононні кристали з градієнтом параметрів, у яких геометрія або матеріальні властивості плавно змінюються вздовж координати. У таких системах виникає ефект «веселкового захоплення» [46, 47]. У дисертаційній роботі градієнтні структури не розглядаються; згадка наведена для повноти контексту.

1.4. Двовимірні фононні кристали з циліндричними включеннями: типи, геометрія, матеріальний контраст

Двовимірні фононні кристали з циліндричними включеннями утворюють основний клас структур, що розглядається в дисертаційній роботі. У базовій постановці нескінченно довгі циліндричні включення розміщуються у бетонній матриці у регулярному порядку (квадратному, гексагональному або шаховому); задача аналізу зонної структури формулюється як плоска. Матеріальний контраст і площова частка включень визначають ширину і положення заборонених зон. Для пари бетон–гума контраст за модулем пружності становить кілька порядків, що дозволяє формувати помітні заборонені зони вже при помірних площових частках [35, 37].

Розглянуто три архітектури включень. Перша - суцільне гумове включення у бетонній матриці. Реалізує переважно бреґґівський механізм за рахунок акустичного контрасту бетон–гума. Залежність положення і ширини заборонених зон від геометрії комірки, площової частки включень та типу матеріального контрасту досліджувалась у [48, 49]; зі збільшенням площової частки нижня межа знижується, тоді як ширина зони має максимум при певній проміжній частці, значення якої залежить від типу ґрати і обчислюється числово.

Друга - порожнисте циліндричне включення (порожнина у бетонній матриці). Цю конфігурацію розглядали як технологічно простішу альтернативу. У ряді числових досліджень [50, 51] встановлено, що при близьких геометричних параметрах гумові включення дають ширші

заборонені зони порівняно з порожнинами, оскільки в'язкопружне поглинання у гумі додатково загасає хвилі, тоді як порожнина працює лише як геометричний відбивач.

Третя - трикомпонентна комірка: бетон + гумова оболонка + важке (зазвичай стальне) ядро. Ця конфігурація відповідає принципу локально-резонансних метаматеріалів, започаткованому в роботі Лю та ін. [52]. Резонансна частота включення залежить від маси ядра і ефективної жорсткості гумової оболонки і визначає положення низькочастотної забороненої зони. Трикомпонентна архітектура дозволяє переміщати першу заборонену зону до нижчих частот, ніж у бреґґівському механізмі, при тих самих розмірах комірки. Систематичне порівняння двокомпонентної і трикомпонентної архітектур за критерієм «положення і ширина забороненої зони відносно загальної маси конструкції» в опублікованій літературі представлене обмежено - переважно у вигляді окремих числових експериментів для конкретних геометрій. Це формує одне з відкритих питань, яке розглядається в наступних розділах дисертаційної роботи.

Схема розміщення включень - квадратна, гексагональна, шахова - впливає на симетрію першої зони Бриллюена і кількість заборонених зон. Гексагональні і шахові схеми дають більш ізотропний відгук завдяки кругловидній першій зоні Бриллюена [37]. Розмір комірки a задає цільовий частотний діапазон через співвідношення (1.5). Для бреґґівського механізму при швидкості хвилі $c_{eff} \approx 2000–3000$ м/с діапазон 50–500 Гц відповідає характерним розмірам комірки приблизно 2–30 м, що для нижніх частот діапазону є непрактично великим. Зменшення розмірів комірки до технологічно зручних 0.5–3 м для тих самих частот можливе лише за рахунок зниження ефективної швидкості хвилі у висококонтрастній бетонно-гумовій системі або за рахунок переходу до локально-резонансного механізму, не пов'язаного з геометричним періодом структури [53, 54].

Числове проектування і оптимізація 2D комірок розглянуті у [55] (топологічна оптимізація на основі генеративних змагальних мереж), [50]

(оптимальне проектування бетонно-гумових конфігурацій на основі аналітичних наближень для меж заборонених зон) і [51] (нові композитні конфігурації з нетиповими зонами загасання). Більшість цих робіт фіксує одну архітектуру включення і варіює лише геометрію або площову частку; систематичне порівняння архітектур за єдиним критерієм оцінки залишається відкритим.

1.5. Локально-резонансні метаматеріали і субхвильові заборонені зони

Принциповий крок у напрямі низькочастотного захисту пов'язаний з роботою Лю та ін. [52]. У ній продемонстровано формування забороненої зони на частотах, що приблизно на два порядки нижчі за брегґівські для тих самих розмірів комірки. Структура складалася з масиву свинцевих куль, вкритих шаром м'якої гуми і вбудованих у матрицю з епоксидної смоли. Заборонену зону виявлено в околі 400–1000 Гц, тоді як за брегґівським механізмом вона мала б формуватися на частотах порядку десятків кілогерц. Ефект є наслідком локального резонансу включення.

Спрощена скалярна модель локального осцилятора розглядає включення як точкову масу, з'єднану з матрицею через ефективну пружину. Резонансна частота такого осцилятора визначається співвідношенням

$$f_{res} = (1 / 2\pi) \cdot \sqrt{(k / m)}, \tag{1.6}$$

де m - маса ядра включення, k - ефективна жорсткість гумової оболонки, f_{res} - резонансна частота локального осцилятора.

У рамках цієї спрощеної моделі ефективна динамічна маса метаматеріалу залежить від частоти за співвідношенням

$$m_{eff}(\omega) = m_0 + m \cdot \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2), \tag{1.7}$$

де m_0 - статична маса елемента комірки матриці, m - маса резонуючого ядра, ω - кругова частота збудження, $\omega_0 = 2\pi \cdot f_{res}$ - кругова резонансна частота.

Модель (1.7) недемпфована і не враховує безпосередній зв'язок резонатора з періодичною структурою, отже придатна для якісного пояснення механізму. У смузі частот ω трохи вище ω_0 величина $m_{eff}(\omega)$ набуває від'ємних значень: при від'ємній ефективній масі зміщення відгуку стає протилежним за напрямом до зовнішньої сили, що формує умови для забороненої зони. Строге виведення зонної структури локально-резонансних метаматеріалів з урахуванням взаємодії резонатора з матрицею і демпфування представлено у [52, 56, 57]; у дисертаційній роботі обчислення проводяться методом скінченних елементів з умовами Флоке–Блоха для повної континуальної моделі, що не потребує спрощень типу (1.7).

Збільшення маси ядра m знижує резонансну частоту через (1.6), що дозволяє формувати низькочастотну заборонену зону без збільшення розмірів комірки [56, 57]. Метаматеріали з ультранизькочастотними забороненими зонами і їх потенціал для захисту від наднизьких частот розглянуті у [57] (показано, що заборонена зона нульової частоти у сейсмічних метаматеріалах реалізується за певних умов фіксації структури і потребує уточненої інтерпретації порівняно з класичним бреґґівським механізмом); «заземлені» метаматеріали з ультранизькочастотними забороненими смугами - у [58]. Великомасштабні механічні метаматеріали для сейсмічного захисту, що поєднують бреґґівський і локально-резонансний механізми, з числовим аналізом поверхневих і об'ємних хвиль у 3D - у [59].

Природний аналог локально-резонансного механізму виявлено у лісових масивах: у [60] встановлено, що стовбури дерев як вертикальні резонатори взаємодіють з поверхневими хвилями Релея, формуючи заборонені зони в околі 30–45 Гц і 90–110 Гц. Пасивний метабар'єр, що конвертує поверхневі хвилі в об'ємні через локальний резонанс мас на еластомерних пружинах, запропонований у [61]; широкосмугові метабар'єри для поверхневих хвиль - у [62, 63].

Локально-резонансний механізм є основним інструментом для досягнення низькочастотного захисту в технологічно зручних розмірах конструкції; для трикомпонентної бетонно-гумової комірки з важким ядром цей механізм реалізується природним чином і визначає поведінку структури в сейсмічному діапазоні частот. Метаматеріали з активно керованими параметрами заборонених зон [64] виходять за межі дисертаційної роботи, що зосереджена на пасивних 2D конструкціях.

1.6. Числові методи розрахунку зонних діаграм: МСЕ з умовами Флоке–Блоха

Для 2D фононних кристалів з довільною геометрією комірки використовується метод скінченних елементів (МСЕ) з граничними умовами Флоке–Блоха, реалізований у пакетах типу COMSOL Multiphysics. Граничні умови Блоха зв'язують поле переміщень на протилежних гранях одиничної комірки через фазовий множник, що випливає з (1.4).

Дискретизація рівнянь теорії пружності для одиничної комірки приводить до узагальненої задачі на власні значення вигляду

$$[K(k) - \omega^2 M] \cdot u = 0, \qquad (1.8)$$

де K(k) - матриця жорсткості, що залежить від хвильового вектора k через граничні умови Блоха, M - матриця мас, u - вектор вузлових переміщень одиничної комірки, ω - власна частота.

Хвильовий вектор k перебирається вздовж контуру незвідної зони Бриллюена (Г–Х–М–Г для квадратної ґратки); для кожного k знаходять власні частоти $\omega_j(k)$. Залежність $\omega_j(k)$ дає дисперсійну діаграму; ділянки без гілок для реальних k відповідають забороненим зонам.

Як числовий метод, МСЕ дає наближений розв'язок, що залежить від типу і густини скінченноелементної сітки, порядку інтерполяції та точності

формулювання граничних умов; перед параметричними дослідженнями потрібна перевірка збіжності розв'язку при подрібненні сітки і збільшенні порядку елементів. Для верифікації проводиться розрахунок скінченної системи під широкосмуговим збудженням у часовій області і порівнюється частотний спектр загасання з обчисленими забороненими зонами [65, 66].

Поза задачами зонного аналізу метод скінченних елементів застосовують і до інших складних задач будівельної механіки - зокрема до моделювання контактної взаємодії конструкції з основою та аналізу напружено-деформованого стану складних конструктивних систем [67]. У суміжних задачах прикладної механіки МСЕ також використовується для аналізу динамічної поведінки тонкостінних елементів з дефектами [68]; такі застосування підтверджують придатність методу для широкого класу конструктивних задач за умови контролю постановки, сітки та параметрів моделі.

Альтернативний підхід - метод плоских хвиль - розкладає поле і матеріальні параметри у ряди Фур'є. Для систем з великим матеріальним контрастом (зокрема бетон–гума) метод вимагає значної кількості гармонік для збіжності, що ускладнює його практичне застосування у досліджуваних конфігураціях. МСЕ не має таких обмежень за рахунок матеріального контрасту і застосовний для довільної геометрії комірки. Метод матриці переносу залишається ефективним для 1D шаруватих систем [42] і використовується для верифікації граничних випадків.

Комплексні дисперсійні діаграми, де хвильове число є комплексним, дають уявну частину хвильового числа - коефіцієнт просторового загасання - всередині забороненої зони. Порівняльний аналіз методів розрахунку комплексних дисперсійних кривих - у [44, 45]. Аналіз хвиль у фононних кристалах з повільно змінними геометрією і матеріалами - у [69]; робастна оптимізація зон загасання 3D рамних структур - у [70]; хвилі у 1D моно-зв'язних локально-періодичних структурах - у [66].

Окремої уваги потребує врахування демпфування, наявного в реальних матеріалах. Узагальнена теорія блохівських хвиль у пружних середовищах з демпфуванням, що включає в'язкі та в'язкопружні моделі, систематично розроблена у роботах Хуссейна і Фрейзера [71, 72]. Перехід від ідеального недемпфованого стану до системи з в'язкопружним демпфуванням трансформує чисто теоретичну заборонену зону у зону загасання з кінцевим коефіцієнтом, причому вплив демпфування на ширину зони якісно різний для бреґґівських і локально-резонансних структур [73]. Це робить розрізнення двох понять - заборонена зона (для нескінченної ідеальної структури) і зона загасання (для скінченної реальної конструкції з демпфуванням і граничними умовами) - методологічно важливим для коректної інтерпретації числових результатів.

Для задач з невизначеністю матеріальних параметрів числовий аналіз зонних діаграм поєднується з методами інтервального або нечіткого аналізу. Підхід «фононний кристал + взаємодія рідини зі структурою + гібридна невизначеність» для оцінки чутливості заборонених зон реалізований у [74]. Поширення таких підходів на 2D бетонно-гумові конструкції в опублікованій літературі представлене у обмеженому обсязі.

1.7. Застосування 2D метаматеріальних конструкцій для захисту споруд

Перенесення принципів фононних кристалів у геотехнічний масштаб для захисту від сейсмічних впливів розглянуте в оглядових роботах [75–77]. Перший великомасштабний польовий дослід [5] і огляди стану досліджень [78] показують принципову здійсненність метаматеріального підходу для модифікації поля сейсмічних хвиль у м'яких ґрунтах.

Концепція «метаматеріального фундаменту» - виконання фундаментної плити як 2D або трикомпонентно-періодичної структури з чергуванням матеріалів - відрізняється від традиційних систем базової ізоляції за

принципом дії. Замість зниження власної частоти ізольованої споруди фундамент формує заборонену зону у потрібному частотному діапазоні і блокує передачу відповідних хвиль. Технічний звіт [10] узагальнює напрацювання щодо проектування таких систем; перші систематичні числові оцінки 1D, 2D і 3D конфігурацій - у [48, 49].

Сейсмічні хвилі мають об'ємні (P, S) і поверхневі (Релея, Лява) компоненти; кожна компонента взаємодіє з періодичною структурою по-своєму. Метаматеріали для поверхневих хвиль Релея на основі вертикальних резонаторів і колон у ґрунті досліджені у [60–63]; чисельне і експериментальне дослідження часткового занурення метаматеріальних включень у ґрунт - у [79, 80]. У дисертаційній роботі розглядаються плоскі постановки задачі теорії пружності у постановці плоскої деформації, що описують поширення зв'язаних поздовжньо-зсувних (P–SV) хвиль у вертикальному перерізі фундаменту; постановки для поверхневих хвиль і повна 3D задача залишаються поза межами дослідження.

Числові дослідження 2D конфігурацій метаматеріального фундаменту під реальними сейсмічними записами виконані у [50, 81, 82]. Більшість цих робіт використовує номінальні значення матеріальних параметрів і не аналізує системно вплив їхньої невизначеності на ефективність захисту. Демпфування шарів і його роль у формуванні зон загасання у шаруватих фундаментах - у [83]. Метаматеріальний фундамент із повторюваними круговими розсіювачами зі сталі та свинцю у гумовій матриці, що забезпечує низькочастотну зону загасання приблизно 2.6–7.8 Гц, представлений у [84]. Пальові фундаменти з вбудованими резонаторами - у [85]; сейсмічна ізоляція ядерних споруд при взаємодії ґрунт–фундамент–споруда - у [86].

Більшість зазначених робіт обмежена однією конкретною конфігурацією комірки (часто двокомпонентною) і фіксованим набором матеріалів; систематичне порівняння двокомпонентної і трикомпонентної архітектур у єдиній постановці залишається обмежено представленим. Цей

напрям становить одне з відкритих питань, що розглядається у наступних розділах дисертаційної роботи.

Техногенні вібрації від рейкового транспорту охоплюють діапазон 1–200 Гц і є джерелом дискомфорту у міських будівлях [87–89]. Передача вібрацій через ґрунт на фундаменти сусідніх споруд збуджує резонансні коливання перекриттів і стін у діапазоні 40–100 Гц. Метаматеріальні підходи для захисту від залізничних вібрацій - у [87–89]. Огляд ретрофітингу існуючих будівель із застосуванням ізоляційних принципів - у [75]. Експериментальні дослідження фундаментних систем з вбудованими п'єзоелектричними шарами для одночасної ізоляції і збору енергії - у [90].

Окремо стоїть питання граничних умов і їхнього впливу на ефективність захисту. У реальному фундаменті з боку ґрунту реалізується умова часткового відбиття/проходження, з боку надбудови - динамічна взаємодія з масою і жорсткістю споруди. Кожна з цих умов модифікує спектр відбиття і трансмісії порівняно з ідеальним випадком безмежної структури або вільної межі. Систематичний аналіз впливу типу граничних умов на характеристики 2D періодичних фундаментів представлений у [78, 79, 86]; для цілей дисертаційної роботи використовуються наближені граничні умови, придатні для оцінювання вхідно-вихідної динамічної відповіді скінченного масиву; повна взаємодія ґрунт–фундамент–споруда не є предметом цієї роботи.

При перенесенні результатів з ідеальних нескінченних періодичних моделей на реальні скінченні фундаменти важливо розрізняти теоретичну заборонену зону нескінченної структури і фактичну зону загасання у скінченній конструкції з демпфуванням і реальними граничними умовами). Ці поняття збігаються в ідеальних умовах, але можуть розходитися у реальних інженерних задачах, що вимагає поряд з аналізом нескінченних структур моделювання скінченних систем і верифікації у часовій області [71, 72, 78]. Питання масштабного переходу від лабораторних і малоформатних експериментальних моделей до повномасштабних інженерних конструкцій також залишається активним напрямом досліджень [79, 80]. Положення

забороненої зони є орієнтиром для очікуваного частотно-вибіркового ослаблення у скінченному масиві, але не вичерпує всіх механізмів формування вставних втрат (insertion loss, IL).

1.8. Невизначеність матеріальних параметрів і методи нечітких множин

Заборонені зони фононних кристалів безпосередньо залежать від модулів пружності та густин компонентів. У реальному будівництві ці параметри не є фіксованими: модуль пружності гуми залежить від рецептури, умов вулканізації і температури, бетон є матеріалом зі значним природним розкидом характеристик. Як наслідок, заборонена зона, обчислена для номінальних значень параметрів, на практиці зміщується або звужується. Якщо очікуване зміщення меж зони перевищує необхідну смугу захисту, конструкція може не виконати свою функцію у цільовому діапазоні. Кількісна оцінка цього ефекту є необхідною умовою інженерного проектування метаматеріальних конструкцій.

Практична сторона цієї проблеми пов’язана з тим, що нормативні та проектні характеристики бетону можуть відрізнятися від фактичних властивостей матеріалу в експлуатованій конструкції; тому в будівельній практиці розвиваються методи оцінювання фізико-механічних характеристик бетону, зокрема механічні неруйнівні методи контролю [91]. Для бетонно-гумових метаматеріальних структур це додатково обґрунтовує розгляд пружних характеристик і густин компонентів не лише як номінальних величин, а і як параметрів з можливим розкидом.

Класичний підхід до оцінки впливу розсіяння параметрів - ймовірнісні методи, представлені у монографіях Болотіна [92, 93] і Августі, Баратти, Казіаті [94]. Ці методи потребують функцій розподілу параметрів. Для нових класів матеріалів і нетипових режимів експлуатації статистичні дані можуть

бути обмеженими або відсутніми; у такому випадку накладання припущення про закон розподілу не є коректним.

Альтернативу пропонує теорія нечітких множин Заде [95]. Невизначеність описується функцією належності, яка не вимагає знання закону розподілу і будується з експертних оцінок або нормативних допусків. Найпростіша і найбільш поширена в інженерних задачах форма - трикутна функція належності

$$\mu(x) = \max\{0,\ 1 - |x - x_0| / \Delta\}, \tag{1.9}$$

де x - значення параметра, x_0 - номінальне значення параметра, Δ - півширина допуску, μ(x) - функція належності, що набуває значень у діапазоні від 0 до 1.

Підхід α-рівнів дозволяє виконувати арифметичні операції з нечіткими числами. Для нечіткої множини A з функцією належності $\mu_A(x)$ та заданого рівня α відповідний α-рівень визначається як

$$[A]_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \tag{1.10}$$

де A - нечітка множина, $\mu_A(x)$ - її функція належності, α - рівень довіри (число у діапазоні від 0 до 1), $[A]_\alpha$ - α-рівнева множина (інтервал).

Обчислення з нечіткими числами зводиться до інтервальних обчислень для кожного α. Основи теорії нечітких множин і теорії можливостей систематизовані у монографії Дюбуа і Прада [96]. Суміжний підхід грубих множин запропонований Павляком [97].

Застосування нечітких множин у задачах будівельної механіки та оптимального проектування з нечіткими навантаженнями і нечіткими власними частотами розглянуто у [98–100]. Структурна оптимізація в умовах невизначеності - у монографіях Банічука [101] і Банічука та Нейттаанмякі [102]. Методи нечіткого програмування - у [103]. Застосування методу динамічного програмування Беллмана–Дрейфуса [104] для задач

оптимального проектування з нечіткими параметрами і практичні приклади - у [105] (циліндричні оболонки) та [106] (нелінійні коливання передпружиненої залізобетонної балки). Огляд сучасної філософії безпеки і надійності конструкцій з включенням підходів до невизначеності - у [107]. Метод поєднання анти-оптимізації з нечітким аналізом - у [108]; класичні монографії Кофмана [109] і Меджіда [110] як методичне підґрунтя.

Безпосередньо методичне підґрунтя для застосування нечітких множин у задачах дисертаційної роботи закладено у [111]. Розглянуто задачі з нечіткими навантаженнями, нечіткими власними частотами і змішаною нечітко-випадковою невизначеністю; продемонстровано, що при коефіцієнті нечіткості 20 % відхилення оптимального об'єму конструкції від детермінованого значення становить близько 1.23 % за центральним методом і 2.13 % за методом [103], а для змішаної нечітко-випадкової постановки досягає 22 % залежно від сценарію. Ці результати показують, що нечітка невизначеність помірного рівня дає помірний вплив на оптимальні параметри детермінованих задач, але цей вплив посилюється при поєднанні з ймовірнісною невизначеністю.

Застосування нечітких множин до оцінювання впливу невизначеності фізико-механічних параметрів на характеристики заборонених зон бетонно-гумових структур в опублікованій літературі залишається обмежено представленим; загальні підходи до врахування невизначеності у фононних кристалах наведено у [74] (гібридна невизначеність) і [70] (робастна оптимізація рамних структур). У дисертації це питання розглядається на основі редукованої розрахункової моделі, придатної для кількісної оцінки чутливості меж заборонених зон до варіації властивостей матеріалів, а не як повний двовимірний скінченноелементний нечіткий аналіз.

1.9. Висновки до розділу 1

На підставі аналізу опублікованої наукової літератури зроблено такі узагальнюючі висновки.

1. Теоретична база для опису хвильових процесів у періодичних і неоднорідних середовищах сформована роботами [11, 12, 18–20, 22] у галузі дискретних ланцюжкових моделей, методів вищепорядкового наближення на основі апроксимантів Паде [13–16] і вищепорядкової гомогенізації [23–25, 27, 28]. Ефекти просторового перерозподілу енергії у регулярних структурах при імпульсному збудженні [12, 29, 30] формують теоретичне підґрунтя для аналізу нестаціонарних режимів у дискретних 2D моделях.

2. Двовимірні фононні кристали з циліндричними включеннями [35–37, 48, 49] забезпечують два механізми формування заборонених зон: бреґґівське розсіяння (суцільні гумові або порожні включення) і локальний резонанс (трикомпонентна комірка з важким ядром [52]). Опубліковані дослідження переважно зосереджені на одній архітектурі включення; систематичне порівняння двокомпонентної і трикомпонентної архітектур у єдиній постановці представлене обмежено.

3. МСЕ з умовами Флоке–Блоха [65, 66] є основним числовим методом розрахунку зонних діаграм 2D фононних кристалів; як числовий метод вимагає перевірки збіжності за сіткою і верифікації результатів у часовій області. Метод матриці переносу [42, 43] ефективний для 1D шаруватих систем і застосовується для перевірки граничних випадків. Врахування в'язкопружного демпфування [71–73] трансформує теоретичну заборонену зону у фактичну зону загасання, що робить розрізнення забороненої зони і зони загасання методологічно важливим.

4. Застосування 2D метаматеріальних конструкцій для сейсмічного і вібраційного захисту досліджене теоретично і чисельно у [5, 48–50, 75–78, 81–84]. У більшості робіт використовуються номінальні значення матеріальних

параметрів; систематичний аналіз впливу їхньої невизначеності на ефективність захисту представлений у обмеженому обсязі.

5. Методи нечітких множин [95, 96, 98–100, 111] придатні для опису невизначеності матеріальних параметрів у задачах механіки за умов обмеженої статистичної бази. У дисертації їх застосовано для кількісної оцінки чутливості меж заборонених зон бетонно-гумових структур до невизначеності матеріальних параметрів на основі редукованої розрахункової моделі; повний двовимірний нечіткий скінченноелементний аналіз залишається напрямом подальших досліджень.

6. Аналіз літератури виявив такі відкриті питання, що визначають задачі дисертаційного дослідження: систематичне порівняння двокомпонентної і трикомпонентної архітектур 2D бетонно-гумової комірки в єдиній постановці; перехід від 1D дискретних ланцюжкових моделей до 2D фононних кристалів з циліндричними включеннями з аналізом ефектів перерозподілу енергії; оцінка зв’язку між забороненою зоною нескінченної структури та частотно-вибірковим ослабленням у скінченному масиві; оцінювання чутливості меж заборонених зон до невизначеності матеріальних параметрів на основі редукованої розрахункової моделі; демонстрація застосовності 2D підходу для частотних діапазонів сейсмічного і техногенно-вібраційного захисту з відповідним масштабуванням геометрії і матеріалів. Урахування матеріального демпфування та повної взаємодії з ґрунтом і надбудовою залишається напрямом подальшого уточнення.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНА БАЗА ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

2.1. Загальна теорія хвиль у періодично-неоднорідних середовищах

Цей розділ формує математичний апарат, на якому ґрунтується подальший аналіз. Якщо в розділі 1 теоретичні підходи здебільшого названо й систематизовано, то нижче відповідні рівняння записуються в явному вигляді, розгортаються у власні задачі та інтерпретуються стосовно конкретного об’єкта дослідження - бетонно-гумових періодичних конструкцій для захисту споруд від сейсмічних і вібраційних впливів. Базовою фізичною моделлю є поширення пружних антиплоских (зсувних) хвиль крізь двовимірне середовище з періодично розташованими неоднорідностями.

Розгляньмо нескінченне пружне середовище, фізичні властивості якого змінюються періодично у площині x_1x_2. Для антиплоского зсуву єдиною ненульовою компонентою переміщення є зміщення u у напрямі, поперечному до площини x_1x_2. Рівняння руху неоднорідного середовища в загальній формі записується так:

$$\nabla_x \cdot [\mu(x) \cdot \nabla_x u] = \rho(x) \cdot \partial^2 u / \partial t^2 \qquad (2.1)$$

де $x = x_1e_1 + x_2e_2$ - радіус-вектор; e_1, e_2 - орти декартової системи; $\nabla_x = (\partial/\partial x_1)e_1 + (\partial/\partial x_2)e_2$; $\mu(x)$ - модуль зсуву; $\rho(x)$ - масова густина.

Унаслідок неоднорідності коефіцієнти $\mu(x)$ і $\rho(x)$ є кусково-сталими функціями координат: $\mu(x) = \mu_s$, $\rho(x) = \rho_s$ для $x \in \Omega_s$, де індекс s нумерує компоненти (матрицю та включення). Оскільки $\mu(x)$, $\rho(x)$ лише кусково-неперервні, функцію u, що задовольняє рівняння (2.1), слід трактувати як узагальнений (слабкий) розв’язок [19]. Еквівалентно модель (2.1) можна

подати двома рівняннями зі сталими коефіцієнтами (для матриці та для включень) з умовами ідеального зчеплення на межі поділу; для подальших викладок зручніша компактна форма (2.1).

Антиплоску (SH) постановку використовують як аналітично прозору скалярну модель: вектор переміщення має єдину ненульову компоненту $u(x_1, x_2, t)$, що задовольняє рівняння (2.1), завдяки чому базові дисперсійні співвідношення вдається вивести й проінтерпретувати у замкненому вигляді (підрозділи 2.2, 2.5). Повну числову модель розділу 3 виконують у постановці плоскої деформації з векторним полем переміщень (u_1, u_2); SH-модель пояснює механізм формування зон, але не є самостійним еталоном для цієї векторної постановки.

Сенс дисперсійного співвідношення $\omega = \omega(k)$ полягає в розбитті частотної осі на смуги пропускання та непропускання. У смузі пропускання кожній частоті відповідає дійсне хвильове число, тож хвиля поширюється без згасання; у смузі непропускання (забороненій зоні) дійсних розв'язків немає, хвильове число стає комплексним, а амплітуда хвилі експоненційно спадає вглиб структури - хвиля є нерозповсюдною (еванесцентною). Саме існування заборонених зон, де поширення коливань пригнічене, є фізичною основою віброзахисту: конструкцію проєктують так, щоб цільовий частотний діапазон збурень (сейсмічних або техногенних) потрапляв у заборонену зону. Класичний апарат такого аналізу - зонна теорія періодичних структур [33].

Поширення хвиль у періодичних структурах описують методом Флоке–Блоха. Метод названо за теоремами Флоке (1883) [112] і Блоха (1928) [113], докладно викладено у класичній монографії Бриллюена [33] та у монографії [11]. Фізичний зміст підходу полягає в такому: розв'язок подають як ефективну хвилю, помножену на функцію-модуляцію, що описує вплив мікроструктури. Просторова періодичність середовища накладає відповідні умови періодичності на функцію-модуляцію, що зводить задачу до власної та дозволяє визначити дисперсійні співвідношення між частотою та хвильовим

числом. Згідно з цим методом, розв’язок рівняння (2.1) з періодичними коефіцієнтами шукають у формі

$$u = F(x)\cdot exp[-i(K_1x_1 + K_2x_2)]\cdot exp(i\omega t) \quad (2.2)$$

де F(x) - функція з тим самим періодом, що й μ(x), ρ(x); множник exp[−i(K₁x₁ + K₂x₂)] описує фазовий зсув на одному періоді; ω - колова частота; K₁, K₂ - компоненти хвильового вектора.

Для одновимірної ілюстрації періодичність F(x) безпосередньо означає, що поле зсувається на сталий фазовий множник при переході до сусідньої комірки [11]:

$$u(x + l) = u(x)\cdot exp(-ik) \quad (2.3)$$

де l - розмір комірки; k - безрозмірна компонента хвильового вектора, k = K·l; для квадратної комірки l = a; для антиперіодичних умов знак множника змінюється: u(x + l) = −u(x)·exp(−ik).

Саме співвідношення (2.3) є записом анзацу Флоке–Блоха, який у розділі 1 згадувався лише як інструмент; тут воно стає робочим рівнянням для побудови власної задачі.

Сукупність допустимих хвильових векторів вичерпується першою зоною Бриллюена. Тут і далі в теоретичних викладках розрізняємо розмірні компоненти хвильового вектора K_i [м$^{-1}$] та безрозмірні $k_i = K_i\cdot a$, де a - крок ґратки; дискретні дисперсійні співвідношення нижче використовують безрозмірні компоненти k_i. Для квадратної ґратки перша зона Бриллюена є квадратом $-\pi \le k_1, k_2 \le \pi$. Через симетрію квадрата достатньо обчислити спектр на межі незвідної частини зони - трикутнику з вершинами Γ(0, 0), X(π, 0) та M(π, π). Маршрут Γ → X → M → Γ використано як стандартну перевірку за напрямами високої симетрії (рис. 2.2).

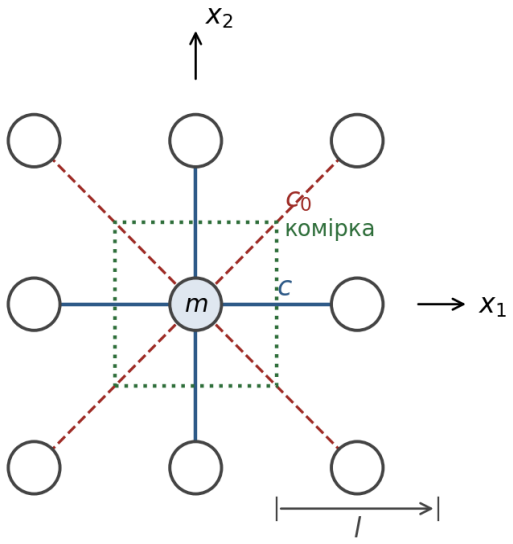

Рисунок 2.1 - Квадратна ґратка з одночастинковою коміркою: m - маса частинки; c - жорсткість ортогональних зв’язків; c_0 - жорсткість діагональних зв’язків; l - крок ґратки

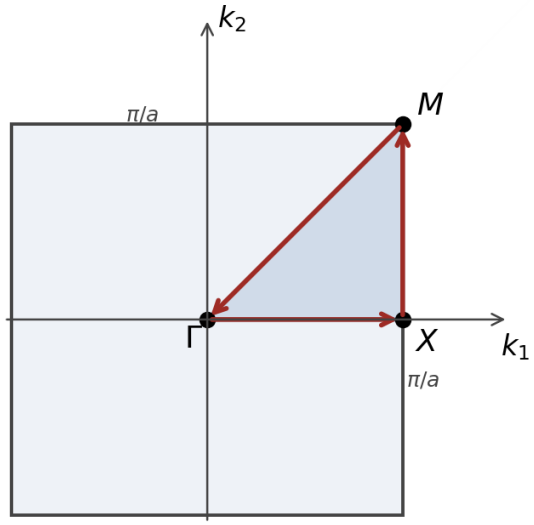

Рисунок 2.2 - Перша зона Бриллюена квадратної ґратки та маршрут обходу Г → X → M → Г незвідної частини (заштрихована)

Принципово важливим для дисертації є розрізнення двох фізичних механізмів формування смуг непропускання (заборонених зон). Перший - брегівське розсіювання: смуга відкривається внаслідок інтерференції хвиль, розсіяних на періодичних неоднорідностях, і визначається насамперед

геометрією та кроком періодичності. Перша брегівська заборонена зона виникає, коли крок періодичності сумірний з половиною довжини хвилі:

$$a \approx \lambda/2, \quad \lambda = V_s/f \tag{2.4}$$

де λ - довжина хвилі; V_s - швидкість зсувної хвилі у середовищі; f - частота.

Як показано в оглядовій роботі [114], для характерних швидкостей зсувних хвиль у ґрунтах $V_s \approx 200–400$ м/с брегівський механізм для частоти близько 10 Гц вимагає технологічно прийнятного кроку 10–20 м, проте для наднизькочастотного сейсмічного діапазону близько 1 Гц потрібний крок сягає 100–200 м, що робить «чисті» фононні кристали натурного масштабу геометрично нереалізовними для інфраструктурних об’єктів.

Другий механізм - локальний резонанс субхвильових включень. Концепцію локально-резонансних матеріалів запропоновано в дослідженні Лю та співавторів [52] для подолання геометричного обмеження брегівського розсіювання: смуга непропускання визначається резонансною динамікою включення та може відкриватися на частотах, істотно нижчих за брегівські для тієї самої геометрії [52]. Саме цей механізм покладено в основу трикомпонентної локально-резонансної комірки; його редуковану фізичну інтерпретацію наведено в підрозділі 2.8, а конкретну геометричну реалізацію - у розділі 3. Обидва механізми необхідні в межах цієї роботи, оскільки досліджувані конфігурації реалізують їх по-різному: двокомпонентна комірка працює переважно за брегівським принципом, трикомпонентна - за принципом локального резонансу важкого ядра у податливому гумовому підвісі.

2.2. Дискретна двовимірна модель: аналітична основа

Дискретна ґраткова модель дає змогу отримати дисперсійні співвідношення у замкненій аналітичній формі, що робить її зручною еталонною (контрольною) моделлю для перевірки результатів числового моделювання розділу 3. На відміну від неперервних середовищ, дискретні ґратки часто допускають точні дисперсійні співвідношення, тож вони виявляють головні ефекти поширення хвиль у неоднорідних структурах у спрощеній аналітично прозорій формі. Нижче відтворено та проінтерпретовано апарат, розвинений у роботі Андріанова та співавторів [19], стосовно задачі віброзахисту.

Розгляньмо нескінченну квадратну ґратку однакових частинок масою m, з'єднаних пружними зв'язками (рис. 2.1). Кожна частинка взаємодіє з вісьмома сусідами; сили взаємодії лінійні й є аналогом антиплоского зсуву в неперервному середовищі. Жорсткість зв'язків залежить від відстані: c - для ортогональних, c_0 - для діагональних напрямів. Обмеження антиплоскими хвилями є виправданим спрощенням: воно зводить векторну задачу пружності до скалярної відносно єдиної компоненти зміщення u, зберігаючи при цьому ключові ефекти двовимірної дисперсії та дозволяючи аналітичне розв'язання. Рівняння руху типової частинки (n_1, n_2) має вигляд

$$m\cdot\ddot{u}(n_1,n_2) = c\cdot[u(n_1+1,n_2) + u(n_1-1,n_2) + u(n_1,n_2+1) + u(n_1,n_2-1) - 4u(n_1,n_2)] + c_0\cdot[u(n_1+1,n_2+1) + u(n_1-1,n_2-1) + u(n_1+1,n_2-1) + u(n_1-1,n_2+1) - 4u(n_1,n_2)] \quad (2.5)$$

де $\ddot{u}(n_1,n_2) = d^2u(n_1,n_2)/dt^2$; $u(n_1,n_2)$ - зміщення частинки з номерами n_1, $n_2 = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ у напрямі, поперечному до площини x_1x_2.

Класичний розв'язок будують для гармонічної хвилі з амплітудою A, частотою ω та безрозмірним хвильовим вектором із компонентами k_1, k_2:

$$u(n_1,n_2) = A\cdot\exp(i\omega t)\cdot\exp[-i(k_1n_1 + k_2n_2)] \quad (2.6)$$

Підстановка (2.6) у (2.5) дає дисперсійне співвідношення

$$\bar{\omega}^2 = 4[\sin^2(k_1/2) + \sin^2(k_2/2)] + (4c_0/c)\cdot[\sin^2((k_1+k_2)/2) + \sin^2((k_1-k_2)/2)] \quad (2.7)$$

де $\bar{\omega}$ - безрозмірна частота, $\bar{\omega} = \omega\cdot\sqrt{(m/c)}$.

Одноатомна ґратка має лише одну смугу пропускання; рівняння (2.7) описує класичну акустичну моду, частота якої прямує до нуля з ростом довжини хвилі. Це відповідає бездисперсійному поширенню в однорідному середовищі. Проте у неоднорідних структурах виникають додаткові типи мод, що не вкладаються в класичну довгохвильову границю з нульовою частотою. Щоб їх виявити, потрібно перейти до розширеної (супер-) комірки.

Ключова ідея полягає в розгляді суперкомірки 2×2, що містить чотири частинки (рис. 2.3). Одночастинкова комірка здатна описати лише синфазний рух сусідів; суперкомірка вводить додаткові ступені вільності й дозволяє описати протифазні (антиперіодичні) рухи, що не виділяються явно у стандартній постановці Флоке–Блоха. Зміщення чотирьох частинок позначають окремо: $u^{(00)}$, $u^{(01)}$, $u^{(10)}$, $u^{(11)}$ - відповідно для парних і непарних значень n_1, n_2. Записавши для них чотири рівняння руху (за схемою (2.5)) і шукаючи розв'язок у вигляді

$$u^{(j_1j_2)}(n_1,n_2) = A_{j_1j_2}\cdot\exp(i\omega t)\cdot\exp[-i(k_1n_1 + k_2n_2)], \quad j_1, j_2 = 0, 1 \quad (2.8)$$

приходимо до системи рівнянь відносно амплітуд A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}. У матричній формі вона є власною задачею

$$[M(k) + \bar{\omega}^2\cdot I_4]\cdot A = 0, \quad A = [A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}]^T \quad (2.9)$$

де I_4 - одинична матриця 4-го порядку; M(k) - симетрична матриця коефіцієнтів, наведена в таблиці 2.1.

Для скорочення запису введено позначення $g = (2c_0/c)\cdot[\cos(k_1+k_2) + \cos(k_1-k_2)]$ та $d = -4(1 + c_0/c)$.

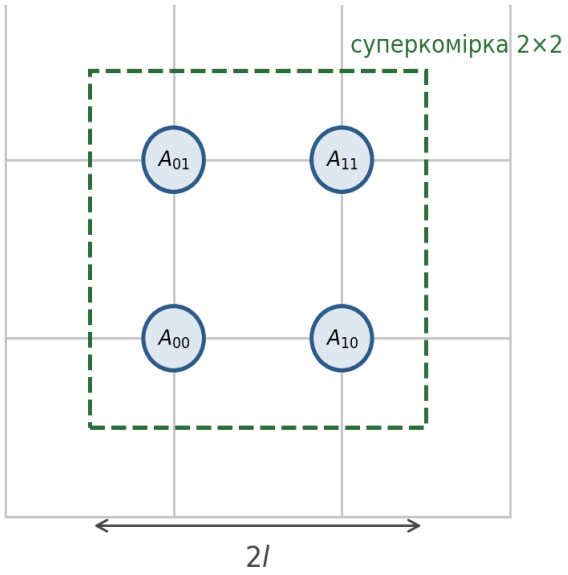

Рисунок 2.3 - Суперкомірка 2×2 із чотирьох частинок з амплітудами A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}

Таблиця 2.1 - Матриця коефіцієнтів M(k) власної задачі (2.9)

d	$2\cos k_2$	$2\cos k_1$	g
$2\cos k_2$	d	g	$2\cos k_1$
$2\cos k_1$	g	d	$2\cos k_2$
g	$2\cos k_1$	$2\cos k_2$	d

Розв’язання власної задачі (2.9) показує, що залежно від співвідношення амплітуд частинок існують чотири типи хвиль, які відрізняються комбінацією умов періодичності (P) та антиперіодичності (A) у двох напрямах трансляційної симетрії. Ключове теоретичне положення, використане в роботі, полягає в тому, що комбінування умов P/A у різних напрямах виявляє моди, що не виділяються явно у стандартній постановці Флоке–Блоха.

Перший тип, $A_{00} = A_{01} = A_{10} = A_{11}$ (синфазний рух), у довгохвильовій границі $k_1, k_2 \to 0$ дає періодичний у напрямах x_1 і x_2 розв’язок. Це класична акустична мода, позначувана P1P2; її дисперсія описується рівнянням (2.7).

Другий тип, $A_{00} = A_{01} = -A_{10} = -A_{11}$: сусідні частинки рухаються протифазно вздовж x_1 і синфазно вздовж x_2 (мода A1P2):

$$\bar{\omega}^2 = 4[\cos^2(k_1/2) + \sin^2(k_2/2)] + (4c_0/c)\cdot[\cos^2((k_1+k_2)/2) + \cos^2((k_1-k_2)/2)] \quad (2.10)$$

Третій тип, $A_{00} = -A_{01} = A_{10} = -A_{11}$: розв'язок періодичний за x_1 та антиперіодичний за x_2 (мода P1A2); він отримується з попереднього заміною $k_1 \Leftrightarrow k_2$:

$$\bar{\omega}^2 = 4[\sin^2(k_1/2) + \cos^2(k_2/2)] + (4c_0/c)\cdot[\cos^2((k_1+k_2)/2) + \cos^2((k_1-k_2)/2)] \quad (2.11)$$

Четвертий тип, $A_{00} = -A_{01} = -A_{10} = A_{11}$: розв'язок антиперіодичний в обох напрямах (мода A1A2):

$$\bar{\omega}^2 = 4[\cos^2(k_1/2) + \cos^2(k_2/2)] + (4c_0/c)\cdot[\sin^2((k_1+k_2)/2) + \sin^2((k_1-k_2)/2)] \quad (2.12)$$

Зіставлення (2.7), (2.10)–(2.12) виявляє просту закономірність: антиперіодичність розв'язку в напрямі x_1 (або x_2) еквівалентна зсуву відповідної компоненти хвильового вектора на половину періоду:

$$k_1 \to k_1 + \pi \quad (\text{відповідно } k_2 \to k_2 + \pi) \quad (2.13)$$

Фізична інтерпретація розв'язків спирається на зміст переходу від (2.5) до системи суперкомірки: рівняння суперкомірки описують рух центра мас комірки та рухи навколо цього центра. Відповідно періодичні моди (P) відповідають переміщенню центра мас, а антиперіодичні моди (A) - коливанням навколо нерухомого центра мас. У довгохвильовій границі частота періодичної моди P1P2 прямує до нуля (рух вироджується у жорстке зміщення усієї комірки), тоді як усі антиперіодичні моди прямують до стоячих

хвиль із нульовою груповою швидкістю та ненульовою частотою. Цей режим трактують як «приховані» (захоплені) моди: на макрорівні енергія не передається, але на мікрорівні ґратка виконує пилкоподібні коливання. Ненульові граничні частоти антиперіодичних гілок є аналітичною ознакою можливого формування меж заборонених зон у неоднорідних або локально-резонансних структурах.

Енергоперенесення визначається вектором групової швидкості

$$v_g = \partial\bar{\omega}/\partial k \qquad (2.14)$$

Напрями потоку енергії на заданій частоті задаються нормалями до відповідної ізочастотної кривої $\bar{\omega}(k_1, k_2) = \text{const}$. Аналіз ізочастотних кривих показує, що в довгохвильовій границі моди P1P2 та A1A2 ізотропні (ізочастотні криві майже колові поблизу Г), отже, енергія поширюється майже однаково в усіх напрямах. Зі зменшенням довжини хвилі до масштабу мікроструктури динамічні властивості ґратки стають істотно анізотропними, а потоки енергії фокусуються в певних напрямах - виникає ефект «біймінгу» (спрямованого випромінювання) хвильового поля, що є основою для проєктування структур із керованою спрямованістю хвиль. Моди A1P2 та P1A2, на відміну від P1P2 та A1A2, анізотропні вже в довгохвильовій границі.

Розгляньмо дисперсійні криві для типового випадку, коли сили взаємодії обернено пропорційні відстані між частинками, тобто $c_0 = c/\sqrt{2}$ (рис. 2.4). Праву частину діаграми побудовано для поширення вздовж x_1 ($k_1 = k$, $k_2 = 0$), ліву - для діагонального напряму ($k_1 = k_2 = k/\sqrt{2}$). Картина підтверджує аналітичні висновки: акустична мода P1P2 виходить з нуля в точці Г, а всі антиперіодичні моди мають ненульові граничні частоти. Уздовж напряму x_1 моди P1P2 та A1P2 переходять одна в одну заміною $k \Leftrightarrow k + \pi$ і описують одне й те саме поле зміщень, але для P1P2 хвильове число пов’язане з несівною хвилею, а для A1P2 - з огинальною. Натомість моди P1A2 та A1A2 відповідають руху, антиперіодичному в напрямі, поперечному до напряму

поширення; це прямий аналог високочастотних довгих хвиль у тонкостінних пружних хвилеводах, коли локальний розв'язок у поперечному перерізі комірки відповідає розв'язку в перерізі тонкого стрижня, пластини чи оболонки. Такі моди притаманні саме багатовимірним задачам і не описуються одновимірними моделями.

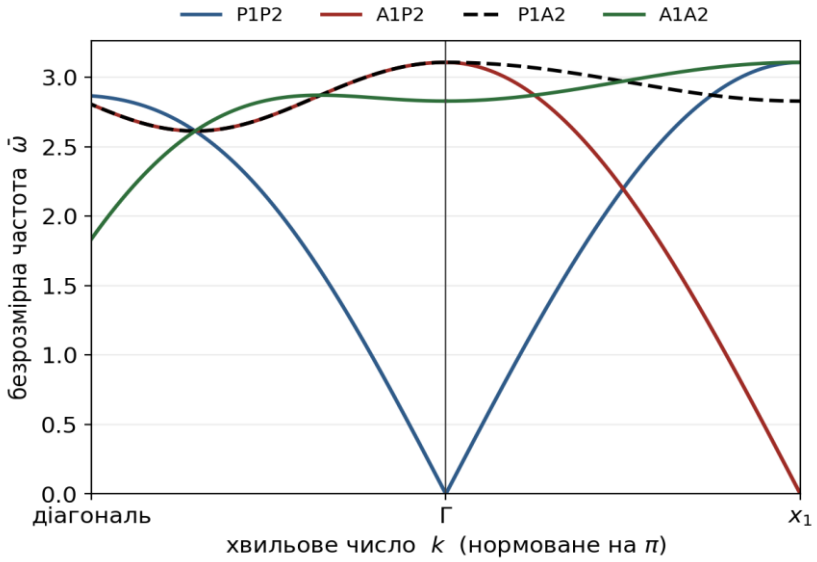

Рисунок 2.4 - Дисперсійні криві чотирьох типів мод квадратної ґратки за $c_0 = c/\sqrt{2}$ (праворуч - напрям x_1: $k_1 = k$, $k_2 = 0$; ліворуч - діагональний напрям). Сині - P1P2; червоні - A1P2; чорні штрихові - P1A2; зелені - A1A2. Побудовано автором за співвідношеннями (2.7), (2.10)–(2.12) з використанням системи комп'ютерної алгебри Maxima

Окремий випадок «виродженої» ґратки з нульовою жорсткістю діагональних зв'язків ($c_0 = 0$) ілюструє можливість появи локалізованих плоских мод. За такої виродженості змінюється симетрія задачі, і в діагональному напрямі моди P1A2 та A1P2 стають плоскими - не передають енергії за жодного значення хвильового числа. Аналогічне явище спостерігається в неоднорідному середовищі з майже дотичними циліндричними включеннями (підрозділ 2.5), що підкреслює спільність дискретної та континуальної картин.

Аналітичні співвідношення відтворено за роботою [19] і застосовано до задачі захисту споруд. Замкнені вирази (2.7), (2.10)–(2.12) слугують аналітичним орієнтиром і контрольним зіставленням для числових дисперсійних діаграм розділу 3; дисперсійні криві на рис. 2.4 обчислено безпосередньо за цими співвідношеннями.

2.3. Вплив в'язкого демпфування

Ідеальна пружна модель не враховує дисипації, тоді як реальні матеріали - насамперед гума - мають виражену в'язкопружну поведінку. Щоб пов'язати модель з реальними матеріалами, застосовують класичну модель Кельвіна–Фойгта: кожний пружний зв'язок (пружину) з'єднано паралельно з в'язким демпфером. Динамічний модуль системи «пружина–демпфер» залежить від частоти й береться у комплексній формі:

$$c^*(\bar{\omega}) = c\cdot(1 + i\eta\cdot\bar{\omega}) \qquad (2.15)$$

де c - жорсткість пружного зв'язку; добуток ηc характеризує в'язкість демпферів; η - безрозмірний параметр в'язкості ґратки.

За $\bar{\omega} \to 0$ (мала швидкість деформування) опір демпферів незначний, тож дисипація прямує до нуля. За скінченних $\bar{\omega}$ дисипація ненульова; у моделі Кельвіна–Фойгта уявна частина модуля та коефіцієнт втрат ($\approx \eta\cdot\bar{\omega}$) зростають із частотою, тому межу $\bar{\omega} \to \infty$ як режим зникнення дисипації тут не розглядаємо - це відома обмеженість моделі.

За принципом пружно-в'язкопружної відповідності розв'язок в'язкопружної задачі отримують прямою підстановкою комплексного модуля c* замість дійсної жорсткості c у вже отримані формули пружного випадку (2.7), (2.10)–(2.12). Наслідки такі: хвильове число k стає комплексним, а отже, хвиля затухає за будь-якої частоти $\bar{\omega}$ (окрім згаданих граничних значень), причому коефіцієнт затухання дорівнює уявній частині хвильового числа.

Уведення навіть малої в’язкості «розмиває» межі між смугами пропускання та непропускання; зі зростанням η це розмиття посилюється (рис. 2.5, а).

Демпфування усуває і математичну особливість суто пружного випадку. На порозі забороненої зони пружна ґратка має різкий злам (недиференційовність) дисперсійної кривої; для прикладу [19] цей поріг для напряму x_1 досягається за безрозмірної частоти

$$\bar{\omega} = 2\sqrt{(1 + \sqrt{2})} \approx 3{,}11 \qquad (2.16)$$

За будь-якого ненульового η дисперсійна крива в околі цього порога залишається гладкою - особливість «згладжується» в’язкістю.

Практично найважливіший висновок такий: оскільки антиперіодичні моди мають довгохвильові високочастотні граничні стани, вони зазнають істотнішого демпфування, ніж низькочастотна періодична мода P1P2. Зокрема, мода A1A2 затухає швидше за P1P2 (рис. 2.5, б). В’язкість тим самим діє як «механізм відбору мод»: антиперіодичні моди спостерігаються на відносно короткому часовому масштабі, тоді як на тривалому масштабі домінують періодичні моди. Це безпосередньо стосується інженерних застосувань: для гумовмісних конструкцій демпфування є додатковим, корисним чинником пригнічення коливань у цільовій смузі.

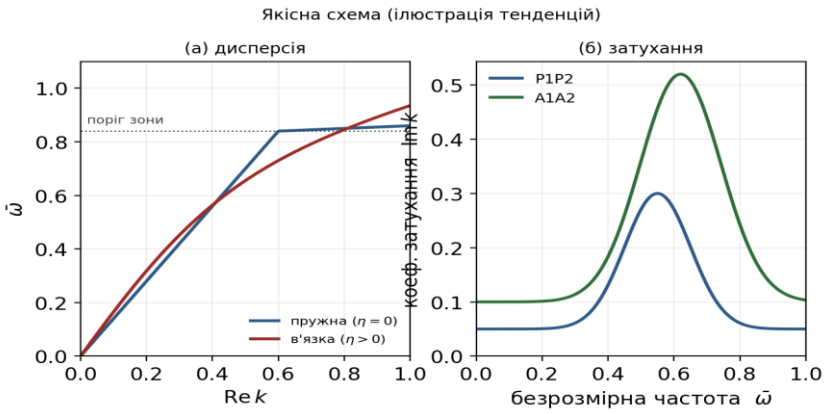

Рисунок 2.5 - Якісна схема впливу в’язкого демпфування: (а) згладжування зламу дисперсійної кривої на порозі зони; (б) коефіцієнт затухання Im k для

мод P1P2 та A1A2 (мода A1A2 затухає швидше). Якісна ілюстрація тенденцій за аналітичною моделлю.

Демпфування уточнює ідеальну зонну картину: воно описує перехід від чистої забороненої зони до частотно-залежного загасання і наближає ідеалізовану ґратку до поведінки реального бетонно-гумового середовища (зв'язок із підрозділом 2.9 та розділом 4). У числовій постановці розділу 3 матеріали прийнято пружними.

2.4. Довгохвильові неперервні наближення

Довгохвильові наближення встановлюють зв'язок між дискретною ґраткою та неперервною постановкою, використаною у скінченноелементній моделі розділу 3. Підхід ґрунтується на припущенні, що довжина хвилі L значно перевищує характерний розмір мікроструктури l. Уведемо малий параметр як їхнє відношення:

$$\varepsilon = l/L, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{2.17}$$

і безрозмірні просторові координати $\bar{x}_1 = x_1/L$, $\bar{x}_2 = x_2/L$. Для опису кожного типу моди вводять ефективне (огинальне) хвильове поле $\tilde{u}(n_1,n_2)$ як відповідну комбінацію зміщень чотирьох частинок суперкомірки. Для моди P1P2 це середнє значення зміщень:

$$\tilde{u}(n_1,n_2) = \tfrac{1}{4}\cdot[u^{(00)} + u^{(01)} + u^{(10)} + u^{(11)}] \tag{2.18}$$

для інших мод знаки доданків змінюються відповідно до комбінації умов P/A: для A1P2 беруть мінуси при $u^{(10)}$ та $u^{(11)}$, для P1A2 - при $u^{(01)}$ та $u^{(11)}$, для A1A2 - при $u^{(01)}$ та $u^{(10)}$. Відносно $\tilde{u}$ рівняння суперкомірки розщеплюються на чотири незалежні (незв'язані) рівняння, причому рівняння для P1P2 збігається з вихідним рівнянням класичної теорії (2.5).

Уводячи неперервну функцію $u(x_1, x_2, t)$, що збігається з $\tilde{u}$ у вузлах ґратки, і подаючи зміщення сусідніх частинок розкладом у ряд Тейлора

$$\tilde{u}(n_1 \pm 1, n_2 \pm 1) = \Sigma_{p \geq 0} \, (1/p!) \cdot D^p[u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)], \quad D = \varepsilon \cdot (\pm \partial/\partial \bar{x}_1 \pm \partial/\partial \bar{x}_2) \tag{2.19}$$

та підставляючи розклади у незв'язані рівняння, при $\varepsilon \to 0$ дістають макроскопічні диференціальні рівняння (PDE) для кожного типу моди (співвідношення S7–S10 із суплементу [19]). Для періодичної моди P1P2 макроскопічне рівняння має вигляд

$$\varepsilon^2(1 + 2c_0/c)(\partial^2 u/\partial \bar{x}_1^2 + \partial^2 u/\partial \bar{x}_2^2) + (\varepsilon^4/12) \cdot [(1 + 2c_0/c)(\partial^4 u/\partial \bar{x}_1^4 + \partial^4 u/\partial \bar{x}_2^4) + (12c_0/c) \cdot \partial^4 u/\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2] - \partial^2 u/\partial \bar{t}^2 + O(\varepsilon^6) = 0 \tag{2.20}$$

а для антиперіодичної моди A1A2 воно містить додатковий сталий («масовий») член:

$$8u + \varepsilon^2(1 - 2c_0/c)(\partial^2 u/\partial \bar{x}_1^2 + \partial^2 u/\partial \bar{x}_2^2) + (\varepsilon^4/12) \cdot [(1 - 2c_0/c)(\partial^4 u/\partial \bar{x}_1^4 + \partial^4 u/\partial \bar{x}_2^4) - (12c_0/c) \cdot \partial^4 u/\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2] + \partial^2 u/\partial \bar{t}^2 + O(\varepsilon^6) = 0 \tag{2.21}$$

де $\bar{t} = t \cdot \sqrt{(c/m)}$ - безрозмірний час.

Для гармонічної хвилі ці рівняння дають довгохвильові дисперсійні співвідношення. Для періодичної моди P1P2:

$$\bar{\omega}^2 = (1 + 2c_0/c)(k_1^2 + k_2^2) - (1/12) \cdot [(1 + 2c_0/c)(k_1^4 + k_2^4) + (12c_0/c)k_1^2 k_2^2] + O(k_1^6 + k_2^6) \tag{2.22}$$

для антиперіодичної моди A1A2:

$$\bar{\omega}^2 = 8 - (1 - 2c_0/c)(k_1^2 + k_2^2) + (1/12) \cdot [(1 - 2c_0/c)(k_1^4 + k_2^4) - (12c_0/c)k_1^2 k_2^2] + O(k_1^6 + k_2^6) \tag{2.23}$$

Структура (2.22), (2.23) демонструє принципову різницю мод. Розклад P1P2 починається з членів $O(k^2)$ і за $k \to 0$ дає $\bar{\omega} \to 0$ - класичну акустичну гілку; провідне наближення цієї моди збігається з класичним рівнянням

неперервного середовища. Натомість розклад A1A2 містить сталий член ($\bar{\omega}^2 \to 8$ за $k \to 0$), тобто має ненульову відсічну частоту - оптичний характер гілки. Це і є формальний прояв «прихованої» моди на рівні неперервного опису. Зіставлення двох гілок наведено на рис. 2.6: акустична гілка виходить з нуля, тоді як оптична починається з відсічної частоти $\bar{\omega} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$. Слід наголосити, що інтервал між гілками на цьому рисунку є ілюстрацією акустично-оптичної різниці, а не повною забороненою зоною: остання визначається спільним розташуванням усіх чотирьох гілок (рис. 2.4).

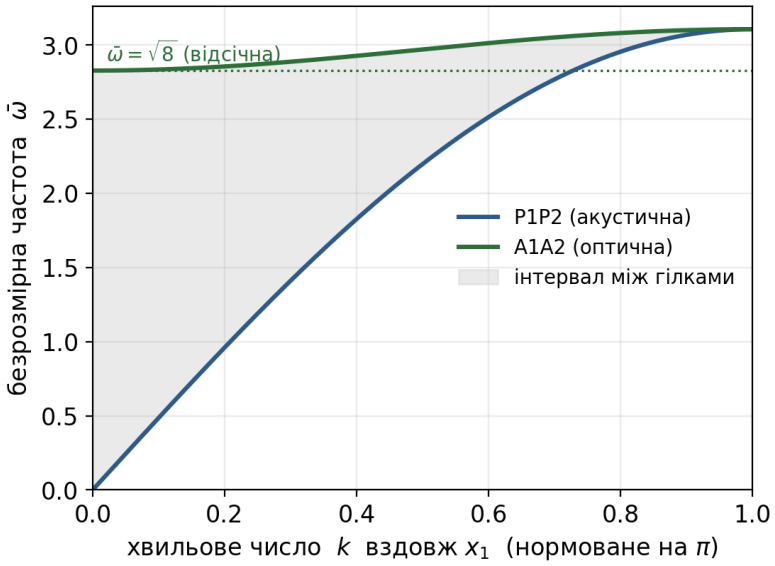

Рисунок 2.6 - Акустична (P1P2) та оптична (A1A2) гілки вздовж напряму x_1 за $c_0 = c/\sqrt{2}$; оптична гілка має ненульову відсічну частоту $\bar{\omega} = \sqrt{8}$. Побудовано автором за співвідношеннями (2.7), (2.12) з використанням системи комп'ютерної алгебри Maxima

Дисперсійні співвідношення (2.22), (2.23) збігаються з розкладами точних співвідношень (2.7), (2.10)–(2.12) у ряд Тейлора за k_1, $k_2 \to 0$, що підтверджує узгодженість дискретної та довгохвильової моделей. Для аналізу динамічної анізотропії подамо хвильовий вектор у полярній формі

$$k_1 = k \cdot \cos\alpha, \quad k_2 = k \cdot \sin\alpha \tag{2.24}$$

де α - кут між віссю x_1 та вектором k.

Підстановка у довгохвильові співвідношення показує, що для мод P1P2 та A1A2 розв'язок не залежить від α (ізотропний) із точністю до членів порядку $O(k^2)$, тоді як моди A1P2 та P1A2 анізотропні навіть у довгохвильовій границі. Це узгоджується з аналізом ізочастотних кривих підрозділу 2.2.

Зв'язок із феноменологічними теоріями вищого порядку полягає в такому: періодична мода відповідає класичній пружній хвилі, тоді як антиперіодична мода A1A2 виступає аналогом некласичних хвиль - «повільної» (другої) хвилі теорії Біо [115] та хвиль, пов'язаних із мікрообертаннями в континуумі Коссера. У теорії Біо перша хвиля відповідає синфазному руху компонентів (узгоджується з класикою), а друга потребує відносного зсуву компонентів, тобто їхнього протифазного руху - що структурно тотожне антиперіодичним модам. Таким чином, антиперіодичні моди дискретної ґратки інтерпретуються як теоретичні відповідники некласичних хвиль феноменологічних теорій. Цей висновок обґрунтовує застосовність узагальнених (градієнтних) континуальних моделей для опису досліджуваних метаструктур, на що вказано й у [114].

2.5. Метод Флоке–Блоха для неперервного волокнистого середовища

Перейдемо від дискретної ґратки до неперервного середовища, яке є проміжною аналітичною моделлю між ґратковим описом і скінченноелементною постановкою розділу 3. Розгляньмо нескінченне неоднорідне тіло, утворене матрицею Ω_1 та періодичним квадратним масивом циліндричних включень Ω_2. Така модель відповідає односпрямовано армованим композитам, а також придатна для опису двовимірних пористих середовищ. Поширення антиплоских зсувних хвиль у площині x_1x_2 описується рівнянням (2.1); зауважимо, що це саме рівняння описує й поширення електромагнітних (оптичних) хвиль крізь масив діелектричних циліндрів, тож

подальші результати мають ширший зміст. Дисперсійні властивості обчислюють методом Флоке–Блоха: розв'язок шукають у формі (2.2), де F(x) - функція з періодом комірки. У класичній теорії F(x) вважають періодичною; щоб охопити як періодичні, так і антиперіодичні моди, вводять розширений набір граничних умов на протилежних сторонах комірки:

$$\begin{aligned} &P1P2:\ F(x_1,x_2) = F(x_1+l,\ x_2),\ \ F(x_1,x_2) = F(x_1,\ x_2+l);\\ &A1P2:\ F(x_1,x_2) = -F(x_1+l,\ x_2),\ F(x_1,x_2) = F(x_1,\ x_2+l);\\ &P1A2:\ F(x_1,x_2) = F(x_1+l,\ x_2),\ F(x_1,x_2) = -F(x_1,\ x_2+l);\\ &A1A2:\ F(x_1,x_2) = -F(x_1+l,\ x_2),\ F(x_1,x_2) = -F(x_1,\ x_2+l) \end{aligned} \qquad (2.25)$$

де l - розмір комірки.

Умови (2.25) є неперервним аналогом чотирьох комбінацій P/A дискретної моделі (підрозділ 2.2) і відкривають доступ до тих самих чотирьох типів мод у континуальній постановці. Для розв'язання задачі застосовують розклади в ряди. Серед найпоширеніших методів - мультипольні розклади Релея (на основі функцій Бесселя) та ряди Фур'є (метод плоских хвиль). Методи відрізняються так: ряди Релея точно задовольняють вихідне рівняння та умови ідеального зчеплення на межі «волокно–матриця», але умови (2.25) на зовнішній межі комірки задовольняють наближено; ряди Фур'є, навпаки, точно вбудовують періодичні та антиперіодичні умови (2.25), але локальні поля на межі поділу обчислюють наближено. Обидва підходи дають однакові результати для ефективних властивостей середовища після належного усічення. Нижче застосовано ряди Фур'є. Функцію-модуляцію для моди P1P2 подають подвійним рядом

$$F(x) = \Sigma_{n1,n2} F_{n1n2} \cdot exp[i(2\pi/l)(n_1x_1 + n_2x_2)] \qquad (2.26)$$

де підсумовування ведеться за n_1, $n_2 = 0, \pm1, \pm2,\ldots$

Для антиперіодичних мод у показнику з'являється напівцілий зсув: $n_1 \to n_1 + ½$ для антиперіодичності за x_1 та $n_2 \to n_2 + ½$ за x_2; саме цей зсув і вбудовує

умови (2.25) у ряд точно. Періодичні властивості середовища розкладають у ряди з тим самим базисом:

$$\mu(x) = \Sigma\, \mu_{n1n2}\cdot exp[i(2\pi/l)(n_1x_1+n_2x_2)],\ \ \rho(x) = \Sigma\, \rho_{n1n2}\cdot exp[i(2\pi/l)(n_1x_1+n_2x_2)] \tag{2.27}$$

з коефіцієнтами, що обчислюються як інтеграли по комірці Ω_0:

$$\mu_{n1n2} = (1/S_0)\cdot\iint_{\Omega 0} \mu(x)\cdot exp[-i(2\pi/l)(n_1x_1+n_2x_2)]\, dS,\quad S_0 = l^2 \tag{2.28}$$

аналогічно для ρ_{n1n2}. Підстановка анзацу (2.2) та розкладів (2.26), (2.27) у рівняння (2.1) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових гармоніках $\exp[i(2\pi/l)(m_1x_1+m_2x_2)]$ приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих амплітуд F_{n1n2}. Для моди P1P2 вона має вигляд

$$\Sigma_{n1,n2} F_{n1n2}\cdot\{\,\mu_{j1j2}\cdot[(k_1+2\pi n_1)(k_1+2\pi m_1) + (k_2+2\pi n_2)(k_2+2\pi m_2)] - (\bar{\omega}\cdot v_1)^2\cdot\rho_{j1j2}\,\} = 0 \tag{2.29}$$

де $j_1 = m_1 - n_1$, $j_2 = m_2 - n_2$; $k_1 = K_1 l$, $k_2 = K_2 l$; $\bar{\omega} = \omega l/v_1$ - безрозмірна частота; $v_1 = \sqrt{(\mu_1/\rho_1)}$ - швидкість зсувної хвилі в матриці.

Для антиперіодичних мод у дужках з'являється додатковий зсув на π ($k_1 \to k_1 + \pi$ та/або $k_2 \to k_2 + \pi$), що узгоджується з результатом дискретної моделі (2.13). Система (2.29) має нетривіальний розв'язок тоді й лише тоді, коли визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю; прирівнюючи його до нуля, дістаємо дисперсійне співвідношення між $\bar{\omega}$ та k_1, k_2:

$$det\{\ \ldots\ \} = 0 \tag{2.30}$$

Нескінченну систему (2.29) усікають, утримуючи $-n_{max} \le n_1, n_2 \le n_{max}$, що дає $(2n_{max} + 1)^2$ рівнянь. Фізичний зміст усічення - нехтування високочастотними гармоніками; збільшення числа утримуваних рівнянь підвищує точність у високочастотній області. Збіжність залежить також від

об’ємної частки включень та контрасту властивостей компонентів. Ряди (2.26), (2.27) можуть втрачати збіжність для майже дотичних і абсолютно жорстких (або абсолютно м’яких) включень, коли в тонких прошарках між волокнами виникають швидкі осциляції полів; це утруднення притаманне багатьом методам, що ґрунтуються на рядах (зокрема мультипольному методу Релея). Лі (1996) [116] запропонував перебудову фур’є-аналізу для кусково-неперервних структур, що істотно покращує збіжність процедури.

Для контрольного зіставлення методу зручно обчислити квазістатичний ефективний модуль зсуву $\tilde{\mu}$ - його визначають із дисперсійного співвідношення моди P1P2 у довгохвильовій границі:

$$\tilde{\mu} = \tilde{\rho} \cdot lim_{K \to 0} \, (d\omega/dK)^2 \qquad (2.31)$$

де ефективна (усереднена) густина

$$\tilde{\rho} = \rho_1 \cdot (1 - f) + \rho_2 \cdot f, \quad 0 \le f \le \pi/4 \approx 0{,}785 \qquad (2.32)$$

а f - об’ємна частка включень (для круглих включень у квадратній комірці максимальне значення $f = \pi/4$ відповідає дотичним волокнам). У таблиці 2.2 розвинений розв’язок для $\tilde{\mu}$ зіставлено зі збіжними («еталонними») даними Перрінса та ін. [117]; обчислення виконано для найскладнішого з обчислювального погляду випадку пористих включень ($\mu_2 = 0$). Те саме зіставлення показано графічно на рис. 2.7.

Таблиця 2.2 - Перевірка збіжності: ефективний модуль зсуву $\tilde{\mu}/\mu_1$ волокнистого середовища з пористими включеннями ($\mu_2 = 0$); зіставлення з даними Перрінса та ін. [117], за даними, наведеними в [19]

f	$n_{max} = 1$	$n_{max} = 2$	$n_{max} = 3$	[115]
0,1	0,867	0,833	0,821	0,818
0,2	0,705	0,670	0,667	0,667

0,3	0,560	0,539	0,538	0,538
0,4	0,437	0,426	0,425	0,425

Продовження таблиці 2.2.

0,5	0,333	0,325	0,325	0,325
0,6	0,239	0,231	0,230	0,230
0,7	0,147	0,136	0,135	0,135
0,74	0,109	0,094	0,091	0,091
0,76	0,089	0,071	0,067	0,065

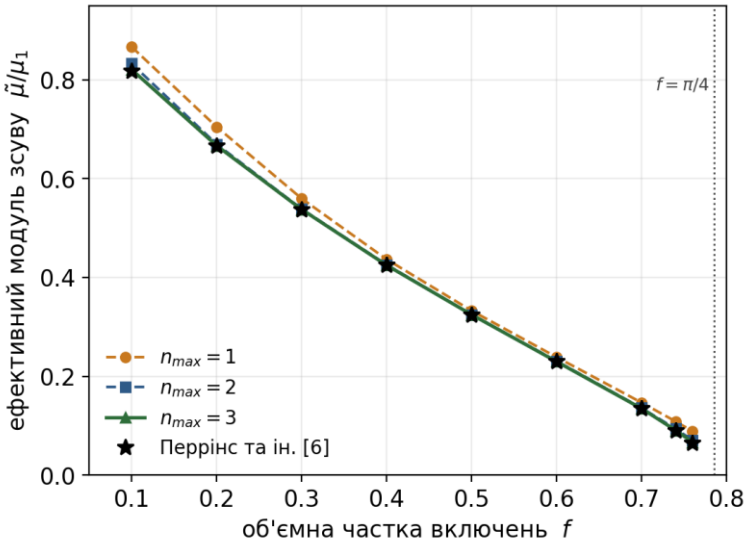

Рисунок 2.7 - Збіжність ефективного модуля зсуву $\tilde{\mu}/\mu_1$ за різного числа утримуваних гармонік n_{max} та зіставлення з даними Перрінса та ін. [117]. Побудовано за даними таблиці 2.2

Як видно з таблиці 2.2 та рис. 2.7, результати для $n_{max} = 2$ та $n_{max} = 3$ близькі, що підтверджує швидку практичну збіжність процедури; за $n_{max} = 3$ утримується 49 рівнянь системи (2.29), що забезпечує добру точність навіть за великих об’ємних часток включень. Зіставлення з конвергентними даними Перрінса та ін. [117] демонструє узгодженість. Порівняння високо- та низькоконтрастних середовищ показує, що для висококонтрастних структур (наприклад, бетон + гума, де контраст модулів сягає п’яти порядків) у

діагональному напрямі виникають локалізовані майже плоскі моди, що не передають енергії, - це є континуальним аналогом ефекту виродженої ґратки (підрозділ 2.2), тоді як для низькоконтрастних середовищ такі моди відсутні. Це свідчить про доцільність використання ґраткових моделей як аналітичного орієнтира саме для висококонтрастних бетонно-гумових конструкцій, які є об’єктом дослідження.

2.6. Узагальнена скінченноелементна постановка спектральної задачі з умовами Флоке–Блоха

На основі апарату підрозділів 2.1–2.5 нижче формулюють узагальнену постановку спектральної задачі для періодичної комірки, яку в розділі 3 застосовують до конкретних бетонно-гумових конфігурацій. Об’єктом є двовимірна неоднорідна періодична структура фундаментного типу в межах плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація). Нескінченну періодичну систему зводять до однієї елементарної комірки із застосуванням умов Флоке–Блоха на її границях, а спектральний аналіз виконують у межах першої зони Бриллюена.

Геометрію комірки описують безрозмірними параметрами, що не залежать від абсолютного розміру. Для квадратної комірки зі стороною a і круглим включенням, зовнішній радіус якого позначено r_{out}; керівним параметром є площова частка включення

$$f_{area} = \pi \cdot r_{out}^2 / a^2 \tag{2.33}$$

Для комірки з кільцевим включенням і внутрішнім ядром додатково вводять відношення радіусів

$$\beta = r_{core} / (r_{out} - r_{core}) \tag{2.34}$$

де rcore - радіус ядра.

Ці параметри є загальними позначеннями геометрії; конкретні архітектури комірок (із суцільним включенням та з кільцем і ядром), їхні розміри, матеріальні характеристики й числові значення параметрів задано в розділі 3.

Умови Флоке–Блоха на протилежних сторонах комірки задають у формі (2.3) (одновимірний запис) та (2.25) (чотири комбінації періодичності й антиперіодичності у двовимірному випадку): поле на одній стороні дорівнює полю на протилежній стороні, помноженому на фазовий множник exp(−ik) для періодичних і −exp(−ik) для антиперіодичних умов. Фізичний зміст - урахування трансляційної симетрії нескінченної структури через одну комірку.

Чисельну постановку будують методом скінченних елементів для повної плоскої задачі теорії пружності: шуканим є векторне поле переміщень $u = (u_1, u_2)$, яке подають через вузлові значення U та функції форми. Скалярну антиплоску форму (2.1) використовують як аналітично прозорий аналог, що пояснює механізм формування зон. Підстановка гармонічного за часом анзацу $u(x, t) = \hat{u}(x)\cdot\exp(i\omega t)$ у слабку форму рівняння рівноваги $\nabla\cdot\sigma = \rho\cdot\ddot{u}$ з умовами Флоке–Блоха зводить континуальну задачу до узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення

$$[K(k) - \omega^2\cdot M]\cdot U = 0 \qquad (2.35)$$

де K(k) - матриця жорсткості, що залежить від хвильового вектора $k = (k_1, k_2)$ через фазові множники крайових умов; M - матриця мас; U - вектор вузлових амплітуд; ω - власна частота.

Для кожного фіксованого k розв’язання (2.35) дає набір власних частот $\omega_j(k)$; сукупність гілок $\omega_j(k)$ уздовж маршруту в зоні Бриллюена утворює дисперсійну (зонну) діаграму. Періодичні та антиперіодичні моди підрозділу

2.2 відрізняються знаком фазового множника (+exp(−ik) та −exp(−ik)) і відповідають різним наборам гілок тієї самої задачі (2.35).

Обхід зони Бриллюена виконують уздовж високосиметричного контуру Г(0, 0) → X(π, 0) → M(π, π) → Г, що відповідає симетрії квадратної комірки: Г–X - напрям уздовж сторони комірки, X–M - уздовж сторони зони, M–Г - діагональний напрям. Наявність зони за всіма напрямами додатково контролюють за сіткою хвильових векторів у незвідній частині зони Бриллюена.

Збіжність розв'язку контролюють згущенням скінченноелементної сітки до стабілізації перших власних частот; для рядових (Фур'є) процедур підрозділу 2.5 - кількістю утримуваних гармонік. Чисельну реалізацію постановки (2.35) виконано у скінченноелементному програмному середовищі; результат визначається методом, крайовими умовами Флоке–Блоха та параметрами комірки. Безрозмірний характер задачі (2.35) дає змогу сформулювати критерій виділення зони та масштабний закон (підрозділ 2.7).

2.7. Критерій виділення забороненої зони та масштабна подібність

Розв'язання задачі (2.35) дає впорядкований набір власних частот $f_j(k)$, які при пробігу k уздовж контуру Г–X–M–Г утворюють дисперсійні гілки. Контурну заборонену зону між сусідніми гілками n і n + 1 визначають як вільний від власних частот інтервал уздовж цього контуру, а її межі та ширину - за критерієм

$$f_{low}^{(n)} = \max_k f_n(k), \quad f_{upper}^{(n)} = \min_k f_{n+1}(k), \quad \Delta f^{(n)} = f_{upper}^{(n)} - f_{low}^{(n)} \qquad (2.36)$$

Зона, визначена за контурним критерієм, існує за умови $\Delta f^{(n)} > 0$. Конкретні гілки та точки зони Бриллюена, що задають межі, визначаються числово в розділі 3, а наявність зони за всіма напрямами контролюють за сіткою хвильових векторів.

Масштабну поведінку зони встановлюють безпосередньо з постановки (2.35). Просторові координати нормують на розмір комірки a, а хвильовий вектор подають безрозмірним, $k = K \cdot a$ (підрозділ 2.1). За незмінних матеріалів і геометрично подібної комірки безрозмірна спектральна задача не залежить від абсолютного розміру: її власні значення $\Phi_j(k)$ однакові для будь-якого a. Розмірну частоту відновлюють як $f_j = v_1 \cdot \Phi_j(k)/(2\pi \cdot a)$, де $v_1 = \sqrt{(\mu_1/\rho_1)}$ - швидкість зсувної хвилі матриці. Звідси абсолютна частота масштабується обернено до розміру комірки: Геометрична подібність тут означає однакове масштабування всіх лінійних розмірів комірки (сторони, радіусів включення та ядра) за незмінних матеріалів.

$$f(a) = f(a_0) \cdot a_0/a, \quad тобто \quad f \propto 1/a \tag{2.37}$$

а добутки нижньої межі, верхньої межі та ширини зони на розмір комірки лишаються сталими:

$$f_{low} \cdot a = const, \quad f_{upper} \cdot a = const, \quad \Delta f \cdot a = const \tag{2.38}$$

Отже, зміна лише розміру комірки переносить зонну структуру по частотній осі, не змінюючи її відносної форми. Конкретні значення цих інваріантів визначає розділ 3. Той самий масштаб дає елементарна оцінка брегівського механізму: перша брегівська зона відкривається, коли період сумірний з половиною довжини хвилі, $a \approx \lambda/2 = v/(2f)$, звідки

$$f_{Bragg} \approx v / (2a) \tag{2.39}$$

Брегівська частота підпорядкована тому самому закону 1/a (2.37). Для наднизьких частот це вимагає великих періодів (підрозділ 2.1), тому субхвильову зону на тих самих частотах забезпечує локальний резонанс (підрозділ 2.8).

2.8. Локально-резонансна інтерпретація трикомпонентної комірки

Трикомпонентна комірка формує зону за механізмом локального резонансу. Важке ядро вносить локальну інерційну ступінь вільності - власну (локальну) моду коливань ядра, а гумове кільце створює податливий зв'язок між ядром і бетонною матрицею. Поблизу локальної частоти f_0 ця локальна мода взаємодіє з розповсюджувальною (акустичною) гілкою; їхнє відштовхування (розведення гілок) відкриває заборонену зону в околі f_0. Оскільки f_0 визначається інерцією ядра і податливістю кільця, а не періодом ґратки, зона відкривається на субхвильовому масштабі - нижче за брегівську оцінку (2.39) для тієї самої геометрії. Коли локальна частота потрапляє в смугу пропускання, гібридизація локальної моди з акустичною гілкою розщеплює дисперсію на дві гілки, між якими виникає інтервал без розповсюджувальних розв'язків - заборонена зона.

У найпростішому одномодовому описі ядро з кільцем подають осцилятором «маса–пружина» з ефективною масою m_{eff} та ефективною жорсткістю k_{eff}; його власна частота

$$f_0 \approx (1/2\pi)\cdot\sqrt{(k_{eff} / m_{eff})} \qquad (2.40)$$

У першому наближенні ефективна маса визначається інерцією сталевого ядра на одиницю довжини, $m_{eff} \approx \rho_{steel}\cdot\pi\cdot r_{core}^2$, а ефективна жорсткість пропорційна модулю зсуву гуми, $k_{eff} \propto \mu_{rub}$, і залежить від геометрії кільця. Бетонна матриця задає зовнішню в'язь і повністю враховується у спектральній задачі (2.35). Модель (2.40) є інтерпретаційною: вона пояснює механізм і напрям впливу параметрів, але не замінює задачу (2.35), а її ефективну жорсткість не визначають за відомою частотою повної задачі.

Оскільки $f_0 \propto \sqrt{(k_{eff} / m_{eff})}$, положення зони у першому наближенні визначається податливістю гуми та інерцією ядра. Ця інтерпретація задає

фізичну основу для подальшого аналізу ролі матеріальних параметрів; у розділі 5 матеріальна чутливість розглядається на окремій редукованій моделі.

2.9. Просторове згасання у забороненій зоні та зв’язок із вставними втратами

Для недисипативної нескінченної періодичної структури у смузі пропускання кожній частоті відповідає дійсний хвильовий вектор, і хвиля поширюється без згасання. У звичайній спектральній постановці задають дійсний хвильовий вектор k і отримують власні частоти $\omega_j(k)$. В еквівалентній постановці за фіксованої частоти всередині забороненої зони розповсюджувального розв’язку немає, і його описують комплексним хвильовим числом:

$$K = K_r + i\kappa, \quad \kappa = |Im\ K|, \quad [\kappa] = м^{-1} \tag{2.41}$$

де K - розмірний хвильовий вектор, пов’язаний з безрозмірним співвідношенням $k = K \cdot a$; уявна частина κ задає просторове згасання нерозповсюдної (еванесцентної) хвилі.

Амплітудна характеристика поля спадає від комірки до комірки:

$$A_N \approx A_0 \cdot exp(-\kappa \cdot N \cdot a) \tag{2.42}$$

де A_0 і AN - амплітуди на вході та після N комірок.

A - амплітудна характеристика поля: для гармонічної складової $v = \partial u/\partial t = i\omega u$, тому амплітуди переміщення та швидкості мають однаковий просторовий показник згасання, і в розділі 4 як A може використовуватися амплітудна (пікова) швидкість у контрольній точці. Поблизу меж зони $\kappa \to 0$, тому згасання там слабшає.

Просторове згасання зручно виразити через вставні втрати:

$$IL_A = 20 \cdot \lg(A_0/A_N) \approx (20/\ln 10) \cdot к \cdot N \cdot a \approx 8{,}686 \cdot к \cdot N \cdot a \qquad (2.43)$$

Співвідношення (2.43) є трендовим: воно пояснює приблизно лінійне зростання вставних втрат зі збільшенням числа комірок і пов'язує нахил залежності з коефіцієнтом згасання к. Воно не передає абсолютних вставних втрат скінченної конструкції, де діють відбиття від меж, скінченність джерела й приймача та багатомодовість; кількісно вставні втрати визначають у нестаціонарній постановці розділу 4. Нахил залежності вставних втрат від числа комірок у цьому наближенні становить 8,686·к·а на одну комірку, що пов'язує спектральний коефіцієнт згасання з поведінкою скінченного масиву розділу 4.

2.10. Висновки до розділу 2

У розділі сформовано теоретико-методологічну базу дослідження. Наведено такі положення теоретичного апарату:

1. Комбінуванням умов періодичності та антиперіодичності у двох напрямах трансляційної симетрії виявлено чотири типи мод (P1P2, A1P2, P1A2, A1A2); антиперіодичні моди мають ненульові граничні частоти, які можуть задавати межі заборонених зон.

2. Для дискретної двовимірної моделі наведено замкнені дисперсійні співвідношення (2.7), (2.10)–(2.12), які слугують аналітичним орієнтиром і контрольним зіставленням для числових дисперсійних діаграм розділу 3.

3. Уведенням моделі Кельвіна–Фойгта показано перехід від ідеальної забороненої зони до частотно-залежного загасання: антиперіодичні моди загасають швидше за періодичну, що деталізується у підрозділі 2.9 та розділі 4.

4. Довгохвильові неперервні наближення пов'язують дискретну ґратку з континуальним описом, а метод Флоке–Блоха з рядами Фур'є для

волокнистого середовища узгоджено з еталонним ефективним модулем зсуву (контрольне зіставлення з [117]).

5. Розрізнено два механізми формування зони - брегівське розсіювання та локальний резонанс, що визначає вибір дво- або трикомпонентної архітектури.

6. Сформульовано узагальнену скінченноелементну постановку спектральної задачі (2.35) з умовами Флоке–Блоха та контурний критерій виділення зони (2.36); конкретні архітектури, матеріали й розміри задано в розділі 3.

7. Обезрозміренням задачі встановлено масштабний закон $f \propto 1/a$ (2.37)–(2.38): геометрично подібні комірки мають інваріантні добутки меж і ширини зони на розмір комірки; коефіцієнти визначає розділ 3.

8. Запропоновано редуковану локально-резонансну модель (2.40), яка пояснює субхвильовий характер зони трикомпонентної комірки через інерцію ядра та податливість гумового кільця; матеріальну чутливість розглянуто на окремій моделі в розділі 5.

9. Через комплексне хвильове число (2.41)–(2.42) дано трактування зони як стану з еванесцентним просторовим згасанням і зв’язано його зі вставними втратами (2.43): пояснено зростання вставних втрат із числом комірок і послаблення поблизу меж зони (розділ 4).

РОЗДІЛ 3
ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАБОРОНЕНИХ ЗОН У ДВОКОМПОНЕНТНИХ І ТРИКОМПОНЕНТНИХ БЕТОННО-ГУМОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

3.1. Загальна логіка чисельного етапу дослідження

У розділі 2 сформовано теоретичну базу для опису хвильових процесів у періодично-неоднорідних середовищах: дискретні ґраткові моделі, довгохвильові наближення, метод Флоке–Блоха та постановку власної задачі для періодичної комірки. Цей розділ є чисельним продовженням зазначеної методики. Завдання розділу - застосувати загальну постановку розділу 2 до конкретних бетонно-гумових періодичних конструкцій фундаментного типу з реальними матеріальними параметрами і скінченноелементною дискретизацією. Зокрема, узагальнену скінченноелементну постановку спектральної задачі з умовами Флоке–Блоха (підрозділ 2.6, рівняння (2.35)) тут застосовано до конкретних дво- та трикомпонентних бетонно-гумових комірок, а контурний критерій виділення зони використано у формі (2.36).

Розглядаються дві конфігурації, що мають однакову зовнішню бетонну матрицю та однаковий спосіб задання площової частки включення. Перша конфігурація є двокомпонентною: бетонна матриця та кругле гумове включення. Вона використовується як базова брегівська архітектура, у якій заборонена зона формується переважно завдяки періодичному контрасту матеріалів. Друга конфігурація є трикомпонентною: бетонна матриця, гумове кільце та важке сталеве ядро. Вона відповідає локально-резонансній архітектурі, оскільки масивне ядро, занурене у податливий гумовий прошарок, утворює внутрішній резонатор.

У подальшому аналізі ці дві архітектури розглядаються в одній чисельній рамці. Для них задано однаковий маршрут обходу першої зони Бриллюена, однаковий критерій виділення забороненої зони, однаковий

базовий розмір комірки та однакову процедуру перевірки збіжності. Така організація потрібна для того, щоб порівнювати не окремі “зручні” частоти на діаграмах, а однаково визначені інтервали між сусідніми дисперсійними гілками.

У цьому розділі заборонену зону визначають за контурним критерієм: інтервал частот вважається забороненою зоною, якщо на всьому високосиметричному контурі Г-Х-М-Г у ньому немає власних гілок. Такий критерій відповідає стандартній практиці аналізу квадратних періодичних структур. Водночас перевірка по контуру високої симетрії не замінює окремого аналізу всієї площі незвідної частини зони Бриллюена, тому наявність зони за всіма напрямами додатково контролюють за сіткою хвильових векторів. Далі такий інтервал називають забороненою зоною за контурним критерієм, а результати трактують як контурно підтверджені характеристики ідеалізованої нескінченної періодичної конструкції.

Розрахунки виконано для пружної лінійної постановки без демпфування, без урахування ґрунтового середовища, без скінченного масиву комірок і без взаємодії з надбудовою. Таке обмеження є свідомим: спочатку встановлюються власні хвильові властивості нескінченної періодичної конструкції, а вже після цього можливий перехід до часових задач, скінченних масивів, демпфування та взаємодії "ґрунт-фундамент-споруда". Отже, наведені нижче частоти є характеристиками ідеалізованої періодичної системи, а не готовим проектним рішенням для конкретного фундаменту.

3.2. Геометрія періодичних конструкцій і матеріальні параметри

Елементарною розрахунковою одиницею є квадратна комірка періодичності зі стороною a_{total}. Сторона комірки визначає масштаб конструкції, а отже, і частотний діапазон, у який переміщується заборонена зона при геометричному масштабуванні. Для базового дослідження прийнято $a_{total} = 0{,}4$ м. Саме для цього розміру виконано порівняння двокомпонентної та

трикомпонентної архітектур, аналіз впливу площової частки включення та перевірку збіжності сітки.

У двокомпонентній конструкції у центрі бетонної матриці розміщено кругле гумове включення радіуса r_{out}. Площову частку включення визначено за відношенням площі круга до площі квадратної комірки:

$$f_{area} = \pi \cdot r_{out}^2 / a_{total}^2 \tag{3.1}$$

Параметр f_{area} є двовимірним аналогом частки м'якої фази у шаруватих 1D постановках. У цьому розділі він використовується як головна геометрична змінна для обох архітектур, що забезпечує коректність порівняння: при однаковому f_{area} зовнішній радіус гумової області в двокомпонентній і трикомпонентній конструкціях збігається. Співвідношення (3.1) є конкретною формою загального позначення площової частки (2.33) розділу 2.

У трикомпонентній конструкції гумове включення замінено гумовим кільцем із внутрішнім сталевим ядром. Зовнішній радіус кільця дорівнює r_{out}, а радіус ядра позначено r_{core}. Відношення радіуса ядра до товщини гумового кільця задано безрозмірним параметром β:

$$\beta = r_{core} / (r_{out} - r_{core}) \tag{3.2}$$

У базовій конфігурації прийнято $\beta = 1{,}5$, звідки випливає $r_{core} = 0{,}6 \cdot r_{out}$. Значення β у цьому розділі не оптимізується; воно фіксує внутрішню будову локального резонатора, а параметричне дослідження виконується за f_{area} та a_{total}. Це дозволяє не змішувати в одному аналізі три різні впливи: зовнішній розмір включення, товщину гумового кільця та масштаб усієї конструкції. Параметр β у формі (3.2) відповідає загальному позначенню (2.34) розділу 2.

Схеми двокомпонентної та трикомпонентної комірок періодичності наведено на рис. 3.1. На рисунку показано саме розрахункові комірки

періодичності; об’єктом інженерної інтерпретації залишається нескінченна або скінченна періодична конструкція, складена з таких комірок.

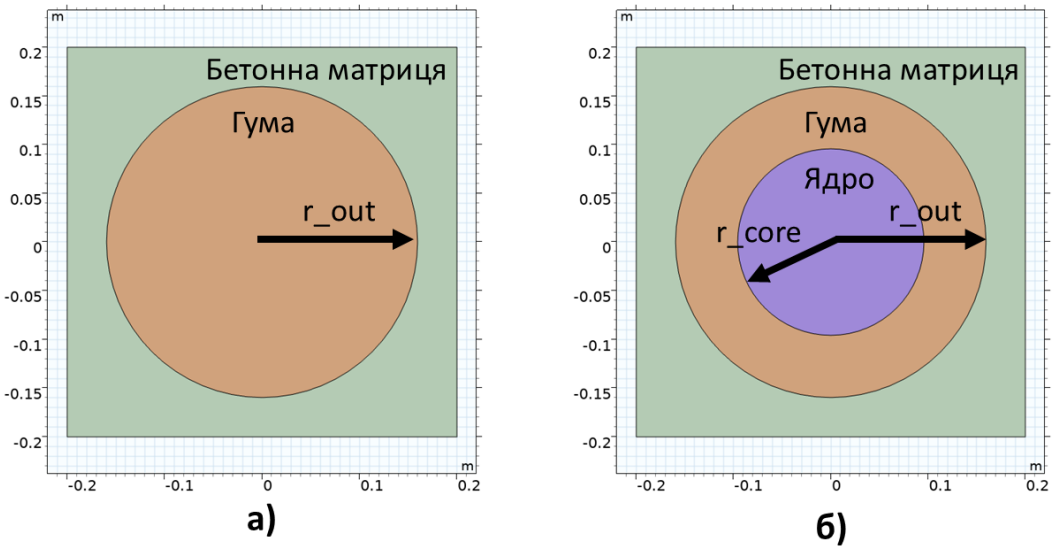

Рисунок 3.1 - Комірки періодичності двокомпонентної та трикомпонентної бетонно-гумових неоднорідних конструкцій: а - бетонна матриця з гумовим включенням; б - бетонна матриця з гумовим кільцем і сталевим ядром

Усі матеріали моделюються як ізотропні лінійно-пружні. Параметри матеріалів наведено в таблиці 3.1. Значення для бетону, гуми та сталі відповідають набору, використаному в чисельних моделях; у подальших розрахунках вони не змінюються.

Таблиця 3.1 - Фізико-механічні характеристики матеріалів

Матеріал	Густина ρ, кг/м³	Модуль Юнга E, Па	Коефіцієнт Пуассона ν
Бетон (матриця)	2300	$3{,}14\cdot10^{10}$	0,33
Гума (включення / кільце)	1300	$1{,}4\cdot10^{5}$	0,463
Сталь (ядро)	7850	$2{,}05\cdot10^{11}$	0,28

Контраст матеріалів є визначальним для обох механізмів. Модуль Юнга бетону перевищує модуль гуми приблизно у $2{,}24\cdot10^{5}$ раза, а модуль зсуву

бетону, обчислений як $\mu = E/[2(1+\nu)]$, перевищує модуль зсуву гуми приблизно у $2{,}47 \cdot 10^5$ раза. Такий контраст забезпечує сильне розсіювання хвиль у двокомпонентній конструкції та створює податливий гумовий підвіс для сталевого ядра у трикомпонентній конструкції.

Для двокомпонентної конструкції збільшення f_{area} означає збільшення радіуса гумового включення та одночасне зменшення обсягу бетонної матриці в межах комірки. Для трикомпонентної конструкції збільшення f_{area} збільшує і зовнішній радіус гумового кільця, і радіус ядра, оскільки β залишається сталим. Таким чином, у трикомпонентній конструкції разом із f_{area} змінюється не лише частка гуми, а й маса локального резонатора. Саме тому очікувана залежність меж зони від f_{area} не зводиться до простої брегівської залежності від періоду.

3.3. Скінченноелементна постановка та параметризація контуру Бриллюена

Чисельна модель реалізує повну плоску задачу теорії пружності у постановці плоскої деформації. На відміну від антиплощинної скалярної моделі розділу 2, тут невідомим є вектор переміщень $u = (u_1, u_2)$. Така постановка описує зв’язані P–SV хвилі у площині перерізу і є природнішою для фундаментної конструкції, ніж суто SH-аналог.

Для кожного фіксованого хвильового вектора Блоха $k = (k_x, k_y)$ на протилежних сторонах комірки задаються квазіперіодичні умови. У матричному вигляді після скінченноелементної дискретизації задача переходить до узагальненої задачі на власні значення:

$$[K(k) - \omega^2 M] \cdot U = 0 \qquad (3.3)$$

де K(k) - матриця жорсткості, що залежить від хвильового вектора через фазові множники умов Флоке–Блоха; M - матриця мас; U - вектор вузлових амплітуд; ω - кругова власна частота.

Усі результати нижче подано у герцах, тобто $f = \omega/(2\pi)$. Задача (3.3) є дискретизованою формою узагальненої спектральної постановки (2.35) розділу 2.

Маршрут обходу першої зони Бриллюена задається одним безрозмірним параметром sbz, що змінюється від 0 до 3. Значення sbz = 0 відповідає точці Г, sbz = 1 - точці X, sbz = 2 - точці M, sbz = 3 - поверненню до Г. За $k_{max} = \pi/a_{total}$ компоненти хвильового вектора визначались так:

$$k_x = \{\ sbz\cdot k_{max},\ 0\le sbz<1;\ \ k_{max},\ 1\le sbz<2;\ \ (3-sbz)\cdot k_{max},\ 2\le sbz\le 3\ \} \qquad (3.4)$$

$$k_y = \{\ 0,\ 0\le sbz<1;\ \ (sbz-1)\cdot k_{max},\ 1\le sbz<2;\ \ (3-sbz)\cdot k_{max},\ 2\le sbz\le 3\ \} \qquad (3.5)$$

Така параметризація забезпечує послідовний обхід Г-X-M-Г без необхідності задавати окремі дослідження для кожної ділянки. Для основних дисперсійних діаграм використано крок $\Delta sbz = 0{,}01$, тобто 301 точку на повному контурі. Контрольні порівняння з кроком $\Delta sbz = 0{,}02$ показали, що для першої забороненої зони трикомпонентної конструкції різниця меж становить лише тисячні частки герца; це пояснюється тим, що екстремуми, які визначають межі першої зони, розташовані у високосиметричних точках Г та X.

Схему маршруту Г-X-M-Г та відповідність параметра sbz показано на рис. 3.2. На відрізку Г-X змінюється k_x при $k_y = 0$; на відрізку X-M зростає k_y при $k_x = k_{max}$; на відрізку M-Г обидві компоненти зменшуються одночасно.

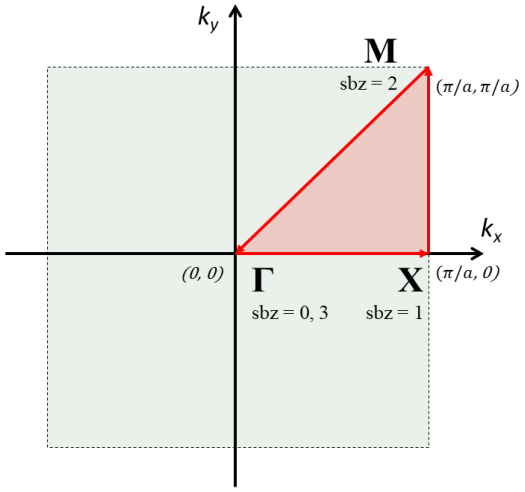

Рисунок 3.2 - Високосиметричний контур Г-Х-М-Г у першій зоні Бриллюена квадратної ґратки; числа біля вершин відповідають значенням параметра sbz

Зведені налаштування чисельної моделі наведено у таблиці 3.2. Окремо підкреслимо, що всі параметричні розрахунки виконувались за однаковою логікою сортування власних частот і виділення інтервалів між сусідніми гілками.

Таблиця 3.2 - Основні налаштування скінченноелементного розрахунку

Параметр	Прийняте значення / опис
Фізичний інтерфейс	Solid Mechanics
Тип плоскої постановки	Plane strain
Тип дослідження	Eigenfrequency
Граничні умови	Floquet periodicity на протилежних сторонах комірки
Маршрут хвильового вектора	Г–Х–М–Г у першій зоні Бриллюена квадратної ґратки
Крок параметра sbz для основних діаграм	0,01
Кількість власних частот у розрахунку	16
Основна сітка для числових таблиць	Finer
Контроль сітки	Fine / Finer / Extra fine для тришарової; Fine / Finer для двошарової

3.4. Критерій виділення забороненої зони та обробка власних частот

Для кожного значення sbz розв’язання (3.3) дає набір власних частот. У розрахунках зберігали 16 власних частот, що суттєво перевищує кількість гілок, необхідну для визначення першої забороненої зони. Зона, яка є предметом основного аналізу, розташована між третьою та четвертою гілками; додаткові гілки зберігались для контролю вищих інтервалів і для уникнення помилкового ототожнення окремої частоти з межою зони.

Алгоритм обробки є таким. Для кожної точки контуру всі власні частоти сортуються за зростанням. Майже нульові акустичні власні частоти в точці Г не вилучаються до нумерації гілок, оскільки їх вилучення зсуває індекси наступних гілок і може привести до помилкового вибору меж. Після сортування для кожної сусідньої пари гілок n та n+1 визначаються найбільше значення нижньої гілки та найменше значення верхньої гілки уздовж усього контуру:

$$f_{low}^{(n)} = \max_{sbz} f_n(sbz), \quad f_{upper}^{(n)} = \min_{sbz} f_{n+1}(sbz) \tag{3.6}$$

$$\Delta f^{(n)} = f_{upper}^{(n)} - f_{low}^{(n)} \tag{3.7}$$

Якщо $\Delta f^{(n)} > 0$, між відповідними гілками існує частотний інтервал, у якому на всьому контурі Г-Х-М-Г немає власних частот. Першим робочим інтервалом у цьому розділі вважається найнижча за частотою пара гілок із додатною шириною. Саме цей критерій відрізняє заборонену зону за контурним критерієм від візуально помітної щілини на окремій ділянці дисперсійної діаграми. Критерій (3.6)–(3.7) відповідає контурному критерію виділення зони (2.36) розділу 2.

Цей момент є суттєвим для трикомпонентної конструкції. У спектрі базової моделі при $a_{total} = 0{,}4$ м і $f_{area} = 0{,}5$ присутня гілка з частотами близько 13,5 Гц. Проте вона не утворює межу повної зони, оскільки над нею на контурі

розташовані наступні гілки, які заповнюють відповідний інтервал. Перша додатна зона за критерієм (3.6)-(3.7) виникає лише між третьою та четвертою гілками і має межі 19,70-27,77 Гц.

Майже вироджені частоти, що відрізняються на одиниці або десятки тисячних герца, не зливалися примусово. Вони залишалися у спектрі як окремі власні гілки, оскільки в задачах із симетрією квадратної комірки виродження є природним. При візуалізації форм мод для вироджених частот обиралась репрезентативна форма, а у тексті робиться застереження, що власні форми можуть бути лінійними комбінаціями виродженої пари.

Оскільки амплітуда власної форми у задачі на власні значення є довільною, кольорові карти переміщень у подальших рисунках інтерпретуються лише як форма руху. Абсолютні значення переміщень у метрах, які автоматично виводяться програмним комплексом, не мають самостійного фізичного змісту без нормування зовнішнього збудження.

3.5. Перевірка збіжності та чисельної стійкості

Перед аналізом параметричних залежностей виконано перевірку збіжності скінченноелементної сітки. Така перевірка є обов’язковою з двох причин. По-перше, резина має коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}463$, тобто поводиться як майже нестисливий матеріал, і її формулювання є чутливим до дискретизації. По-друге, двокомпонентна конструкція формує дуже вузьку першу зону, ширина якої становить лише десяті частки герца; без перевірки сітки таку зону не можна відрізнити від чисельного шуму.

Для трикомпонентної конструкції перевірено три рівні сітки: Fine, Finer та Extra fine. В усіх трьох випадках розрахунок виконано для базової геометрії $a_{total} = 0{,}4$ м, $f_{area} = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5$. Таблиця 3.3 містить кількість елементів, кількість ступенів свободи, орієнтовний час розрахунку та межі першої забороненої зони.

Таблиця 3.3 - Збіжність сітки для трикомпонентної конструкції (частоти в Гц)

Сітка	Елем.	Ступ. Вільн.	Час	f_{low}	f_{up}	Δf
Fine	1082	7728	11	19,70	27,77	8,07
Finer	2336	16570	30	19,70	27,77	8,07
Extra fine	7158	50508	60	19,70	27,77	8,07

Перехід від Fine до Extra fine змінює нижню межу лише на 0,0014 Гц, верхню межу - на 0,0030 Гц, а ширину зони - на 0,0016 Гц. У відносних величинах це менше 0,02 % для ширини зони. Перехід від Finer до Extra fine дає ще менші відмінності: близько 0,00015 Гц для нижньої межі та 0,00034 Гц для верхньої. Отже, для трикомпонентної конструкції межі 19,70-27,77 Гц є стійкими щодо згущення сітки.

Практичний наслідок цієї перевірки полягає у виборі сітки Finer як основної для подальших чисельних таблиць. Сітка Fine також дає практично ті самі межі, але Finer забезпечує більший запас довіри при помірному збільшенні часу розрахунку. Сітка Extra fine використана як контрольна, але її застосування для всіх параметричних варіантів не є доцільним, оскільки приріст точності порівняно з Finer не впливає на фізичні висновки.

Окремо перевірено двокомпонентну конструкцію при $a_{total} = 0,4$ м та $f_{area} = 0,5$. Для неї перша зона значно вужча, тому навіть мала зміна частот могла б принципово змінити висновок. Результати Fine/Finer наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 - Збіжність сітки для двокомпонентної конструкції (частоти в Гц)

Сітка	f_{low}	f_{up}	Δf
Fine	30,098	30,306	0,209
Finer	30,096	30,305	0,209

Для двокомпонентної конструкції різниця між Fine та Finer становить приблизно 0,0018 Гц за межами зони і лише 0,00002 Гц за її шириною. Отже,

вузька зона 30,10–30,30 Гц не є артефактом сітки. Вона справді існує за прийнятим контурним критерієм, але її ширина настільки мала, що з інженерної точки зору вона має зовсім інше значення, ніж зона трикомпонентної конструкції.

Додатково перевірено вплив кроку обходу контуру. Для базової трикомпонентної конструкції результати при Δsbz = 0,02 та Δsbz = 0,01 відрізнялися на тисячні частки герца. Це означає, що для першої зони екстремальні точки не пропущені грубішим кроком: нижня межа задається максимумом третьої гілки у точці Х, а верхня - мінімумом четвертої гілки у точці Г. Проте для основних графіків використано крок 0,01, оскільки він дає плавнішу дисперсійну діаграму і краще візуалізує поведінку гілок.

3.6. Базові дисперсійні діаграми та порівняння двох архітектур

На рис. 3.3 наведено дисперсійні діаграми для двокомпонентної та трикомпонентної конструкцій при a_{total} = 0,4 м і f_{area} = 0,5. Обидві діаграми побудовано за однаковою методикою: для кожної точки контуру Г-Х-М-Г відкладено відсортовані власні частоти, а заборонену зону позначено як інтервал між максимумом нижньої та мінімумом верхньої гілки.

Для двокомпонентної конструкції перша зона розташована в околі 30 Гц і має ширину лише 0,21 Гц. На повній діаграмі вона майже нечитабельна, тому на рис. 3.3, а додано збільшений фрагмент саме цієї ділянки. У спектрі двокомпонентної конструкції наявні й наступні ширші інтервали на вищих частотах, проте вони не є першою зоною і не визначають низькочастотну ефективність базової архітектури. Тому основне порівняння проводиться за першою зоною, а вищі інтервали розглядаються лише як допоміжна інформація про спектр.

Для трикомпонентної конструкції перша зона є значно ширшою і нижчою за частотою: 19,70-27,77 Гц. На рис. 3.3, б червоними маркерами позначено точки, які визначають межі цієї зони. Нижня межа відповідає

максимуму третьої гілки у точці X, а верхня межа - мінімуму четвертої гілки у точці Г. Саме ця верхня гілка в точці Г обмежує інтервал зверху; тому межу не можна задавати за візуальною відстанню між найближчими “плоскими” ділянками діаграми.

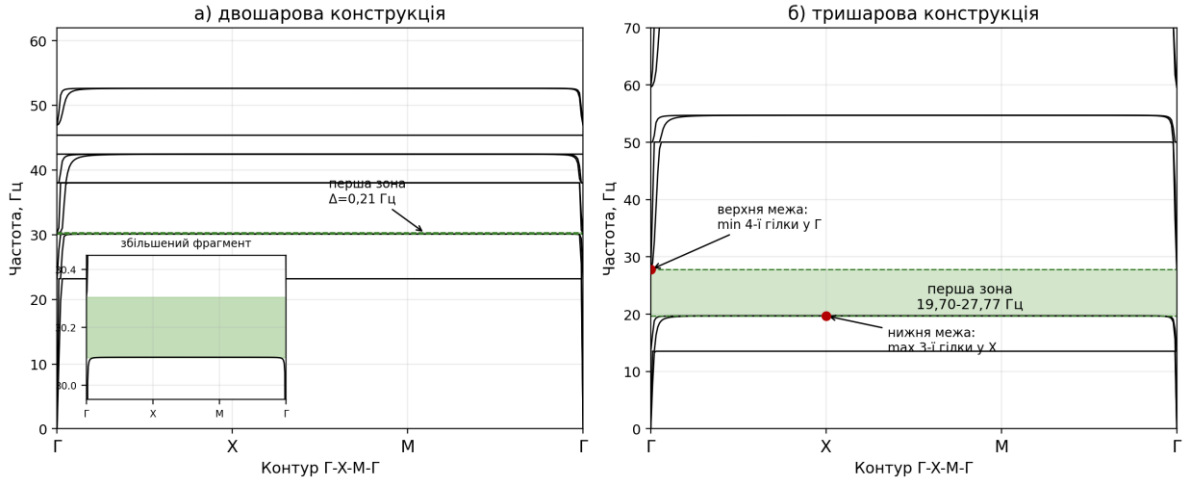

Рисунок 3.3 - Дисперсійні діаграми для двокомпонентної та трикомпонентної конструкцій при a_{total} = 0,4 м і f_{area} = 0,5: а - двокомпонентна конструкція зі збільшеним фрагментом вузької першої зони; б - трикомпонентна конструкція з позначенням точок, що задають нижню та верхню межі першої зони

Таблиця 3.5 - Порівняння першої забороненої зони базових конструкцій (частоти в Гц)

Модель	Гілки	f_{low}	f_{upper}	Δf
Двошарова	3-4	30,10	30,30	0,21
Тришарова	3-4	19,70	27,77	8,07

Порівняння таблиці 3.5 показує, що введення сталевого ядра змінює не тільки положення зони, а й її фізичну природу. Двокомпонентна конструкція має заборонений інтервал, але він дуже вузький: його відносна ширина становить приблизно 0,69 % від нижньої межі. Для трикомпонентної конструкції відносна ширина першої зони становить приблизно 41 %. Таким

чином, за критерієм низькочастотної повної зони трикомпонентна архітектура істотно ефективніша.

Водночас цей результат не означає, що двокомпонентна конструкція є "непрацюючою". Вона демонструє брегівське розсіювання у висококонтрастній бетонно-гумовій системі і формує вузьку повну зону. Її обмеження полягає в тому, що для базового масштабу a_{total} = 0,4 м перша зона занадто вузька для самостійного використання як широкосмуговий низькочастотний фільтр. Трикомпонентна конструкція додає внутрішній резонатор, який переносить робочу зону нижче і різко збільшує її ширину.

Отримані діаграми також показують, чому оцінка за окремою модою є небезпечною. У трикомпонентній конструкції частота близько 13,52 Гц присутня у спектрі, але вона не є нижньою межею повної зони: над нею знаходяться інші гілки, які заповнюють інтервал. Заборонена зона виникає тільки після того, як третя гілка досягає свого максимуму в точці X. Це підтверджує необхідність алгоритмічного, а не візуального, виділення зон.

3.7. Форми власних коливань на межах першої зони

Для пояснення фізичного механізму трикомпонентної конструкції розглянуто власні форми на межах першої зони. Нижня межа 19,70 Гц відповідає точці X, а верхня межа 27,77 Гц - точці Г. На рис. 3.4 показано поле модуля переміщень та напрямки переміщень у вигляді стрілок. Амплітуда власних форм є довільною, тому абсолютні значення переміщень на шкалі не інтерпретуються; важливим є розподіл деформацій і відносний рух компонентів.

На нижній межі зона відкривається за рахунок поступального руху сталевого ядра відносно бетонної матриці. Найбільші переміщення зосереджені в ядрі та в прилеглій області гумового кільця, тоді як бетонна матриця бере участь значно слабше. Така картина відповідає локальному

резонансу масивного ядра у податливому гумовому підвісі: гумове кільце працює як пружний зв’язок, а ядро - як інерційний елемент.

На верхній межі форма руху відрізняється: у гумовому кільці формуються області підвищених переміщень, пов’язані з деформацією кільця і зміною фази відносного руху між ядром та матрицею. У точці Г верхня межа має майже вироджену пару форм, тому конкретний вигляд поля може змінюватися як лінійна комбінація двох симетрично еквівалентних власних форм. Для інтерпретації важливим є не абсолютний напрям окремої стрілки, а загальний факт локалізації деформації в гумовому кільці та відносного руху ядра.

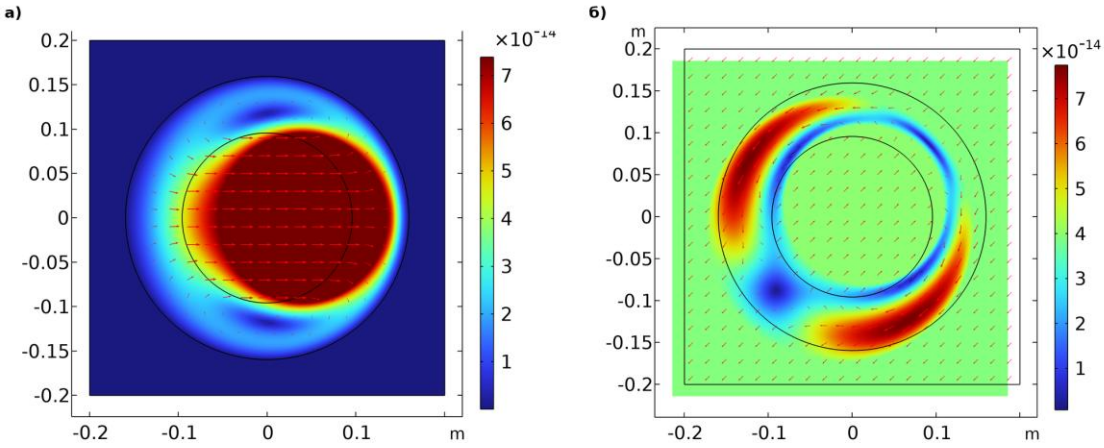

Рисунок 3.4 - Форми власних коливань трикомпонентної конструкції на межах першої забороненої зони: а - нижня межа 19,70 Гц у точці Х; б - верхня межа 27,77 Гц у точці Г. Масштаб амплітуди власної форми довільний і використовується лише для порівняння форми руху

Форми мод підтверджують, що широка зона трикомпонентної конструкції не є звичайним брегівським інтервалом, пов’язаним тільки з періодом ґратки. Її нижня межа визначається локальною динамікою важкого ядра, а не лише інтерференцією хвиль на межах комірок. Це пояснює, чому при тому самому зовнішньому розмірі включення трикомпонентна конструкція дає нижчу і ширшу першу зону, ніж двокомпонентна.

Отже, за даними дисперсійної діаграми та форм мод трикомпонентну конструкцію можна трактувати як локально-резонансну. Цей висновок є обмеженим рамками пружної власної задачі: він не встановлює рівня загасання у скінченному масиві, але пояснює походження частотного інтервалу, який у подальших задачах може перетворюватися на зону ослаблення передачі коливань. Цей механізм узгоджується з редукованою локально-резонансною моделлю (2.40) розділу 2.

3.8. Вплив площової частки включення

Після встановлення базової картини виконано параметричне дослідження впливу площової частки f_{area}. Для трикомпонентної конструкції розрахунок проведено у діапазоні 0,25-0,75 із кроком 0,05, при фіксованих a_{total} = 0,4 м та β = 1,5. Для двокомпонентної конструкції підтверджені розрахункові точки наведено для f_{area} = 0,25; 0,50; 0,75; між ними на графіку показано допоміжну інтерполяцію, яка використовується лише для візуального зіставлення форми трендів.

Таблиця 3.6 узагальнює результати для трикомпонентної конструкції. В усьому розглянутому діапазоні нижня межа зменшується зі зростанням f_{area}: від 27,87 Гц при f_{area} = 0,25 до 16,09 Гц при f_{area} = 0,75. Верхня межа також зменшується, але значно повільніше: від 32,95 до приблизно 27,17 Гц. Саме різна швидкість зміщення меж визначає зростання ширини зони.

Таблиця 3.6 - Вплив площової частки включення на першу зону трикомпонентної конструкції

f_{area}	f_{low}, Гц	f_{upper}, Гц	Δf, Гц
0,25	27,87	32,95	5,08
0,30	25,44	31,13	5,69
0,35	23,55	29,84	6,29
0,40	22,03	28,92	6,89
0,45	20,77	28,24	7,48

Продоваження таблиці 3.6.

f_{area}	f_{low}, Гц	f_{upper}, Гц	Δf, Гц
0,50	19,70	27,77	8,07
0,55	18,79	27,46	8,68
0,60	17,98	27,26	9,28
0,65	17,28	27,16	9,88
0,70	16,65	27,14	10,49
0,75	16,09	27,17	11,08

Зростання ширини зони при збільшенні f_{area} є важливим результатом саме для цієї постановки. У деяких конфігураціях фононних кристалів збільшення площової частки може одночасно знижувати частоту і звужувати інтервал. У дослідженій трикомпонентній бетонно-гумовій конструкції за фіксованого $\beta = 1,5$ нижня межа зміщується вниз швидше, ніж верхня, тому ширина першої зони зростає. Це не слід узагальнювати на всі можливі β або всі типи ґраток; твердження стосується саме розглянутого діапазону параметрів.

Для двокомпонентної конструкції тенденція нижньої межі також є спадною: при збільшенні f_{area} від 0,25 до 0,75 перша зона зміщується з області 42,6 Гц до 24,8 Гц. Її ширина залишається дуже малою - від 0,14 до 0,26 Гц. Перевірка сітки для точки $f_{area} = 0,5$ показала, що ця мала ширина не є чисельною похибкою, але з точки зору низькочастотного захисту така зона не є порівнянною з трикомпонентною.

Графічне зіставлення наведено на рис. 3.5. Для двокомпонентної конструкції заповненими маркерами позначено розрахункові точки, а порожні маркери та пунктир наведено лише як допоміжну інтерполяцію для візуального зіставлення тренду; числові висновки ґрунтуються на розрахованих точках.

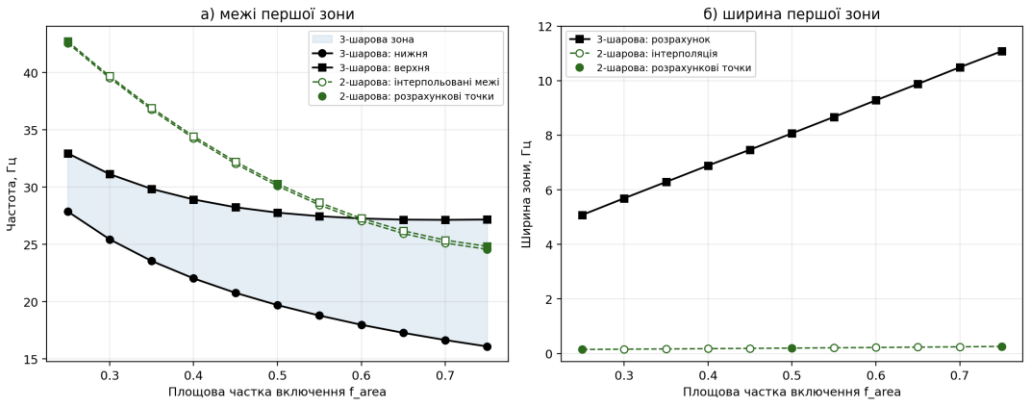

Рисунок 3.5 - Вплив площової частки включення на межі та ширину першої забороненої зони

Дані таблиці 3.6 та рис. 3.5 показують не лише зміщення частот, а й зміну співвідношення між положенням і шириною зони. Для трикомпонентної конструкції у розглянутому діапазоні f_{area} збільшення площової частки одночасно знижує нижню межу і збільшує ширину першої зони. Це сприятлива тенденція саме для прийнятої геометрії з фіксованим $\beta = 1{,}5$, але її не слід автоматично поширювати на інші співвідношення радіусів або на інші типи ґраток.

У двокомпонентній конструкції навіть найвигідніша з трьох розрахованих точок має ширину менше 0,3 Гц. Це означає, що вона може використовуватися як контрольна брегівська конфігурація і як базова архітектура для порівняння, але не є основним кандидатом для широкої низькочастотної зони в межах прийнятої геометрії. Основний практичний інтерес у цьому розділі становить трикомпонентна локально-резонансна конструкція.

3.9. Масштабування розміру комірки періодичності

Окремим етапом досліджено вплив геометричного масштабу a_{total}. На відміну від f_{area}, зміна a_{total} при сталих f_{area} та β не змінює форму комірки: усі розміри збільшуються або зменшуються пропорційно. Для лінійної пружної

задачі з незмінними матеріальними параметрами це означає масштабний закон $f \sim 1/a_{total}$. Прямі розрахунки виконано для a_{total} = 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,6; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 м, що дозволило не лише використати розмірний аналіз, а й перевірити його чисельно. Це є чисельним підтвердженням масштабного закону (2.37)–(2.38) розділу 2; добутки $f \cdot a$ виступають інваріантами подібності. Результати наведено у таблиці 3.7. Добутки $f_{low} \cdot a_{total}$, $f_{upper} \cdot a_{total}$ та $\Delta f \cdot a_{total}$ залишаються сталими з точністю до округлення. Для першої зони трикомпонентної конструкції отримано:

$$f_{low} \approx 7{,}88 / a_{total}; \quad f_{upper} \approx 11{,}11 / a_{total}; \quad \Delta f \approx 3{,}23 / a_{total} \tag{3.8}$$

Таблиця 3.7 - Масштабування першої зони трикомпонентної конструкції при f_{area} = 0,5 та β = 1,5

a_{total}, м	f_{low}, Гц	f_{upper}, Гц	Δf, Гц
0,4	19,70	27,77	8,07
0,6	13,13	18,51	5,38
0,8	9,85	13,89	4,04
1,0	7,88	11,11	3,23
1,2	6,57	9,26	2,69
1,6	4,93	6,94	2,02
2,0	3,94	5,55	1,61
3,0	2,63	3,70	1,08
4,0	1,97	2,78	0,81
5,0	1,58	2,22	0,65

Масштабування має безпосередній інженерний зміст. Для базового розміру 0,4 м перша зона розташована у діапазоні 19,70-27,77 Гц, тобто ближче до техногенно-вібраційних впливів, ніж до нижньої частини сейсмічного діапазону. При збільшенні розміру до 1,0 м зона переходить у діапазон 7,88-11,11 Гц; при a_{total} = 1,2 м - у діапазон 6,57-9,26 Гц. Тобто геометрично подібна конструкція метрового масштабу може розмістити першу зону у верхній частині діапазону 1-10 Гц.

Для нижчих частот потрібні більші розміри комірки. Наприклад, при a_{total} = 3,0 м зона становить 2,63-3,70 Гц, а при a_{total} = 5,0 м - 1,58-2,22 Гц. Важливо не трактувати ці значення як суцільне перекриття всього діапазону 1-4 Гц однією конструкцією. Ідеться про те, що різні геометрично подібні конструкції дозволяють налаштовувати першу зону на різні піддіапазони низьких частот.

На рис. 3.6 показано масштабний зсув зони разом із цільовим діапазоном 1-10 Гц. Графік демонструє, що зміна лише одного параметра - розміру комірки - дає передбачуваний і монотонний перенос робочого інтервалу. Це робить масштабування зручним інструментом попереднього вибору геометрії, але не замінює подальшу перевірку скінченного масиву, взаємодії з ґрунтом і демпфування.

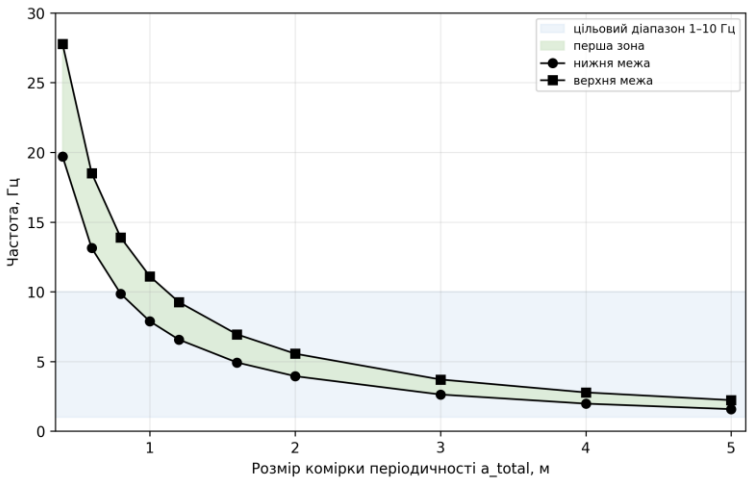

Рисунок 3.6 - Масштабування першої забороненої зони трикомпонентної конструкції за законом $1/a_{total}$; заштриховано діапазон 1-10 Гц

3.10. Інтерпретація результатів і межі застосовності

Сукупність отриманих результатів дозволяє сформулювати кілька обережних, але змістовних висновків. По-перше, двокомпонентна бетонно-гумова конструкція дійсно формує повну заборонену зону за прийнятим контурним критерієм. Перевірка сітки показала, що зона не є чисельним шумом. Проте її ширина в базовій точці становить лише близько 0,21 Гц, тому

вона не може розглядатися як широкий низькочастотний інтервал захисту в межах цієї геометрії.

По-друге, додавання сталевого ядра змінює спектр якісно. Трикомпонентна конструкція при тому самому зовнішньому розмірі включення має першу зону 19,70-27,77 Гц з шириною 8,07 Гц. Це не просте збільшення контрасту, а результат появи внутрішнього локального резонатора. Форми мод показують, що деформації концентруються у гумовому кільці, а ядро рухається відносно матриці, тобто саме внутрішня динаміка включення задає нижню межу зони.

По-третє, зміна f_{area} у розглянутому діапазоні для трикомпонентної конструкції дає одночасне зниження нижньої межі та збільшення ширини. Це означає, що в межах 0,25-0,75 не виявлено внутрішнього оптимуму за критерієм максимальної ширини; найбільша ширина відповідає найбільшій площовій частці з розглянутого набору. Однак такий висновок не означає, що $f_{area} = 0,75$ є універсально оптимальним. За більших часток включення можливі геометричні обмеження, технологічні труднощі, зміна несучої здатності бетонної матриці та інші фактори, які в цьому розділі не враховуються.

По-четверте, масштабний закон $1/a_{total}$ дає простий спосіб перенести робочу зону у потрібний частотний діапазон. Цей закон є наслідком геометричної подібності лінійної пружної задачі, а прямий розрахунок для десяти розмірів підтвердив його чисельно. З практичної точки зору це означає, що на ранньому етапі проектування можна обирати розмір комірки за цільовим діапазоном частот, а потім уточнювати геометрію за f_{area} та β.

Разом з тим отримані результати не слід ототожнювати з фактичною ефективністю реального фундаменту. Нескінченна періодична конструкція описує ідеальну заборонену зону. У скінченному масиві з кінцевою кількістю комірок, демпфуванням гуми, взаємодією з ґрунтом і надбудовою цей інтервал перетворюється на зону загасання з певним коефіцієнтом передачі. Зв’язок із передачею коливань у скінченному масиві розглядається у розділі 4.

Окремо слід зазначити, що в цьому розділі не виконувалась оптимізація за β. Значення β = 1,5 зафіксовано як базове для порівняння архітектур і аналізу f_{area}. Варіювання β може змінити як нижню межу, так і ширину зони, оскільки воно змінює співвідношення маси ядра та жорсткості гумового кільця. Тому результати щодо f_{area} не можна переносити на інші β без додаткових розрахунків.

Нарешті, отримані форми мод не містять інформації про реальний рівень переміщень, оскільки власні форми в задачі на власні значення нормуються довільно. Їх призначення - показати механізм руху і локалізацію деформації, а не передбачити амплітуди при конкретному сейсмічному або техногенному збудженні. Для цього потрібна окрема задача з прикладеним навантаженням і часовою або частотною відповіддю.

Одержані числові результати важливо розглядати не як ізольований набір частот, а як послідовну перевірку фізичної гіпотези, сформульованої у попередніх розділах. Початкова гіпотеза полягає в тому, що бетонно-гумова періодична конструкція може формувати інтервали непропускання пружних хвиль за рахунок поєднання двох механізмів: брегівського розсіювання на періодичному контрасті матеріалів і локального резонансу масивного включення у м’якому прошарку. Розрахунок двокомпонентної конструкції підтверджує перший механізм, але водночас показує його обмеженість для розглянутого масштабу: зона існує, проте її ширина мала. Розрахунок трикомпонентної конструкції показує, що додавання внутрішнього ядра переводить систему в інший режим, де заборонений інтервал визначається не лише періодом, а й внутрішньою динамікою включення.

У цьому сенсі двокомпонентна конструкція виконує роль не слабкого або зайвого варіанта, а необхідної контрольної бази. Без неї неможливо відокремити ефект самого матеріального контрасту бетон-гума від ефекту сталевого ядра. Якщо порівнювати тільки трикомпонентну конструкцію з літературними прикладами або з довільною іншою геометрією, то причина зниження частот залишалася б неоднозначною. Порівняння з

двокомпонентною конструкцією показує, що за однакового зовнішнього радіуса включення вирішальним є не лише збільшення площі м’якої фази, а саме поява внутрішнього інерційного елемента.

Отримане зниження нижньої межі з 30,10 Гц для двокомпонентної конструкції до 19,70 Гц для трикомпонентної не слід оцінювати лише як числове відношення двох частот. Значно важливішим є одночасне збільшення ширини зони з 0,21 до 8,07 Гц. Це означає, що локальний резонатор не тільки зсуває межу вниз, а й створює частотний інтервал, який залишається відкритим уздовж усього високосиметричного контуру. Саме ця комбінація зниження частоти та збільшення ширини робить трикомпонентну архітектуру основним кандидатом для подальшої інженерної перевірки.

Особливої уваги потребує питання про те, яку зону називати першою. У двокомпонентній конструкції вищі за частотою інтервали можуть бути ширшими за першу вузьку зону. Проте для задачі низькочастотного захисту важливим є саме найнижчий інтервал, оскільки він визначає, наскільки рано за частотою конструкція починає блокувати хвилі. Тому в цьому розділі перша зона виділяється незалежно від того, чи є вона найширшою. Такий підхід робить порівняння архітектур послідовним і запобігає вибірковому відбору "зручних" інтервалів.

Для трикомпонентної конструкції аналогічна ситуація виникає з другою зоною близько 54,7-59,6 Гц. Вона також є реальною за прийнятим критерієм, але не використовується як головна характеристика, тому що розташована значно вище за перший локально-резонансний інтервал. У практичних задачах може бути корисним аналізувати і першу, і наступні зони, якщо об’єкт захисту має кілька критичних діапазонів. У межах цього розділу, однак, акцент зроблено на першій зоні, оскільки вона безпосередньо пов’язана з можливістю зниження робочої частоти конструкції.

Слід також пояснити, чому збіжність сітки виявилась настільки доброю, попри великий контраст матеріалів. У розглянутій базовій геометрії гумове кільце не є надмірно тонким: при $\beta = 1,5$ його товщина становить $0,4\ r_{out}$. Це

достатньо для того, щоб трикутна скінченноелементна сітка коректно описувала деформації в гумі навіть на рівні Fine/Finer. Якби β було істотно більшим, гумове кільце стало б тоншим, а сіткова чутливість могла б зрости. Тому висновок про добру збіжність не можна автоматично переносити на всі можливі β.

Позитивна перевірка збіжності для двокомпонентної конструкції також має окремий зміст. Вона показує, що вузька зона не є результатом недостатньої точності, але водночас не робить її інженерно широкою. Це важливе розрізнення: числова достовірність і практична значущість не тотожні. Розрахунок може бути збіжним і правильним, але отриманий інтервал все одно може бути занадто вузьким для застосування без додаткових механізмів загасання або без переходу до іншої архітектури.

Параметр f_{area} у цьому розділі виконує подвійну роль. Для двокомпонентної конструкції він є прямою мірою частки гумового включення. Для трикомпонентної конструкції він задає зовнішній радіус усього включення, а не окремо частку гуми чи сталі. Через фіксоване β збільшення f_{area} одночасно збільшує гумове кільце і сталеве ядро. Саме тому тренд для трикомпонентної конструкції не можна пояснити тільки збільшенням кількості гуми. У міру зростання f_{area} збільшується також маса резонатора, що знижує характерну частоту локального руху.

Зростання ширини зони при збільшенні f_{area} у розглянутому діапазоні не означає, що конструкцію слід безумовно проектувати з максимально можливою площовою часткою. Чисельна модель не враховує несучу здатність бетонної матриці, технологічні зазори, армування, локальні напруження у гумі та контактні умови. За f_{area}, близьких до геометричної межі $\pi/4$, бетонні перемички між сусідніми включеннями стають малими, що може бути неприйнятним для реального фундаменту. Тому результат слід розуміти як хвильовий, а не конструктивний оптимум.

Масштабний закон $1/a_{total}$ є простим, але його пряме чисельне підтвердження в цьому розділі має практичну користь. Воно показує, що при

зміні масштабу не відбувається зміни номера гілок, які формують першу зону: межі залишаються пов’язаними з тією самою парою гілок 3-4, а ширина масштабується разом із частотами. Тому масштабування можна використовувати для попереднього підбору розміру без повторення повного параметричного аналізу для кожного a_{total}.

Водночас масштабування не розв’язує питання маси, вартості та габаритів реальної конструкції. Збільшення a_{total} з 0,4 до 5 м переносить зону до діапазону близько 1,6-2,2 Гц, але одночасно означає радикальне збільшення розміру комірки. Для фундаментної плити це може бути допустимим лише у специфічних об’єктах і за наявності достатнього простору. Тому масштабування слід розглядати як спосіб оцінити досяжний частотний діапазон, а не як готову рекомендацію щодо розміру конструкції.

З точки зору зв’язку з попередніми розділами, результати Розділу 3 підтверджують корисність теоретичного апарату Розділу 2. Дискретні та антиперіодичні моделі пояснюють появу ненульових граничних частот, а чисельна постановка плоскої деформації показує, як подібні механізми реалізуються у конкретній бетонно-гумовій системі. Розділ 3, однак, не є просто числовою ілюстрацією теорії: він дає кількісні межі, перевіряє збіжність і встановлює масштабний закон для конкретної архітектури.

Якщо порівнювати результати з класичним брегівським уявленням, видно, що базовий розмір 0,4 м не може забезпечити сейсмічні частоти через чистий періодичний механізм у жорсткій бетонній матриці. Низькі частоти досягаються лише завдяки різкому зменшенню ефективної жорсткості через гумове кільце та появі локального резонатора. Тому основний фізичний висновок полягає не у тому, що періодична структура "сама по собі" блокує хвилі, а у тому, що спеціальна внутрішня будова включення дозволяє сформувати субхвильовий інтервал непропускання.

Практична інтерпретація результатів є двоступеневою. На першому етапі, виконаному у цьому розділі, визначається частотний інтервал, у якому нескінченна періодична конструкція не має поширюваних мод за контурним

критерієм. Зв’язок цього інтервалу з фактичним зниженням передавальної функції у скінченній конструкції розглядається у розділі 4; перший етап є необхідною передумовою другого.

Ще один важливий аспект - відсутність демпфування у власній задачі. Для гуми демпфування в реальності може бути значним, і воно здатне як посилити фактичне загасання, так і розмити чіткі межі ідеальної забороненої зони. Тому наведені межі 19,70-27,77 Гц слід розуміти як межі пружної зонної структури. У реальному матеріалі очікуваною є не абсолютно заборонена зона, а частотна область підвищеного загасання, положення якої має бути перевірене у в’язкопружній або часовій постановці.

Незважаючи на ці обмеження, результати розділу є достатніми для вибору подальшого напряму. Двокомпонентна архітектура може залишатися базовою для порівняння і для аналізу брегівського механізму, але для низькочастотного захисту основним об’єктом має бути трикомпонентна локально-резонансна конструкція. Подальші розрахунки доцільно спрямувати не на повторення нескінченної власної задачі, а на перевірку скінченного масиву, демпфування, граничних умов і невизначеності матеріальних параметрів.

3.11. Висновки до розділу 3

У розділі виконано чисельне дослідження двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових періодичних конструкцій у межах плоскої задачі лінійної теорії пружності з умовами Флоке–Блоха. На відміну від попереднього теоретичного розділу, де розглядалися антиплощинні та ґраткові моделі як аналітичний апарат, тут використано повну векторну скінченноелементну постановку плоскої деформації.

1. За єдиним критерієм виділення зон встановлено, що двокомпонентна конструкція при $a_{total} = 0{,}4$ м і $f_{area} = 0{,}5$ має першу заборонену зону за контурним критерієм 30,10–30,30 Гц шириною близько 0,21 Гц.

Перевірка сітки Fine/Finer показала, що ця вузька зона не є чисельним шумом, але її практична ширина мала порівняно з трикомпонентною конструкцією.

2. Для трикомпонентної конструкції зі сталевим ядром при a_{total} = 0,4 м, f_{area} = 0,5 і β = 1,5 отримано першу заборонену зону 19,70-27,77 Гц шириною 8,07 Гц. Сходимість цієї зони підтверджено на сітках Fine, Finer та Extra fine; зміна меж при переході від Fine до Extra fine не перевищує 0,02 %. Це дає підстави використовувати сітку Finer як основну для параметричних розрахунків.

3. Аналіз форм власних коливань на межах зони показав локально-резонансний механізм її формування: на нижній межі домінує відносний рух сталевого ядра у податливому гумовому кільці, а на верхній межі істотно деформується гумовий прошарок і змінюється характер зв'язку між ядром та матрицею.

4. Параметричне дослідження f_{area} для трикомпонентної конструкції у діапазоні 0,25-0,75 показало монотонне зниження нижньої межі з 27,87 до 16,09 Гц і зростання ширини зони з 5,08 до 11,08 Гц. Для двокомпонентної конструкції нижня межа також зменшується зі збільшенням площової частки, але ширина першої зони залишається на рівні десятих часток герца.

5. Прямий розрахунок масштабування за a_{total} підтвердив закон геометричної подібності: $f_{low} \approx 7{,}88/a_{total}$, $f_{upper} \approx 11{,}11/a_{total}$, $\Delta f \approx 3{,}23/a_{total}$ (добутки $f_{low}\cdot a$, $f_{upper}\cdot a$, $\Delta f\cdot a$ є інваріантами подібності за (2.37)–(2.38) розділу 2). Завдяки цьому збільшення розміру комірки до 1,0-1,2 м переносить першу зону у верхню частину діапазону 1-10 Гц, а розміри 3-5 м дозволяють налаштовувати її на окремі піддіапазони близько 1,6-3,7 Гц.

6. Отримані результати задають чисельну основу для наступного етапу - переходу від нескінченної періодичної моделі до інженерної оцінки скінченних конструкцій. У цьому розділі встановлено власні хвильові властивості ідеалізованої періодичної системи; демпфування, скінченна кількість комірок, взаємодія з ґрунтом і надбудовою та перевірка у часовій області мають розглядатися окремо.

РОЗДІЛ 4
ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЛАБЛЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У СКІНЧЕННОМУ МАСИВІ ТРИКОМПОНЕНТНИХ БЕТОННО-ГУМОВИХ КОМІРОК У НЕСТАЦІОНАРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

4.1. Загальна логіка переходу від забороненої зони до ослаблення в скінченному масиві

У розділі 3 дисперсійний аналіз нескінченної періодичної конструкції встановив наявність першої забороненої зони за контурним критерієм трикомпонентної бетонно-гумової комірки. Для базового розміру комірки a_{total} = 0,4 м ця зона займає інтервал 19,70–27,77 Гц (ширина 8,07 Гц, центр 23,735 Гц). Заборонена зона є властивістю ідеалізованого об'єкта: нескінченної періодичної ґратки, розглянутої у моделі Блоха на власних частотах, для всіх напрямів поширення одночасно.

Реальна інженерна конструкція не є нескінченною. Тому окремим завданням є перевірка того, чи зберігається передбачене зонним аналізом частотне «вікно» придушення, коли періодичність обмежено невеликою кількістю комірок, збудження має імпульсний (а не гармонічний усталений) характер, а замість власних частот розглядається передача коливань між фіксованими точками. Заборонена зона і ослаблення передачі у скінченному масиві - це різні об'єкти: перший стосується нескінченної структури та спектра Блоха, другий - скінченного масиву, конкретного імпульсу, обраних точок реєстрації та порівняння з еталоном. У розділі 4 результати спектрального аналізу трикомпонентної періодичної комірки, отримані в розділі 3, використано як вихідні дані для побудови скінченної нестаціонарної моделі. Розгляд скінченного масиву дає можливість оцінити передачу коливань за прийнятої геометрії, граничних умов, типу збудження та способу обробки відгуку.

У підрозділі 4.2 наведено нестаціонарну постановку задачі теорії пружності, що розв’язується методом скінченних елементів, та описано 2D-геометрію скінченного масиву.

Далі вводиться метрика передачі за піковою швидкістю та чесно окреслюється, чого ця метрика не показує (4.3). Потім подано базовий випадок a_{total} = 0,4 м (4.4), вплив кількості комірок уздовж напряму поширення як головний конструктивний аргумент (4.5), масштабування розміру комірки до нижчих частот (4.6) і чисельну перевірку стійкості за кроком інтегрування (4.7). Підрозділ 4.8 узагальнює результати та явно фіксує межі застосовності; питання чутливості до розкиду параметрів і невизначеності винесено в розділ 5 і тут не розглядається.

4.2. Математична постановка нестаціонарної задачі та геометрія скінченного масиву

Модель реалізує повну плоску векторну задачу теорії пружності у постановці плоскої деформації (plane strain), нестаціонарну в часі. Невідомим є вектор переміщень u = (u_x, u_y). Власний скінченноелементний солвер не виводиться; нижче наведено саме крайову задачу, яку МСЕ розв'язує у часовій області.

Рівняння руху суцільного середовища без об'ємних сил:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma \tag{4.1}$$

де ρ - густина матеріалу, σ - тензор напружень.

Геометрично лінійний зв'язок деформацій із переміщеннями:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \tag{4.2}$$

Матеріал у кожному домені - лінійно-пружний ізотропний, із законом Гука

$$\sigma = \lambda\, tr(\varepsilon)\, I + 2\mu\varepsilon \tag{4.3}$$

де I - одиничний тензор, tr(ε) - слід тензора деформацій, а параметри Ляме виражаються через модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{4.4}$$

Умова плоскої деформації означає рівність нулю поздовжньої деформації:

$$\varepsilon_{zz} = 0 \tag{4.5}$$

При цьому поздовжнє напруження σ_{zz} у загальному випадку не дорівнює нулю; саме це відрізняє постановку плоскої деформації (plane strain) від плоского напруженого стану (plane stress).

Початкові умови - нульові переміщення та нульова швидкість у всій області:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{4.6}$$

Збудження задається як межове навантаження на лівій межі області у вигляді імпульсу Рікера. Часова форма імпульсу та положення його центра в часі:

$$r(t) = \left[1 - 2\left(\pi f_1 (t - t_c)\right)^2\right] exp\left[-\left(\pi f_1 (t - t_c)\right)^2\right], \quad t_c = \frac{1}{f_1} \tag{4.7}$$

де f1 - центральна частота імпульсу, $t_c = 1/f_1$ - момент його піка.

Амплітудний профіль навантаження на межі:

$$p(t) = A\, r(t) \tag{4.8}$$

з амплітудою A = 1 кПа, прикладеною як горизонтальна компонента поверхневого навантаження (F_x) на лівій межі. Оскільки модель лінійно-пружна, коефіцієнти передачі та вставні втрати не залежать від амплітуди навантаження, тож значення A = 1 кПа є лише зручним масштабним множником. На правій, верхній та нижній межах задано низьковідбивні (low-reflecting) умови, які відводять енергію з розрахункової області та імітують необмежене середовище.

Після просторової скінченноелементної дискретизації крайова задача переходить у напівдискретну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку за часом:

$$M\,\frac{d^2q}{dt^2} + K\,q = F(t) \tag{4.9}$$

де M - матриця мас, K - матриця жорсткості, q - вектор вузлових переміщень, F(t) - вектор вузлових навантажень від імпульсу Рікера.

У системі свідомо відсутня матриця демпфування C: матеріального (в'язкого) демпфування в моделі не вводили, а відведення енергії забезпечується виключно низьковідбивними межами. Це підкреслюється окремо, оскільки відсутність C означає, що спостережуване ослаблення не пов'язане з уведеним матеріальним демпфуванням, а зумовлене хвильовою взаємодією з неоднорідною скінченною структурою.

Геометрія є відтворюваною. Масив складається з $N_x \times N_y$ трикомпонентних комірок (бетонна матриця, гумове кільце, сталеве ядро); число рядів уздовж фронту фіксоване, $N_y = 5$, а число комірок уздовж напряму

поширення N_x змінюється у відповідних серіях. Поперечний розмір зайнятої масивом смуги дорівнює $L_y = N_y \cdot a_{total}$. Зліва й справа від масиву розташовані бетонні буфери, що відокремлюють масив від межі навантаження та від низьковідбивної межі. Точки реєстрації лежать на осьовій лінії $y = L_y/2$: вхідна точка CP_{IN} - перед масивом на відстані однієї комірки від його лівого краю, вихідна точка CP_{OUT} - за масивом. Для базового випадку $a_{total} = 0{,}4$ м, $N_x = 5$ координати становлять $CP_{IN} = (-0{,}4;\ 1{,}0)$ м і $CP_{OUT} = (2{,}4;\ 1{,}0)$ м. Координати решти серій наведено у таблиці 4.1; загальні правила - $CP_{IN} = (-a_{total};\ L_y/2)$, $CP_{OUT} = ((N_x+1)\cdot a_{total};\ L_y/2)$.

Принципову схему розрахункової області для базового випадку $N_x = 5$, $N_y = 5$ показано на рис. 4.1: джерело навантаження зліва, масив 5 рядів × N_x стовпців, осьові точки CP_{IN} та CP_{OUT}, низьковідбивні межі праворуч, зверху та знизу, а також збільшене зображення однієї комірки з матеріальними шарами.

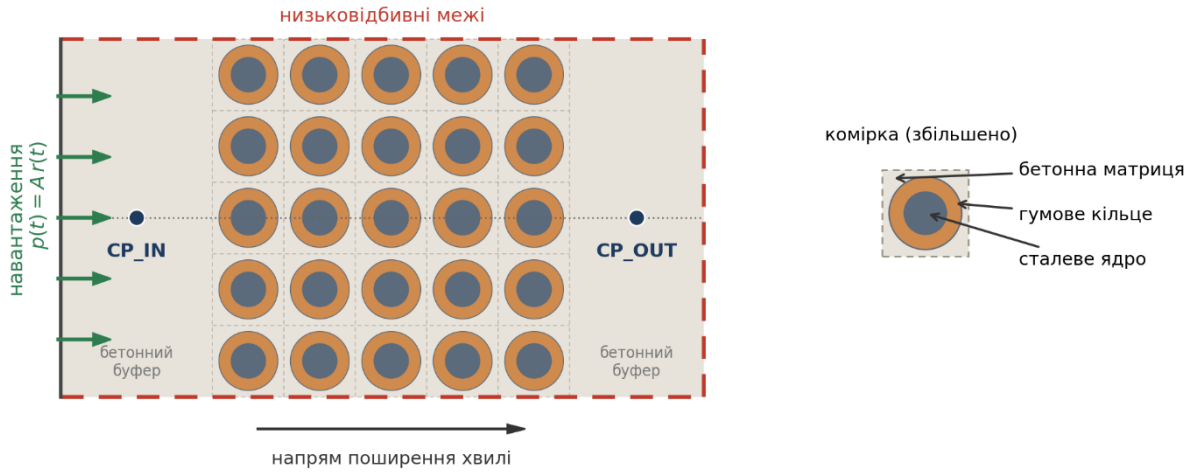

Рисунок 4.1 - Принципова схема скінченного масиву трикомпонентних комірок із буферами, осьовими точками реєстрації CP_{IN}/CP_{OUT} та низьковідбивними межами (базовий випадок Nx = 5, Ny = 5); праворуч - збільшена комірка

Еталонна модель повністю збігається з масивом за геометрією, сіткою, точками реєстрації, межовими умовами та формою імпульсу Рікера; різниця лише в тому, що всі домени мають властивості бетону. Таке порівняння

дозволяє виділити вплив неоднорідної коміркової структури відносно бетонного еталона.

Матеріальні параметри відповідають розділу 3: бетон - $\rho = 2300$ кг/м³, $E = 3{,}14 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0{,}33$; гума - $\rho = 1300$ кг/м³, $E = 1{,}4 \cdot 10^{5}$ Па, $\nu = 0{,}463$; сталь - $\rho = 7850$ кг/м³, $E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}28$. Архітектурні параметри комірки: $f_{area} = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5$. Таким чином, у моделі використано трикомпонентну комірку з геометричними та матеріальними параметрами, визначеними у розділі 3.

Таблиця 4.1 - Геометрія та координати точок реєстрації за серіями розрахунків (координати в метрах)

Серія	a_{total}, м	Nx	Ny	Ly, м	CP_{IN} (x; y)	CP_{OUT} (x; y)
базова	0,4	5	5	2,0	(−0,4; 1,0)	(2,4; 1,0)
вплив Nx	0,4	3	5	2,0	(−0,4; 1,0)	(1,6; 1,0)
вплив Nx	0,4	7	5	2,0	(−0,4; 1,0)	(3,2; 1,0)
масштаб	1,2	5	5	6,0	(−1,2; 3,0)	(7,2; 3,0)
масштаб	3,0	5	5	15,0	(−3,0; 7,5)	(18,0; 7,5)

Серії розрахунків організовано так: за частотою (сканування f_1 у базовому випадку), за числом комірок N_x (3, 5, 7), за масштабом комірки a_{total} (0,4; 1,2; 3,0 м) і окремий контроль кроку інтегрування за часом.

4.3. Метрика передачі за піковою швидкістю та її межі

Передачу коливань крізь масив оцінювали за піковою швидкістю, отриманою чисельним диференціюванням сигналу переміщення $u_x(t)$ за часовою сіткою у точках реєстрації:

$$v(t) = \frac{du_x}{dt} \tag{4.10}$$

Коефіцієнт передачі визначається як відношення піків швидкості на виході та вході:

$$T = \max_t |v_{x,out}(t)| / \max_t |v_{x,in}(t)| \quad (4.11)$$

За цією самою формулою (4.11) коефіцієнт передачі обчислюється окремо для метаматеріального масиву (T_{array}) - за сигналами у масиві, і для бетонної еталонної моделі (T_{ref}) - за сигналами еталонної моделі; різниця лише у властивостях середовища, тоді як збудження, точки реєстрації та спосіб обробки тотожні. Інтегральний показник придушення - вставні втрати:

$$IL = 20\, log_{10}\left(\frac{T_{ref}}{T_{array}}\right) \quad (4.12)$$

Множник 20 використано тому, що порівнюються амплітудні величини швидкості, а не енергія. Значення IL > 0 означає, що масив ослаблює передачу більшою мірою, ніж однорідна бетонна еталонна модель; IL ≈ 0 відповідає практично однаковій передачі, а IL < 0 - дещо більшій передачі в масиві, ніж в еталоні. IL є амплітудною вхід-вихідною метрикою, узгодженою з амплітудною формою вставних втрат (2.43) розділу 2.

Метрика передачі тут є вхід-вихідною характеристикою: T і IL визначаються за сигналами у двох осьових точках CP_{IN} та CP_{OUT}. Сигнал у CP_{IN} може містити не лише падаючу, а й частково відбиту складову, тому T розглядається як вхід-вихідне відношення, а не як чистий коефіцієнт проходження. Пікова швидкість, на якій ґрунтується T, відображає максимальну динамічну відповідь і не збігається з енергетичною або середньоквадратичною (RMS) передачею; перехід до енергетичного аналізу є природним продовженням роботи. Відповідно, інтерпретація розділу спирається на тренди та порівняння з еталоном тієї самої геометрії. Повний перелік меж застосовності зведено в підрозділі 4.8.

4.4. Базовий випадок a_{total} = 0,4 м: частотна залежність IL та часові сигнали

Частотну залежність вставних втрат для базового масиву (a_{total} = 0,4 м, N_x = 5) показано на рис. 4.2 і зведено в таблиці 4.2. Заливкою позначено лише першу заборонену зону за контурним критерієм розділу 3 (19,70–27,77 Гц). У межах цієї зони стійке ослаблення відносно еталона спостерігається переважно в інтервалі 20–26 Гц, тобто в нижній і центральній частині зони, де IL становить близько 1,7–2,1 дБ. Поблизу верхньої межі зони ефект спадає: на 28 Гц IL ≈ −0,04 дБ, на 30 Гц IL ≈ 0,27 дБ. Ділянку 28–30 Гц далі використовуємо як локальний контроль майже вільної передачі безпосередньо над верхньою межею першої зони; вона не є репрезентативною для всіх позазонних частот, оскільки в інших інтервалах виникають локальні максимуми IL (зокрема 35–40 Гц, див. нижче).

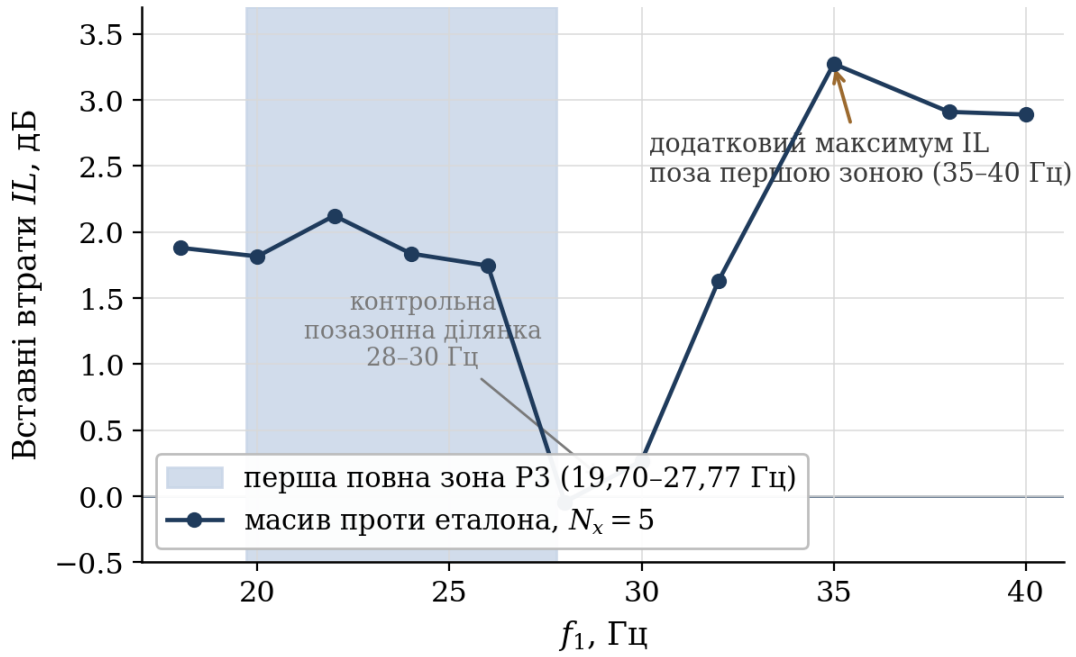

Рисунок 4.2 - Вставні втрати IL(f) базового масиву (a_{total} = 0,4 м, Nx = 5); заливкою позначено першу заборонену зону за контурним критерієм розділу 3, стрілкою - додатковий максимум IL за її межами, окремо відзначено контрольну позазонну ділянку 28–30 Гц

Таблиця 4.2 - Коефіцієнти передачі та вставні втрати базового масиву (a_{total} = 0,4 м, Nx = 5)

f, Гц	T_{array}	T_{ref}	IL, дБ
18	0,693	0,860	1,881
20	0,702	0,866	1,816
22	0,658	0,840	2,124
24	0,701	0,866	1,837
26	0,715	0,874	1,746
28	1,025	1,020	−0,044
30	0,951	0,981	0,268
32	0,716	0,864	1,630
35	0,499	0,728	3,274
38	0,546	0,764	2,910
40	0,549	0,766	2,890

За межами першої зони за контурним критерієм, в околі 35–40 Гц, спостерігається додатковий максимум IL: на 35 Гц IL ≈ 3,27 дБ, на 38 і 40 Гц - близько 2,9 дБ. Цей додатковий максимум IL за межами першої зони за контурним критерієм розділу 3 є локальним підвищенням вставних втрат поза першою зоною й не позначається як окрема заборонена зона. Оскільки і за абсолютним значенням, і в розрахунку на одну комірку це підвищення перевищує ослаблення всередині зони, його не розглядають як кількісний показник зіставлення із зонною картиною розділу 3.

Цю обставину варто проговорити прямо, упереджувально. Більші значення IL за межами першої зони за контурним критерієм Р3 не суперечать дисперсійному аналізу: заборонена зона за контурним критерієм - консервативний критерій для нескінченної структури й усіх напрямів поширення, тоді як у Р4 оцінюється точкова передача через скінченний масив у заданому напрямі за імпульсного збудження. Тому додаткові локальні максимуми IL поза першою зоною можливі, але не позначаються як окрема заборонена зона; механізм додаткових максимумів у цьому розділі окремо не аналізувався. Можливими причинами додаткового максимуму є скінченна

довжина масиву, моди й резонанси скінченної структури та частотно-залежна взаємодія імпульсу з масивом; їх розрізнення є предметом окремого аналізу.

Зіставлення із зонною картиною розділу 3 спирається на сукупність ознак: ослаблення в межах зони спостерігається, воно систематично зростає зі збільшенням числа комірок (підрозділ 4.5) і контрастує з майже прохідною контрольною ділянкою 28–30 Гц.

Оскільки розрахунок виконується безпосередньо в часовій області, ослаблення доцільно проілюструвати за самими сигналами. На рис. 4.3 наведено форму імпульсу Рікера для центральних частот 24 Гц (усередині першої зони розділу 3) та 30 Гц (контрольна частота), а також відповідні сигнали переміщення $u_x(t)$ у точках $СР_{IN}$ і $СР_{OUT}$. На частоті 24 Гц вихідний сигнал помітно менший за вхідний, що відповідає ослабленню; на частоті 30 Гц вхідний і вихідний сигнали близькі, тобто масив у цій точці майже прохідний. Сигнали мають огрублений вигляд через крок дискретизації за часом, тож саме пікова швидкість, а не дрібні деталі форми, береться за основу метрики.

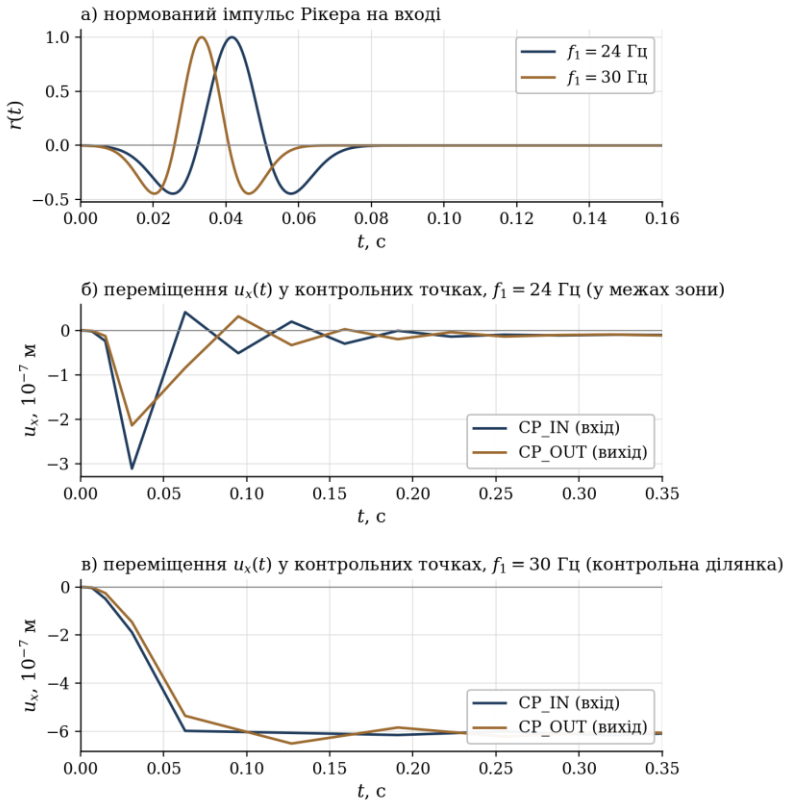

Рисунок 4.3 - Імпульс Рікера (а) та сигнали переміщення ux(t) у точках CP_{IN} і CP_{OUT} для базового масиву: (б) центральна частота 24 Гц - вихід нижчий за вхід (ослаблення); (в) 30 Гц - вхід і вихід близькі (майже прохідна контрольна ділянка)

4.5. Вплив числа комірок уздовж напряму поширення

Ключовий конструктивний параметр - число комірок уздовж напряму поширення N_x. На рис. 4.4 і в таблиці 4.3 наведено IL(f) для N_x = 3, 5, 7 за незмінного a_{total} = 0,4 м. У межах першої зони за контурним критерієм розділу 3 і в околі додаткового максимуму вставні втрати монотонно зростають зі збільшенням N_x. Так, на 24 Гц IL зростає приблизно 1,07 → 1,84 → 2,62 дБ для N_x = 3/5/7; на 22 Гц - 1,27 → 2,12 → 2,99 дБ; на 35 Гц - 2,07 → 3,27 → 4,38 дБ. На контрольній ділянці 30 Гц IL залишається малою (0,15 → 0,27 → 0,40 дБ), тобто прохідність контрольної частоти зберігається при всіх N_x.

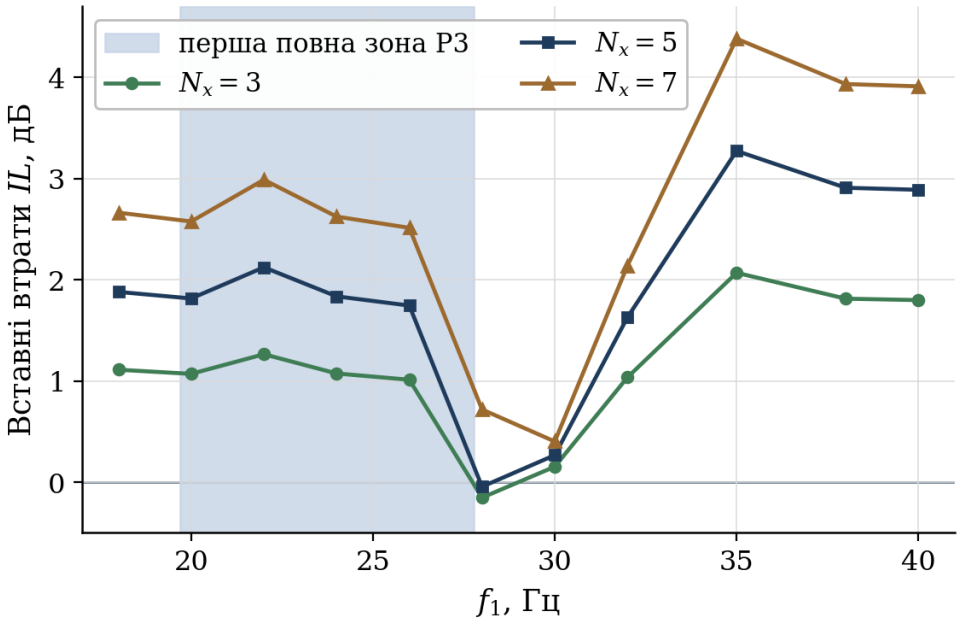

Рисунок 4.4 - Вплив числа комірок Nx = 3, 5, 7 на вставні втрати IL(f) за a_{total} = 0,4 м; заливкою позначено першу заборонену зону за контурним критерієм розділу 3

Таблиця 4.3 - Вставні втрати IL за різного числа комірок Nx (a_{total} = 0,4 м)

f, Гц	IL (Nx=3), дБ	IL (Nx=5), дБ	IL (Nx=7), дБ
20	1,071	1,816	2,577
22	1,265	2,124	2,989
24	1,075	1,837	2,625
26	1,013	1,746	2,514
28	−0,152	−0,044	0,719
30	0,154	0,268	0,403
35	2,070	3,274	4,383
38	1,814	2,910	3,935
40	1,800	2,890	3,912

Абсолютний рівень вставних втрат для короткого масиву помірний - порядку 2 дБ у межах зони. Це слід трактувати чесно: короткий бар'єр із кількох комірок дає помірний ефект, а не різке відсікання. Водночас принципово важливим є саме систематичний ріст IL зі збільшенням N_x: довжина масиву уздовж напряму поширення є інженерним важелем, яким ослаблення можна нарощувати. Оскільки IL - логарифмічна величина

(децибели), некоректно описувати її приростами «у рази»; коректне формулювання - конкретними значеннями, наприклад 1,07 → 1,84 → 2,62 дБ на 24 Гц для N_x = 3/5/7. Систематичність цього тренду в межах зони, на тлі майже незмінно малої IL на контрольній ділянці, і є головним аргументом розділу: масив діє частотно-селективно у напрямку розглянутого поширення. Зауважимо, що зі зміною N_x одночасно змінюються довжина бар'єра та положення точки CP_{OUT}, тож одержаний результат відображає ефект збільшення довжини бар'єра загалом. Монотонне зростання IL відносно еталона тієї самої геометрії спостерігається в усіх серіях і відповідає очікуваному впливу довжини бар'єра, а не зміні кількості включень за незмінної траси.

4.6. Масштабування розміру комірки до нижчих частот

За законом подібності з розділу 3 межі першої зони обернено пропорційні розміру комірки a_{total}. Це дозволяє переносити частотний діапазон ослаблення вниз, збільшуючи комірку. Перевірено два масштаби: a_{total} = 1,2 м і a_{total} = 3,0 м (в обох - N_x = 5, N_y = 5).

Для a_{total} = 1,2 м масштабована зона розділу 3 становить 6,57–9,26 Гц (центр ≈ 7,91 Гц); густий розрахунок виконано для 4–12 Гц із кроком 0,5 Гц при t_{end} = 4 с. Результати (рис. 4.5, таблиця 4.4) показують перенесення області помітного ослаблення в діапазон одиниць герц. Усередині масштабованої зони помітна майже прохідна ділянка на 7,0–7,5 Гц (IL від −0,19 до 0,21 дБ), тоді як основне ослаблення зміщене до верхньої частини зони та за її верхню межу: на 8,5 Гц IL ≈ 3,14 дБ, а в діапазоні 9–12 Гц IL тримається на рівні 2,4–3,0 дБ. Це не повне співпадіння з масштабованою зоною, але свідчить про часткове перенесення частотно-вибіркового ослаблення до нижчих частот.

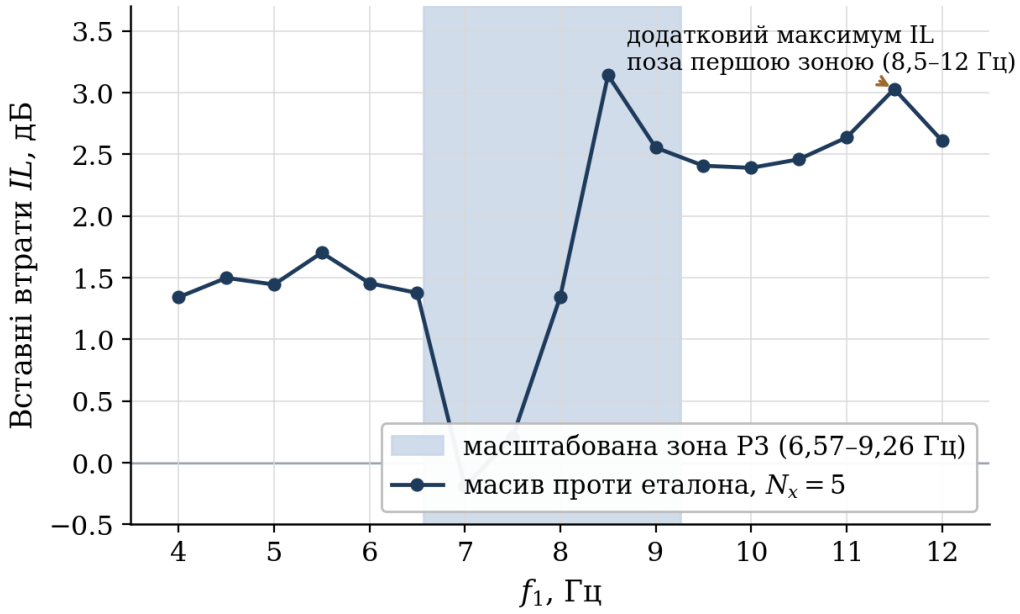

Рисунок 4.5 - Вставні втрати IL(f) для a_{total} = 1,2 м; заливкою позначено масштабовану першу зону розділу 3 (6,57–9,26 Гц), стрілкою - додатковий максимум IL за її межами

Таблиця 4.4 - Вставні втрати при масштабуванні a_{total} = 1,2 м (Nx = 5; наведено репрезентативні частоти; повний набір точок використано для побудови рис. 4.5)

f, Гц	T_{array}	T_{ref}	IL, дБ
4,0	0,772	0,901	1,342
5,5	0,720	0,876	1,703
6,5	0,771	0,903	1,377
7,0	1,038	1,015	−0,191
7,5	0,962	0,985	0,207
8,0	0,765	0,893	1,347
8,5	0,519	0,745	3,142
9,0	0,596	0,800	2,555
10,0	0,619	0,815	2,391
11,0	0,585	0,792	2,637
11,5	0,533	0,756	3,030
12,0	0,593	0,801	2,611

Для a_{total} = 3,0 м масштабована зона розділу 3 становить 2,63–3,70 Гц (центр ≈ 3,16 Гц); густий розрахунок виконано для 1,5–5 Гц із кроком 0,25 Гц

при t_{end} = 8 с. Результати (рис. 4.6, таблиця 4.5) переносять ефект у діапазон одиниць герц. Найкраще узгоджена з масштабованою зоною ділянка - приблизно 2,25–3,25 Гц, де IL становить близько 1,66–2,03 дБ. Поблизу 3,5 Гц знову з'являється майже прохідна ділянка (IL ≈ −0,17 дБ), а додатковий максимум IL за межами зони припадає на 4,25–5 Гц (до ≈ 3,58 дБ на 4,25 Гц). Отже, найкраще узгодження з масштабованою зоною спостерігається на 2,25–3,25 Гц, проте всередині самої зони є майже прохідна точка близько 3,5 Гц, тож збіг із зоною не повний.

Рисунок 4.6 - Вставні втрати IL(f) для a_{total} = 3,0 м; заливкою позначено масштабовану першу зону розділу 3 (2,63–3,70 Гц), стрілкою - додатковий максимум IL за її межами

Таблиця 4.5 - Вставні втрати при масштабуванні a_{total} = 3,0 м (Nx = 5; репрезентативні частоти; повний набір точок використано для побудови рис. 4.6)

f, Гц	T_{array}	T_{ref}	IL, дБ
1,50	0,839	0,935	0,945
1,75	1,008	1,003	−0,043
2,25	0,706	0,868	1,791

Продовження таблиці 4.5.

f, Гц	T_{array}	T_{ref}	IL, дБ
2,75	0,672	0,849	2,025
3,00	0,714	0,873	1,747
3,25	0,728	0,881	1,658
3,50	1,038	1,019	−0,165
3,75	0,954	0,982	0,253
4,25	0,462	0,698	3,583
4,50	0,541	0,760	2,954
4,75	0,562	0,776	2,795
5,00	0,565	0,777	2,776

Аналогічно до базового масштабу, додатковий максимум IL за межами першої зони за контурним критерієм з'являється і на інших масштабах, зміщуючись униз разом зі зменшенням частотного діапазону при збільшенні a_{total}. Як і раніше, він не ототожнюється з новою забороненою зоною: заборонена зона за контурним критерієм є консервативним критерієм для нескінченної структури й усіх напрямів, тоді як тут оцінюється точкова передача через скінченний масив у заданому напрямі за імпульсного збудження.

Щоб не подавати аналітичне масштабування зони та спостережувані в P4 інтервали як один тип даних, їх розділено. На рис. 4.7 показано суто аналітичну залежність меж масштабованої першої зони розділу 3 від a_{total}, а спостережувані в нестаціонарній моделі інтервали та додаткові максимуми зведено окремо в інтерпретаційній таблиці 4.6.

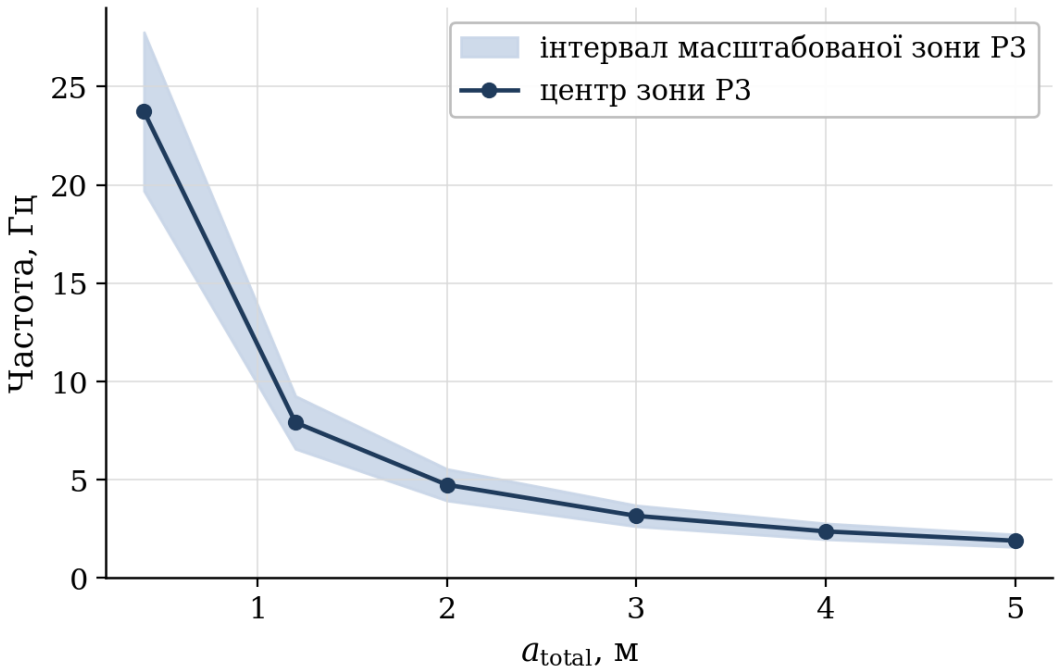

Рисунок 4.7 - Аналітичне масштабування меж першої забороненої зони розділу 3 залежно від розміру комірки a (за законом подібності); спостережувані в P4 інтервали наведено окремо в таблиці 4.6

Таблиця 4.6 - Зведене зіставлення масштабованої зони розділу 3 та спостережуваних інтервалів IL у нестаціонарній моделі (a - розмір комірки a_{total})

a, м	масштабована зона P3, Гц	ділянки додатного IL, Гц	локальні максимуми IL, Гц
0,4	19,70–27,77	≈20–26 (IL ≈ 1,7–2,1 дБ)	≈35–40 (до ≈3,3 дБ)
1,2	6,57–9,26	4–6,5 та 8–9 - помірне IL; 7–7,5 - майже прохідна ділянка	8,5–12 (до ≈3,1 дБ)
3,0	2,63–3,70	≈2,25–3,25 (IL ≈ 1,7–2,0 дБ)	≈4,25–5 (до ≈3,6 дБ)

4.7. Чисельна перевірка стійкості за кроком інтегрування

Щоб переконатися, що результат не є артефактом часової дискретизації, для контрольного випадку (a_{total} = 0,4 м, N_x = 5, f_l = 24 Гц) розрахунок повторено з кроком інтегрування вдесятеро меншим. Результати наведено в таблиці 4.7.

Таблиця 4.7 - Контроль кроку інтегрування за часом (a_{total} = 0,4 м, Nx = 5, f1 = 24 Гц)

Варіант	T_{array}	T_{ref}	IL, дБ
dt = 0,001 с	0,700715	0,865727	1,83679
dt = 0,0001 с	0,700606	0,865724	1,83811

Різниця IL між кроками 0,001 с і 0,0001 с становить близько 0,0013 дБ. Це підтверджує стійкість отриманих значень щодо зменшення кроку інтегрування за часом. Узгодженість трендів при зміні N_x та масштабу підтримує фізичну інтерпретацію результату; перевірка збіжності за просторовою сіткою, областю та межами належить до подальшого розвитку (підрозділ 4.8).

4.8. Висновки до розділу 4 та межі застосовності

У розділі 4 виконано нестаціонарне скінченноелементне дослідження частотно-вибіркового ослаблення пружних хвиль у скінченному масиві трикомпонентних бетонно-гумових комірок. За результатами дослідження встановлено наступне:

1. Сформовано нестаціонарну розрахункову постановку для оцінювання динамічної відповіді скінченного бетонно-гумового масиву у постановці плоскої деформації. Захисний ефект визначено за вставними втратами шляхом порівняння відповіді масиву трикомпонентних комірок з однорідною бетонною еталонною моделлю тієї самої геометрії.

2. Для базової конфігурації з розміром комірки 0,4 м одержано додатні значення вставних втрат у частотному інтервалі, що відповідає першій забороненій зоні трикомпонентної комірки за контурним критерієм. Найбільш виражене ослаблення встановлено в діапазоні 20–26 Гц, де вставні втрати становлять близько 1,7–2,1 дБ відносно бетонної еталонної моделі.

3. Встановлено нерівномірний характер частотної залежності вставних втрат у скінченному масиві. У нижній і центральній частині робочого інтервалу формується стійке додатне ослаблення, тоді як ділянка 28–30 Гц характеризується майже прохідною поведінкою. Така структура частотної відповіді відображає вплив скінченної довжини масиву та хвильової взаємодії між його елементами.

4. Дослідження впливу довжини скінченного масиву показало закономірне зростання вставних втрат зі збільшенням кількості комірок уздовж напряму поширення хвилі. На частоті 24 Гц вставні втрати становлять 1,07 дБ, 1,84 дБ і 2,62 дБ відповідно для масивів із трьох, п’яти та семи комірок. Отримана залежність визначає довжину періодичного масиву як конструктивний параметр нарощування частотно-вибіркового ослаблення.

5. Геометричне масштабування комірки забезпечує перенесення діапазону додатних вставних втрат до нижчих частот. При збільшенні розміру комірки до 1,2–3,0 м ділянки ослаблення зміщуються до діапазону одиниць герц. Для комірки розміром 3,0 м основний інтервал додатного ослаблення отримано приблизно на частотах 2,25–3,25 Гц, де вставні втрати становлять близько 1,7–2,0 дБ.

6. Виявлено додаткові локальні максимуми вставних втрат поза межами основного робочого інтервалу. Такі максимуми відтворюються при зміні геометричного масштабу комірки та зміщуються до нижчих частот разом із масштабуванням конструкції. Вони характеризують особливості динамічної відповіді скінченного масиву і не ототожнюються з окремими забороненими зонами періодичної структури.

7. Проведено чисельну перевірку стійкості результатів за кроком інтегрування за часом. Для контрольного розрахунку з розміром комірки 0,4 м, п’ятьма комірками уздовж напряму поширення хвилі та частотою збудження 24 Гц зменшення кроку інтегрування вдесятеро змінило значення вставних втрат приблизно на 0,0013 дБ. Це підтверджує чисельну стійкість

отриманих частотно-залежних результатів у прийнятій нестаціонарній постановці.

8. Одержані результати встановлюють розрахункові закономірності формування частотно-вибіркового ослаблення у скінченному трикомпонентному бетонно-гумовому масиві. Рівень вставних втрат зростає зі збільшенням кількості комірок уздовж напряму поширення хвилі, а положення робочого частотного інтервалу зміщується до нижчих частот зі збільшенням геометричного масштабу комірки. Ці закономірності визначають розрахункові передумови вибору довжини скінченного масиву та масштабу комірки для задач пасивного ослаблення сейсмічних і техногенних вібраційних впливів.

РОЗДІЛ 5
ОЦІНКА ЧУТЛИВОСТІ ЗАБОРОНЕНИХ ЗОН ДО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ МАТЕРІАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕТОДАМИ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА ІНЖЕНЕРНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

5.1. Постановка задачі врахування невизначеності матеріальних параметрів

У розділах 3 і 4 характеристики заборонених зон бетонно-гумових періодичних конструкцій визначено за номінальними значеннями фізико-механічних параметрів матеріалів. У реальному будівництві ці параметри не є фіксованими: модуль пружності гуми залежить від рецептури, умов вулканізації, температури та старіння; бетон має значний природний розкид характеристик; додатковий внесок дають технологічні допуски виготовлення. Унаслідок такої мінливості межі забороненої зони зміщуються відносно детерміністичного прогнозу: нижня межа може підвищуватися, верхня - знижуватися, а ширина ефективного інтервалу - зменшуватися. У результаті споруда може опинитися під дією саме тих частот, які за номінальним розрахунком мали бути заблоковані. Тому детерміністичне подання результату єдиним частотним інтервалом для інженерної практики недостатнє: адекватнішим є толерантний опис, за якого для кожної частотної характеристики зони будується оболонка допусків, що обмежує її можливе зміщення в межах заданої варіації вхідних параметрів; окрім зовнішніх меж зони, контролюється частота максимального просторового загасання f_{peak}, на якій ефект блокування найсильніший. Таким чином, у подальшому аналізі розрізняються номінальні межі забороненої зони, можливі межі їхнього зміщення за варіації параметрів та гарантований частотний інтервал, що зберігається в межах прийнятої моделі невизначеності.

Класичні ймовірнісні методи потребують достовірних законів розподілу параметрів, які для нових класів матеріалів зазвичай відсутні; натомість межі

можливих відхилень (допуски) зазвичай відомі або можуть бути призначені експертно. За таких умов природним інструментом є теорія нечітких множин [95, 96]: невизначеність описується функцією належності, а обчислення зводяться до інтервальних операцій на α-рівнях. Методичне підґрунтя застосування нечітких множин у задачах будівельної механіки закладено у [111]; схему нечіткого модуля з поширенням через детерміністичний розв'язувач за α-рівнями застосовано для шаруватого пружного аналізу у [118]; підходи до невизначеності у періодичних пружних системах розглянуто у [69, 70, 74]. Рівень варіації ±20 % прийнято як ілюстративний допуск; методика застосовна й до інших рівнів допуску за умови збереження монотонності меж за параметрами та ідентифікації тих самих зон; для великих допусків ці умови перевіряються окремо.

Невизначеність чотирьох матеріальних параметрів - модулів пружності та густин бетону і гуми - аналізується у два етапи. Саме ці параметри вибрано як базові для редукованої моделі, оскільки вони безпосередньо визначають хвильові швидкості, імпедансний контраст шарів і, відповідно, положення меж заборонених зон: (а) однофакторний аналіз чутливості, тобто варіювання одного параметра за раз за фіксованих номінальних значень решти; (б) подання тих самих допусків трикутними нечіткими числами з поширенням через модель за α-рівнями, дефазифікацією та сумісним аналізом за принципом розширення. Підсумком є ієрархія впливу параметрів та інженерна характеристика робастності - гарантована заборонена зона. Оскільки поширення нечітких чисел потребує багатократних (сотні разів) обчислень зонної структури, базовою моделлю обрано одновимірний предиктор для поздовжніх хвиль на основі методу матриці переносу [42, 43, 119] - точний у межах прийнятої одновимірної моделі, він дає замкнений вираз дисперсійного співвідношення і унеможливлює змішування ефектів варіації параметрів із похибками дискретизації МСЕ (підрозділ 1.6). Об'єктом аналізу є структура з тими самими номінальними матеріалами і базовим періодом, що й двовимірна комірка розділу 3; перенесення висновків на двовимірну конфігурацію

розглянуто у підрозділі 5.6. Апарат нечітких множин та α-рівневого аналізу, застосований на другому етапі, ґрунтується на огляді методів невизначеності у розділі 1 та на класичних працях [95, 96].

5.2. Базова модель: метод матриці переносу для шаруватої бетонно-гумової структури

Побудова редукованої моделі починається із задання геометрії, матеріальних параметрів та припущень, необхідних для переходу до одновимірної шаруватої постановки. Розглядається одновимірне періодичне шарувате середовище як спрощене подання вертикального шляху проходження плоскої поздовжньої хвилі крізь масивний латерально протяжний періодичний фундамент. Елементарна комірка складається з двох ідеально зчеплених однорідних ізотропних пружних шарів: шару бетону завтовшки L_1 і шару гуми завтовшки L_2; період структури $a = L_1 + L_2$. Прийнято симетричну комірку $L_1 = L_2 = 0{,}2$ м, тобто $a = 0{,}4$ м, що збігається з базовим періодом двовимірної комірки розділу 3. Оскільки бічні деформації шарів у латерально протяжному масиві обмежені (умови одновісної деформації), кожен шар характеризується не стрижневим модулем E, а стисненим (одновісним) модулем M, який враховує бічне утримання через коефіцієнт Пуассона: Ця одновимірна двофазна модель (бетон–гума, без сталевого ядра) є редукованою відносно двовимірної трикомпонентної комірки розділу 3; абсолютні межі зон тут не ототожнюються з межами двовимірної зони розділу 3 (19,70–27,77 Гц) - з одновимірної моделі переноситься насамперед оцінка відносної чутливості меж до матеріальних параметрів.

$$M_i = \frac{E_i \cdot (1 - \nu_i)}{(1 + \nu_i) \cdot (1 - 2\nu_i)}, \tag{5.1}$$

де E_i - модуль пружності шару, ν_i - коефіцієнт Пуассона шару, M_i - стиснений модуль.

Для бетону ($\nu = 0{,}33$) $M_{con} = 1{,}48 \cdot E_{con}$, для гуми ($\nu = 0{,}463$) $M_{rub} = 4{,}96 \cdot E_{rub}$: майже нестислива гума у стисненому стані суттєво жорсткішає, проте контраст жорсткостей фаз залишається близьким до п’яти порядків. Використання стисненого модуля відповідає ідеалізації повного бокового утримання (одновісна деформація); у реальній скінченній конструкції утримання часткове, тож ефективний модуль лежить між стрижневим E і стисненим M, а фактичні частоти - дещо нижчі за цю верхню оцінку. Номінальні параметри наведено у таблиці 5.1; індекси con і rub позначають відповідно бетон та гуму. В’язкопружне демпфування у базовій моделі свідомо вилучене, тому просторове згасання в межах зони має суто еванесцентну природу (бреґґівське розсіяння), а не дисипативну; передачу коливань у скінченному масиві без матеріального демпфування розглянуто у розділі 4. Модель не описує зсувні та поверхневі хвилі.

Таблиця 5.1 - Номінальні фізико-механічні параметри компонентів комірки

Матеріал	ρ, кг/м³	E, Па	ν	M за (5,1), Па
Бетон (шар 1)	2300	$3{,}14 \cdot 10^{10}$	0,33	$4{,}65 \cdot 10^{10}$
Гума (шар 2)	1300	$1{,}4 \cdot 10^{5}$	0,463	$6{,}94 \cdot 10^{5}$

Коефіцієнт Пуассона кожної фази прийнято фіксованим на номінальному значенні і не включено до аналізу невизначеності. Це свідоме звуження обсягу: розглянуто чотири основні матеріальні параметри - модулі пружності та густини обох фаз, - а коефіцієнт Пуассона, який для бетону і гуми традиційно береться сталим довідковим значенням, утримано номінальним, щоб зберегти простір параметрів осяжним. Процедура підрозділу 5.5 не залежить від кількості параметрів, тому включення ν є прямим розширенням методу, а не його зміною.

Для такої шаруватої моделі дисперсійне співвідношення Флоке–Блоха записується через умову періодичності поля на межах елементарного шару. У кожному однорідному шарі i = 1, 2 гармонічна поздовжня хвиля характеризується швидкістю, хвильовим числом шару та хвильовим імпедансом:

$$c_i = \sqrt{\frac{M_i}{\rho_i}}, \quad k_i = \frac{\omega}{c_i}, \quad Z_i = \rho_i \cdot c_i = \sqrt{\rho_i \cdot M_i}, \tag{5.2}$$

де ρ_i - густина шару, ω - кругова частота, c_i - швидкість поздовжньої хвилі, k_i - хвильове число шару, Z_i - хвильовий імпеданс шару.

За номінальних параметрів сі становить 4497,5 м/с для бетону і 23,11 м/с для гуми. Зв'язок вектора стану (переміщення, осьове напруження) на межах шару задається унімодулярною матрицею переносу 2×2 [42, 119]; матриця комірки T є добутком матриць шарів і виражається аналітично через фазові набіги $\varphi_i = k_i L_i$ та відношення імпедансів Z_1/Z_2. За теоремою Флоке–Блоха для нескінченної періодичної структури задача зводиться до слідової форми дисперсійного рівняння [43]:

$$cos(\mu a) = \frac{1}{2} \cdot tr(T), \tag{5.3}$$

де μ - хвильове число Блоха, a - період структури, tr(T) - слід матриці переносу комірки.

За умови $|½ \cdot tr(T)| \leq 1$ число μ дійсне і хвиля поширюється без згасання (смуга пропускання); за $|½ \cdot tr(T)| > 1$ число μ комплексне, і амплітуда хвилі спадає експоненційно вглиб структури - це заборонена зона. Величина |Im(μ)| відіграє роль коефіцієнта просторового згасання на одиницю довжини і є кількісною мірою ефективності блокування.

На основі отриманого дисперсійного співвідношення визначаються межі забороненої зони, її ширина та характерні частотні параметри для номінального набору матеріальних характеристик. Для кожної забороненої зони визначаються три частотні метрики: нижня межа f_{start}, верхня межа f_{end} та частота максимального згасання f_{peak}. Межі зони визначаються безпосередньо за критерієм (5.3): це корені рівняння $|½\cdot tr(T)| = 1$, що відокремлюють інтервали з $|½\cdot tr(T)| > 1$; на частотній сітці 1–120 Гц з кроком 0,002 Гц корені локалізовано з точністю кроку. Частота f_{peak} обчислюється як локальний максимум $|Im(\mu)|$ усередині кожної зони - критерій застосовується однаково до всіх зон. Комплексну зонну структуру номінальної комірки показано на рисунку 5.1, номінальні метрики обох зон - у таблиці 5.2. Розглянуто перші дві повні заборонені зони; діапазон аналізу 1–120 Гц охоплює їх повністю. Межі зон трактуються у тому самому хвильовому сенсі, що й у спектральній постановці розділу 2: вони відокремлюють інтервали без розповсюджувального розв'язку.

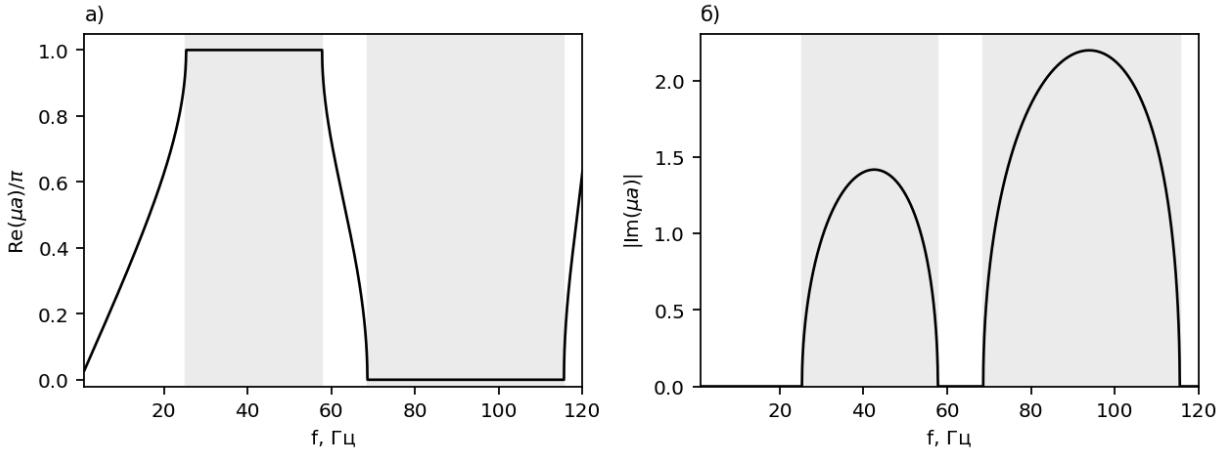

Рисунок 5.1 - Комплексна зонна структура номінальної бетонно-гумової комірки: а - дійсна частина Re(μa)/π; б - модуль уявної частини |Im(μa)| (затінено заборонені зони)

Таблиця 5.2 - Номінальні метрики перших двох заборонених зон шаруватої комірки

Зона	f_{start}, Гц	f_{end}, Гц	f_{peak}, Гц	Ширина, Гц
Перша	25,30	57,78	42,57	32,48
Друга	68,61	115,56	93,94	46,95

Положення меж має прозору фізичну інтерпретацію. Верхні межі обох зон збігаються (у межах 0,01 Гц) з резонансами півхвилі та повної хвилі гумового шару $f = n \cdot c_{rub}/(2 \cdot L_2) = 57,78$ і 115,56 Гц - їх задає податливий шар. Нижні межі інтерпретуються як резонанси, у яких бетонні шари рухаються майже як жорсткі маси на гумових прошарках, і тому чутливі також до густини бетону. Фізичну адекватність предиктора додатково ілюструє контрольний розрахунок скінченного ланцюжка комірок, у якому збурення з частотою всередині забороненої зони еванесцентно згасає вже в межах перших комірок; систематичний кількісний аналіз скінченних структур виконано у розділі 4 у часовій постановці.

5.3. Однофакторний аналіз чутливості заборонених зон

Однофакторний аналіз виконано шляхом послідовної зміни одного матеріального параметра за фіксованих номінальних значень інших параметрів. Досліджується вплив чотирьох незалежних матеріальних параметрів - E_{con}, E_{rub}, ρ_{con}, ρ_{rub} - на метрики перших двох зон. Для виокремлення індивідуального внеску кожного параметра застосовано однофакторний аналіз чутливості (варіювання одного параметра за раз): досліджуваний параметр множиться на коефіцієнт m, решта утримуються номінальними; геометрія комірки незмінна. Використано два рівні деталізації сканування: тонке, m від 0,95 до 1,05 з кроком 0,01, для оцінки локальних градієнтів поблизу номіналу, і грубе, m від 0,80 до 1,20 з кроком 0,05, для побудови толерантних оболонок під допуск ±20 %. Зміна модуля пружності

будь-якої фази за фіксованого ν пропорційно змінює її стиснений модуль (5.1), тому результати однофакторного сканування за E зберігають чинність і у термінах M.

Порівняння отриманих залежностей дає змогу інтерпретувати механізми впливу окремих параметрів на положення та ширину заборонених зон. Густини. Зміна густини будь-якої фази змінює швидкості хвиль і хвильові імпеданси, а отже фазові набіги та контраст імпедансів; збільшення густини систематично зміщує характерні частоти вниз, оскільки додаткова інерція знижує власні частоти комірки. Водночас у першій зоні густини діють вибірково, відповідно до фізичної природи її меж (підрозділ 5.2): густина бетону ρ_{con} керує нижньою межею - «масовим» резонансом бетонних шарів (зсув до 9,5 % при ±20 %), майже не впливаючи на верхню (менше 0,1 %); густина гуми ρ_{rub} входить у швидкість c_{rub} і тому найсильніше впливає на верхню межу - резонанс гумового шару (11,8 %), за помірного впливу на нижню (1,7 %). Толерантні оболонки показано на рисунку 5.2. Отже, дві густини не можна трактувати як рівнозначні масові параметри: вони модифікують межі зони селективно, що відкриває можливість роздільного налаштування меж.

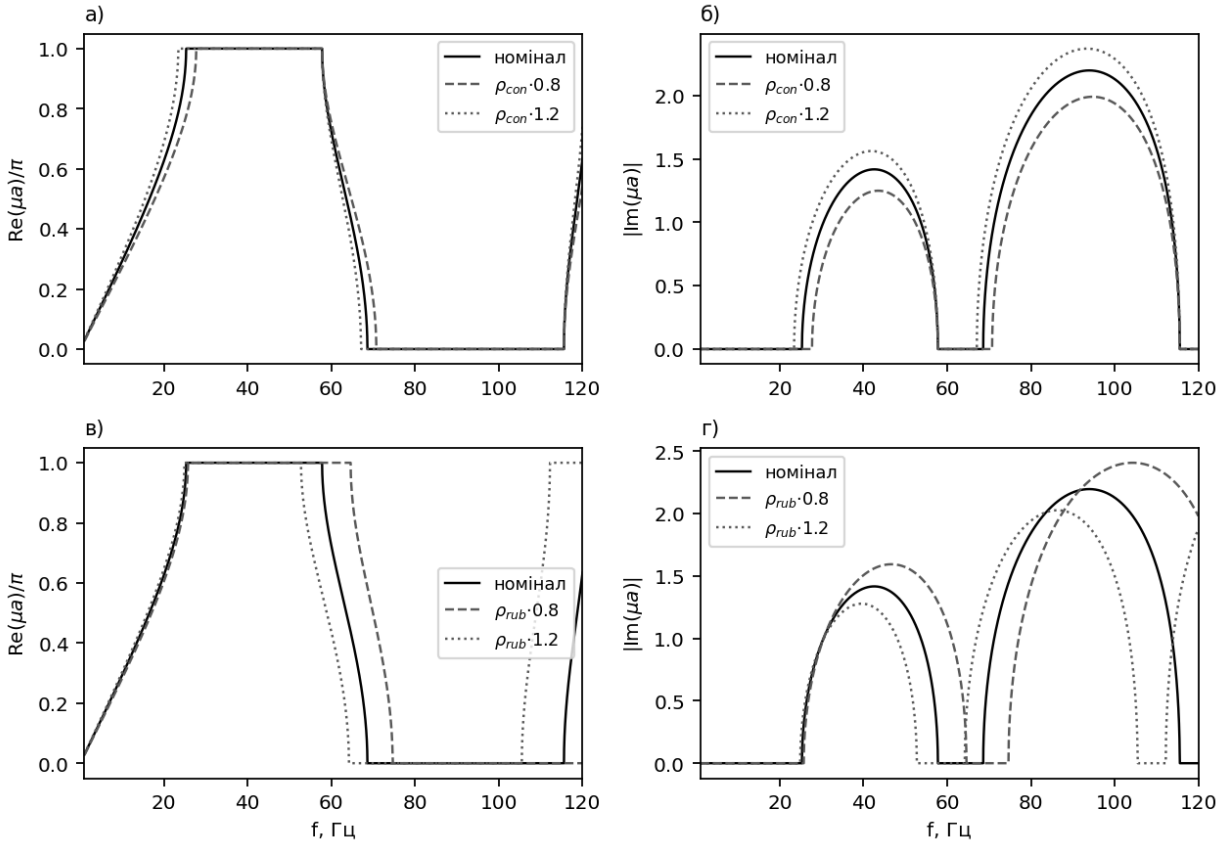

Рисунок 5.2 - Толерантні оболонки заборонених зон при варіації густин ±20 %: а, б - ρ_{con}; в, г - ρ_{rub} (а, в - Re(μa)/π; б, г - |Im(μa)|; суцільна лінія - номінал, штрихова та пунктирна - межі коридору)

Модуль пружності гуми. Параметр E_{rub} визначає відновлювальні сили податливої фази, яка контролює деформівність комірки. Оскільки швидкість хвилі залежить від жорсткості як $c \sim \sqrt{M}$, а $M \sim E$, варіація E_{rub} зміщує всі характерні частоти майже рівномірно: для ±20 % зсув обох меж обох зон становить близько 10,6 % (рисунок 5.3). Модуль гуми діє як глобальний масштабний параметр низькочастотної зонної структури, а не як регулятор окремої межі.

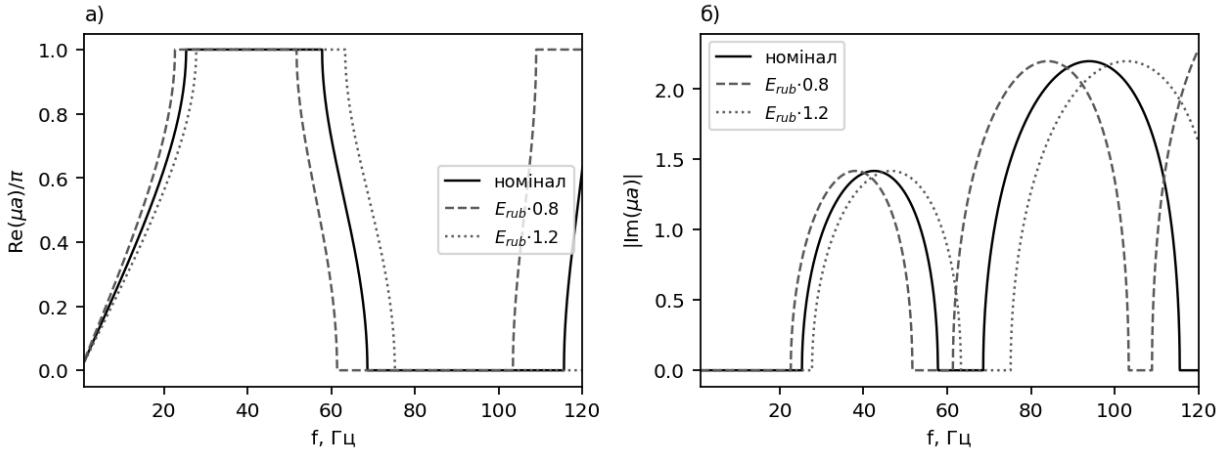

Рисунок 5.3 - Толерантні оболонки заборонених зон при варіації модуля пружності гуми E_{rub} ±20 %: а - Re(μa)/π; б - |Im(μa)| (майже рівномірне масштабування частотної осі)

Модуль пружності бетону. Варіація E_{con} на ±20 % практично не дає зсуву жодної метрики у межах моделі. Це прямий наслідок екстремального контрасту жорсткостей: стиснений модуль бетону на п’ять порядків перевищує стиснений модуль гуми, тому в досліджуваному діапазоні бетонний шар поводиться як практично жорстке інерційне тіло, а деформівність комірки цілком визначається гумою.

Для узагальнення результатів однофакторного аналізу нижче наведено кількісне зведення змін параметрів для першої та другої заборонених зон. Максимальні відносні зсуви меж обох зон під незалежною варіацією ±20 % зведено у таблиці 5.3.

Таблиця 5.3 - Максимальні відносні зсуви меж першої та другої заборонених зон при варіації параметрів ±20 % (однофакторний аналіз чутливості)

Параметр (±20 %)	Зона 1: f_{start}	Зона 1: f_{end}	Зона 2: f_{start}	Зона 2: f_{end}
E_{con}	≈ 0 %	≈ 0 %	≈ 0 %	≈ 0 %
E_{rub}	10,6 %	10,6 %	10,6 %	10,6 %
ρ_{con}	9,5 %	< 0,1 %	3,1 %	< 0,1 %
ρ_{rub}	1,7 %	11,8 %	8,8 %	8,7 %

Дані таблиці 5.3 встановлюють чітку ієрархію параметрів: модуль бетону практично неактивний; модуль гуми рівномірно масштабує обидві зони; густини діють селективно. Порівняння зон додатково підкреслює механізми. У першій зоні домінує «розподіл праці»: ρ_{con} керує нижньою межею (9,5 %), ρ_{rub} - верхньою (11,8 %). У другій зоні обидві межі визначаються переважно гумовим шаром: чутливість до ρ_{rub} майже однакова для нижньої та верхньої меж (8,8 і 8,7 %, що близько до закону $c_{rub} \sim 1/\sqrt{\rho_{rub}}$), тоді як внесок ρ_{con} у нижню межу падає з 9,5 % до 3,1 %. Отже, з підвищенням номера зони структура дедалі більше поводиться як «гумовий резонатор», а інерція бетону відіграє меншу роль; для проектування це означає, що стабільність вищих зон майже цілком визначається якістю гуми.

5.4. Нечітке подання невизначеності: α-рівні та дефазифікація

Однофакторний аналіз характеризує невизначеність лише двома крайніми значеннями на межах ±20 %. Щоб подати ту саму інформацію як градуйовану міру можливості, кожен невизначений параметр p подається симетричним трикутним нечітким числом (підрозділ 1.8) з модальною точкою у номіналі: належність $\mu = 1$ у номінальному значенні і $\mu = 0$ на межах ±20 %. Оскільки всі чотири параметри мають однаковий відносний допуск, у нормованих координатах $m = p/p_{ном}$ їхні функції належності збігаються, і один трикутник (рисунок 5.4) описує всі входи. Повний нечіткий аналіз виконано для першої - інженерно значущої низькочастотної - зони; для другої у підрозділі 5.3 наведено однофакторну чутливість для порівняння, а нечітке узагальнення може бути застосоване до другої зони тією самою процедурою.

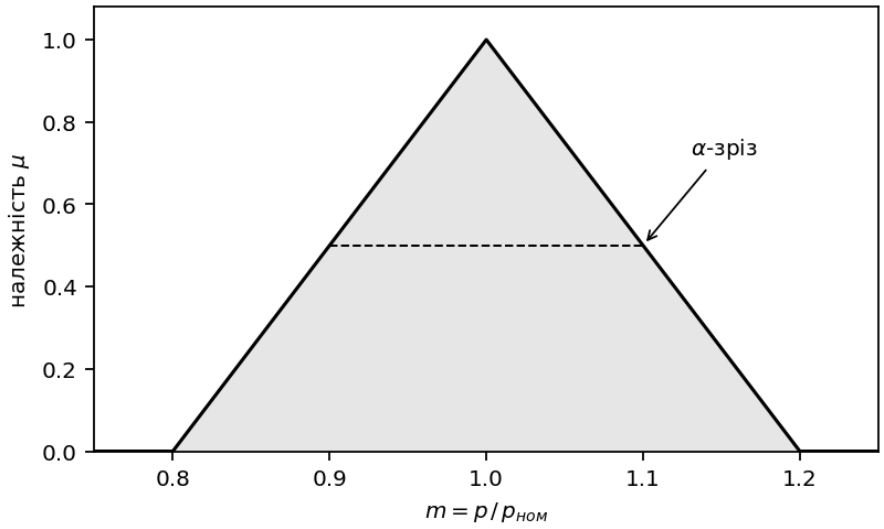

Рисунок 5.4 - Вхідна функція належності невизначених параметрів у нормованих координатах $m = p/p_{ном}$ (спільна для ρ_{con}, ρ_{rub}, E_{con}, E_{rub})

Кожен рівень належності α задає α-зріз - інтервал нормованого множника:

$$[m]_\alpha = [1 - 0.2 \cdot (1 - \alpha);\ 1 + 0.2 \cdot (1 - \alpha)], \tag{5.4}$$

де α - рівень належності, $0 \le \alpha \le 1$; при $\alpha = 1$ інтервал вироджується у номінал, при $\alpha = 0$ охоплює весь носій ±20 %.

Предиктор матриці переносу відображає кінці кожного інтервалу у відповідні значення fstart, fpeak і fend, тож кожна метрика зони стає нечітким числом, α-зрізи якого беруться безпосередньо з табульованого сканування підрозділу 5.3. Монотонність кожної метрики, включно з fpeak, за кожним параметром у діапазоні ±20 % перевірено безпосередньо за даними сканування, що обґрунтовує побудову α-зрізів за кінцями інтервалів. Обчислення на всіх рівнях належності дає розподіли можливості метрик (рисунок 5.5).

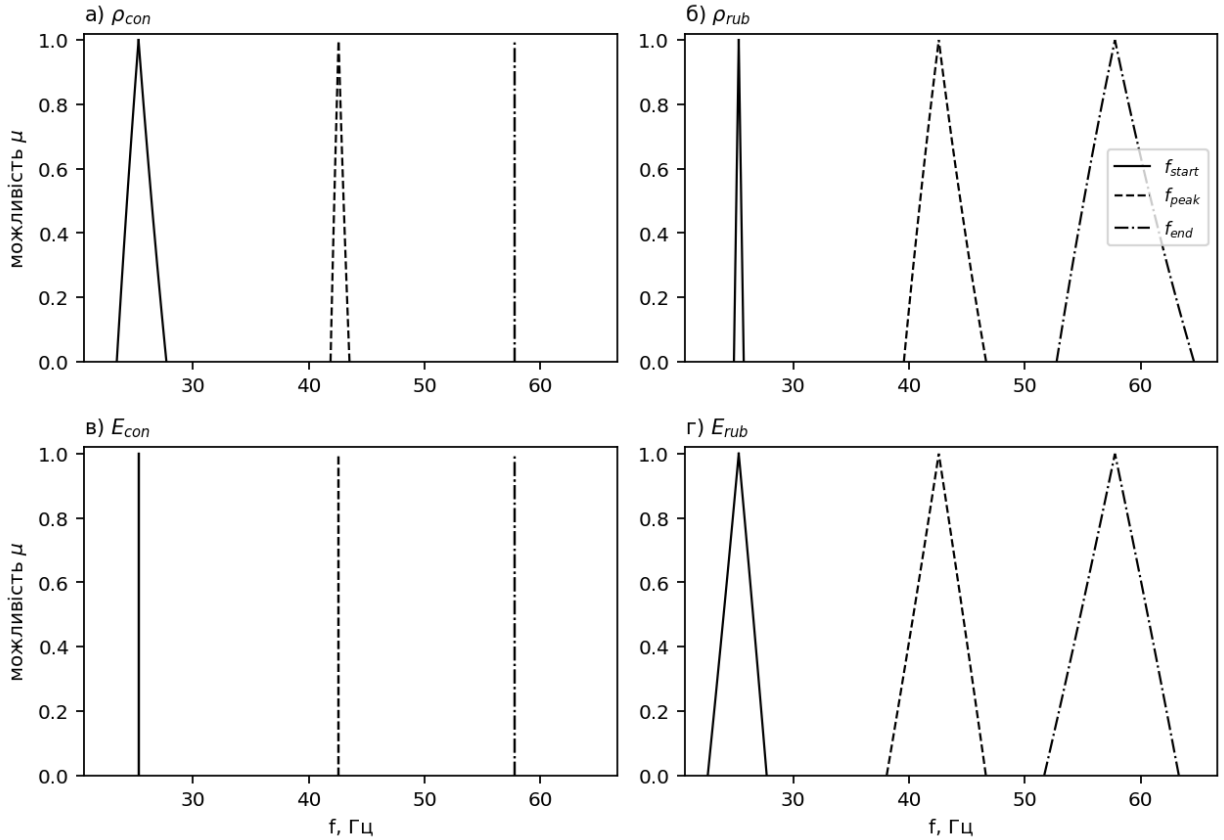

Рисунок 5.5 - Розподіли можливості метрик першої забороненої зони при незалежній трикутній нечіткій варіації кожного параметра: а - ρ_{con}; б - ρ_{rub}; в - E_{con}; г - E_{rub} (по вертикалі - можливість μ, по горизонталі - частоти f_{start}, f_{peak}, f_{end})

Нечіткий вихід відтворює ієрархію підрозділу 5.3 у єдиній графічній формі: для E_{con} розподіли вироджуються у вертикальні лінії; для E_{rub} усі три метрики зміщуються майже на однакову відносну величину, зберігаючи сталу відносну ширину; ρ_{con} розширює розподіл нижньої межі, ρ_{rub} - верхньої. Представницьке чітке значення вихідного нечіткого числа відновлюється дефазифікацією. Розглянуто два стандартні оцінювачі: очікуване значення нечіткого числа як α-зважене середнє середин α-зрізів

$$EV = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot [a(\alpha) + b(\alpha)]\, d\alpha, \tag{5.5}$$

де a(α) і b(α) - лівий і правий кінці α-зрізу вихідної величини, та центроїд (центр ваги площі під функцією належності).

Для майже лінійних відображень «параметр–частота» обидва оцінювачі узгоджуються: відмінність не перевищує 0,15 Гц, тому наведено лише очікуване значення. Дефазифіковані межі першої зони та їхні носії подано у таблиці 5.4.

Таблиця 5.4 - Дефазифіковані межі першої забороненої зони та їхні носії при незалежній нечіткій варіації ±20 % кожного параметра

Параметр	Межа	Номінал, Гц	Очікуване значення, Гц	Носій, Гц
E_{con}	f_{start}	25,30	25,30	25,30 – 25,30
E_{con}	f_{end}	57,78	57,78	57,78 – 57,78
E_{rub}	f_{start}	25,30	25,26	22,63 – 27,72
E_{rub}	f_{end}	57,78	57,68	51,68 – 63,29
ρ_{con}	f_{start}	25,30	25,39	23,43 – 27,71
ρ_{con}	f_{end}	57,78	57,78	57,78 – 57,78
ρ_{rub}	f_{start}	25,30	25,31	24,89 – 25,74
ρ_{rub}	f_{end}	57,78	58,07	52,74 – 64,60

Очікувані значення відрізняються від номінальних меж щонайбільше на 0,5 %: симетрична невизначеність параметрів практично не зміщує номінального положення зони. Значущою величиною є ширина носія, яка керується E_{rub}, ρ_{con} і ρ_{rub} та є нехтовною для E_{con}. Застосована процедура - нечітке число з номіналом як модальною точкою, поширення через детерміністичний предиктор за α-зрізами, дефазифікація - відповідає схемі нечіткого модуля [118] на апараті [95, 96]; її застосування до задач будівельної механіки апробовано у [111].

5.5. Сумісна невизначеність параметрів і гарантована заборонена зона

Розподіли підрозділу 5.4 виокремлюють індивідуальні внески, але передбачають, що під час відхилення одного параметра решта залишаються точно номінальними. В експлуатації всі чотири параметри відхиляються одночасно, тому практично важливою є поведінка зони за їхньої сумісної варіації. Чотири трикутні нечіткі параметри поширюються через предиктор спільно за принципом розширення Заде [95, 96], згідно з яким належність метрики g у значенні y дорівнює найбільшій спільній належності серед усіх комбінацій параметрів, що відображаються у y:

$$\mu_g(y) = sup\{ min_j \mu_j(x_j) : g(x) = y \}, \quad (5.6)$$

де x = (x_1, …, x_4) - вектор матеріальних параметрів, μj - функції належності входів, μg - функція належності вихідної метрики.

На кожному рівні α обчислення зводиться до знаходження екстремумів g на чотиривимірному боксі α-зрізів (5.4). Оскільки кожна межа зони монотонна за кожним параметром у діапазоні ±20 %, екстремальні значення досягаються у $2^4 = 16$ вершинах бокса; це підтверджено щільним семплінгом внутрішніх точок, який не дав жодного значення поза вершинними межами з точністю 10^{-3} Гц. Зазначимо, що припущення незалежності чотирьох параметрів є консервативним: реальні кореляції між властивостями (рецептура, пористість, спільне старіння) звузили б допустимий бокс і, відповідно, розширили б гарантовану зону. Обчислення вершин на всіх рівнях α дає сумісні розподіли можливості меж зони (рисунок 5.6).

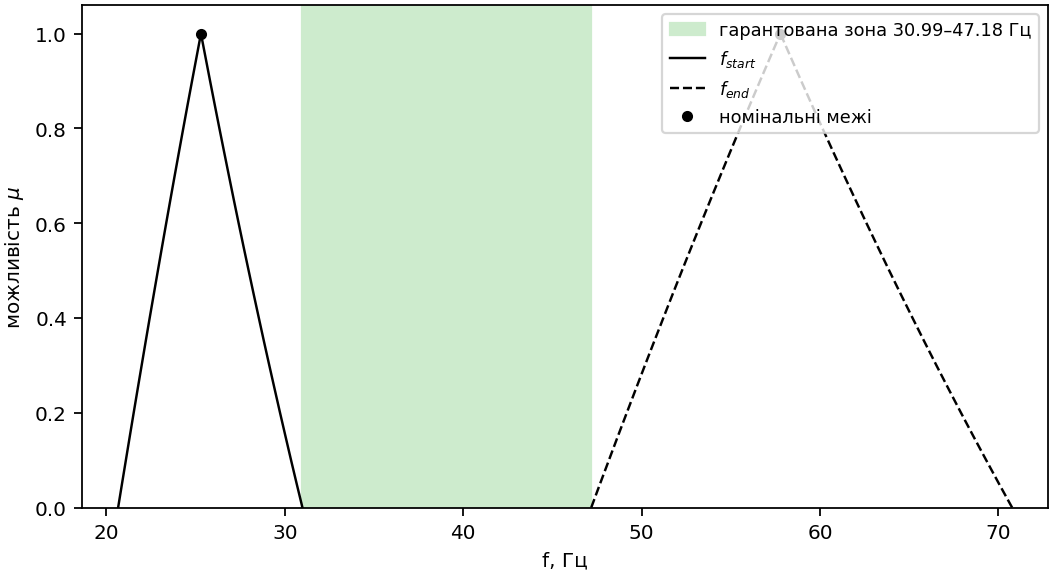

Рисунок 5.6 - Сумісні розподіли можливості меж першої забороненої зони при одночасній варіації ±20 % усіх чотирьох параметрів; затінена смуга - гарантована заборонена зона

Сумісна варіація розширює невизначеність кожної межі суттєво сильніше за будь-який однофакторний випадок: при α = 0 нижня межа охоплює інтервал 20,66–30,99 Гц, верхня - 47,18–70,76 Гц (за номінальних 25,30 і 57,78 Гц). Оскільки межі можуть зближуватися одночасно, безпосередню інженерну цінність має зона, що залишається відкритою за кожної допустимої комбінації параметрів. Ця гарантована заборонена зона є перетином усіх можливих зон: знизу вона обмежена найвищою досяжною нижньою межею, зверху - найнижчою досяжною верхньою межею, тобто становить 30,99–47,18 Гц (таблиця 5.5).

Таблиця 5.5 - Сумісна невизначеність і гарантована перша заборонена зона при одночасній варіації ±20 % усіх параметрів

Величина	Частотний інтервал, Гц	Ширина, Гц
Номінальна заборонена зона	25,30 – 57,78	32,48
Носій нижньої межі f_{start} (α = 0)	20,66 – 30,99	10,33
Носій верхньої межі f_{end} (α = 0)	47,18 – 70,76	23,59
Гарантована заборонена зона	30,99 – 47,18	16,19

Ширина гарантованої зони 16,19 Гц становить близько половини номінальної (32,48 Гц). Ця оцінка консервативна в межах одновимірної моделі та чотирьох розглянутих параметрів: будь-яка частота збурення всередині гарантованого інтервалу лежить у забороненій зоні незалежно від того, де у межах допуску ±20 % опиняться параметри. У термінах відносних запасів нижня межа може підніматися щонайбільше приблизно на 22,5 % від номіналу, верхня - опускатися приблизно на 18,3 %. Водночас гарантована зона характеризує наявність блокування, а не його рівень: поблизу країв зони коефіцієнт загасання $|\mathrm{Im}(\mu)|$ прямує до нуля, тому ослаблення там слабке. Для відповідального захисту цільову частоту слід розташовувати ближче до частоти максимального згасання f_{peak}, а не до країв гарантованого інтервалу; за потреби можна ввести робочий поріг за $|\mathrm{Im}(\mu)|$ і визначати ефективну гарантовану зону як перетин відповідних ліній рівня. Побудова без змін поширюється на другу зону і на довільну кількість нечітких параметрів; єдиною вимогою є перевірка монотонності, що обґрунтовує обчислення у вершинах бокса.

5.6. Перенесення результатів на двовимірну комірку та інженерні рекомендації

Узагальнення результатів дозволяє сформувати ієрархію параметричної чутливості, яку доцільно враховувати при перенесенні висновків редукованої моделі на двовимірну конфігурацію. Установлена ієрархія параметрів має прозору фізичну природу - екстремальний контраст жорсткостей, за якого бетон працює як інерційне тіло, а динаміку визначає податлива гума, - і ця природа спільна для одновимірної шаруватої структури та двовимірної комірки з циліндричними включеннями розділу 3. Тому висновки переносяться якісно: положення заборонених зон двовимірної комірки контролюється модулем пружності гуми і густинами фаз, тоді як вплив модуля бетону вторинний. Водночас абсолютні частотні діапазони одновимірної

моделі та двовимірної комірки розділу 3 різняться, оскільки різняться механізми формування зон - бреґґівське розсіяння у шаруватій структурі проти локального резонансу у тришаровій комірці; переноситься відносна чутливість до параметрів, а не абсолютні частоти. Це узгоджується і з механізмом локального резонансу тришарової комірки, у якій резонансна частота важкого ядра на гумовій обоймі визначається саме жорсткістю гуми та масою ядра. Кількісні значення зсувів для двовимірної комірки потребують повторення процедури підрозділів 5.3–5.5 із МСЕ-предиктором замість матриці переносу; обчислювальна вартість зростає, але алгоритм не змінюється.

З практичного погляду отримані межі гарантованої зони доцільно використовувати як орієнтир для попереднього вибору матеріальних параметрів та геометричного масштабу конструкції. Головний практичний наслідок розділу: проектування слід орієнтувати не на номінальну, а на гарантовану заборонену зону. Цільова смуга захисту має повністю лежати всередині гарантованого інтервалу, причому якомога ближче до частоти максимального згасання - тоді зберігається не лише наявність, а й достатній рівень блокування за будь-якої допустимої комбінації параметрів. За сумісного допуску ±20 % це означає проектний запас приблизно +22,5 % від номінальної нижньої межі та −18,3 % від номінальної верхньої; ширина гарантованої зони становить близько половини номінальної. Оскільки за масштабним законом розділу 3 межі зони обернено пропорційні періоду комірки, відносні запаси не залежать від типорозміру і переносяться на будь-який масштаб конструкції у межах ідеалізованої моделі - від фундаментних блоків до віброзахисних панелей; реальні конструкції додатково вносять вплив ґрунту, демпфування, граничних умов і технологічних обмежень.

Невизначеність матеріалів, імовірно, звужує допустимий допуск і для двовимірної тришарової конфігурації розділу 3, відносна ширина забороненої зони якої менша, ніж в одновимірній моделі; кількісну межу допустимих

допусків має дати нечіткий аналіз двовимірної моделі з МСЕ-предиктором за процедурою підрозділу 5.5, що становить напрям подальших досліджень.

Звідси випливають пріоритети контролю якості та допусків для параметрів, що найбільш істотно впливають на положення і ширину забороненої зони. З ієрархії чутливості випливає наведений нижче розподіл ресурсу контролю якості при виготовленні елементів періодичної конструкції. Рекомендації мають модельний характер - вони ґрунтуються на виконаному розрахунку і не замінюють нормативної валідації.

1. Найжорсткіший контроль - модуль пружності гуми E_{rub}: вхідні випробування зразків кожної партії, оскільки цей параметр зміщує обидві межі обох зон одночасно і є єдиним із суттєвою часовою деградацією (старіння, температура). Для відповідальних об’єктів доцільний періодичний моніторинг властивостей гумового компонента впродовж терміну служби.

2. Контроль густин обох фаз: густина бетону ρ_{con} визначає стабільність нижньої межі першої зони, густина гуми ρ_{rub} - верхньої межі першої зони та обох меж другої; контроль густини є технологічно простим (зважування, геометричний обмір) і має виконуватися для кожної партії елементів.

3. У межах цього аналізу допуск на модуль пружності бетону E_{con} не є визначальним для положення зон: його варіація ±20 % практично не зміщує меж. Вимоги до бетону за міцністю та довговічністю залишаються визначальними і встановлюються окремо.

4. Геометричні допуски: оскільки за масштабним законом розділу 3 межі зони обернено пропорційні періоду комірки, відносна похибка виготовлення періоду безпосередньо дорівнює відносному зсуву меж (допуск ±2 % розміру - зсув меж ±2 %). Геометричний контроль за жорсткістю вимог посідає проміжне місце між контролем гуми і контролем модуля бетону.

5. Загальна стратегія: цільову смугу захисту розташовувати поблизу частоти максимального згасання f_{peak}, а допуски призначати з умови, щоб смуга не виходила за межі гарантованої зони, обчисленої за процедурою підрозділу 5.5 для прийнятого класу допусків.

Водночас наведені рекомендації мають межі застосовності, зумовлені редукованим характером моделі та прийнятими припущеннями. Кількісні результати отримано для одновимірної моделі без втрат, поздовжніх хвиль в умовах одновісної деформації та обмежених варіацій параметрів за однофакторною стратегією та її нечітким узагальненням. Фіксація ν означає, що гарантована зона визначена щодо модулів пружності та густин і є умовною щодо прийнятих коефіцієнтів Пуассона. Для майже нестисливої гуми ($\nu \approx 0{,}463$) стиснений модуль надзвичайно чутливий до ν: навіть зміна коефіцієнта Пуассона гуми на $\Delta\nu = 0{,}01$ дає зсув частот до приблизно 15 %, що порівнянно з впливом E_{rub} у межах ±20 % або перевищує його; повне врахування невизначеності ν - напрям подальшого розширення аналізу. У реальних конструкціях демпфування трансформує заборонену зону у зону загасання, а складніше хвильове поле (зсувні та поверхневі компоненти) і взаємодія з ґрунтовим середовищем можуть змінити кількісний баланс ефектів. Тому результати розділу слід розглядати як базову карту чутливості та методику, безпосередньо застосовну до двовимірної моделі; повний нечіткий аналіз двовимірної комірки з МСЕ-предиктором, урахування демпфування і змішана нечітко-ймовірнісна постановка є природними напрямами подальших досліджень. Отримані оцінки стосуються положення та ширини заборонених зон; вплив невизначеності на вставні втрати скінченного масиву окремо не моделювався. У межах цього розділу ν не варіювався; це обмежує повноту оцінки невизначеності, але не змінює висновку про необхідність контролю найбільш чутливих параметрів.

5.7. Висновки до розділу 5

1. Побудовано предиктор заборонених зон бетонно-гумової шаруватої структури методом матриці переносу зі стисненим модулем шарів - точний у межах прийнятої одновимірної моделі. Номінально перша зона становить

25,30–57,78 Гц (максимум згасання 42,57 Гц), друга - 68,61–115,56 Гц; верхні межі зон збігаються з резонансами гумового шару.

2. Однофакторним аналізом чутливості (±20 %) установлено ієрархію параметрів: E_{con} практично не впливає; E_{rub} зміщує всі межі майже рівномірно (≈ 10,6 %); густини діють селективно - ρ_{con} керує нижньою межею першої зони (9,5 %), ρ_{rub} - верхньою (11,8 %) та обома межами другої зони (≈ 8,8 %).

3. Невизначеність подано трикутними нечіткими числами з поширенням за α-зрізами; дефазифіковані очікувані значення меж відрізняються від номінальних щонайбільше на 0,5 %, тож значущою характеристикою є ширина носія, керована властивостями гуми та густинами фаз.

4. Сумісним поширенням чотирьох нечітких параметрів за принципом розширення визначено гарантовану заборонену зону 30,99–47,18 Гц шириною 16,19 Гц (близько половини номінальної) з відносними запасами +22,5 % і −18,3 %. Такий підхід розширює застосування нечіткого аналізу до оцінки гарантованих заборонених зон бетонно-гумових періодичних конструкцій. Гарантована зона характеризує наявність блокування, а не його рівень, тому цільову частоту слід розташовувати поблизу f_{peak}.

5. Сформульовано інженерні рекомендації модельного характеру: проектування за гарантованою зоною; пріоритетний контроль E_{rub}, ρ_{rub} і ρ_{con}, тоді як допуск на E_{con} не є визначальним для положення зон (вимоги до бетону за міцністю встановлюються окремо); геометричний допуск, що безпосередньо транслюється у зсув меж; перенесення відносних запасів на будь-який типорозмір за масштабним законом розділу 3 (у межах ідеалізованої моделі).

6. Невизначеність матеріалів, імовірно, звужує допустимий допуск і для тришарової двовимірної комірки розділу 3; кількісну межу має визначити нечіткий аналіз двовимірної моделі з МСЕ-предиктором за процедурою підрозділу 5.5, що становить напрям подальших досліджень.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-технічну задачу чисельного обґрунтування неоднорідних бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій для захисту споруд від сейсмічних та вібраційних впливів шляхом встановлення закономірностей формування низькочастотних заборонених зон пружних хвиль, вибору архітектури періодичної комірки та оцінювання частотно-вибіркового ослаблення коливань у скінченних метаматеріальних масивах.

Суть вирішеної задачі полягає в обґрунтуванні розрахункової постановки аналізу хвильових процесів у періодично-неоднорідних структурах, розробленні скінченноелементної постановки з граничними умовами Флоке–Блоха для двовимірних бетонно-гумових комірок, порівнянні двокомпонентних і трикомпонентних архітектур, визначенні впливу геометричних параметрів і масштабу на положення та ширину заборонених зон, а також у перевірці зв’язку між забороненою зоною нескінченної періодичної структури та фактичним ослабленням коливань у скінченному масиві з урахуванням невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів.

Сформульовано висновки, які відображають результати дисертаційної роботи:

1. За результатами аналізу наукових джерел встановлено, що періодично-неоднорідні структури, фононні кристали, локально-резонансні метаматеріали, метаматеріальні фундаменти та метабар’єри є перспективним напрямом пасивного захисту будівель і споруд від динамічних впливів завдяки можливості формування частотних діапазонів, у яких поширення пружних хвиль суттєво послаблюється. Водночас виявлено недостатню дослідженість двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій фундаментного типу, зокрема систематичного порівняння двокомпонентних і трикомпонентних архітектур, переходу від нескінченної періодичної моделі до скінченного

масиву, масштабного налаштування захисного діапазону та врахування невизначеності матеріальних параметрів. Це обумовило актуальність і напрями виконаного дослідження.

2. Обґрунтовано розрахункову постановку чисельного дослідження хвильових процесів у періодично-неоднорідних бетонно-гумових структурах. Розглянуто зв’язок між дискретними моделями, антиперіодичними модами, впливом в’язкого демпфування, довгохвильовими неперервними наближеннями та спектральною постановкою задачі для періодичних середовищ. Обґрунтовано використання методу Флоке–Блоха для визначення заборонених зон пружних хвиль, сформульовано узагальнену задачу на власні значення з граничними умовами Флоке–Блоха, визначено маршрут обходу зони Бриллюена Г → Х → М → Г та критерії чисельної збіжності. Це створило розрахункову основу для подальшого скінченноелементного аналізу двовимірних бетонно-гумових періодичних комірок.

3. У межах плоскої задачі лінійної теорії пружності розроблено та реалізовано скінченноелементну постановку визначення заборонених зон для двокомпонентних і трикомпонентних бетонно-гумових періодичних комірок. Встановлено, що двокомпонентна комірка з бетонною матрицею та суцільним гумовим включенням при a_{total} = 0,4 м і f_{area} = 0,5 формує вузьку першу заборонену зону за контурним критерієм 30,10–30,30 Гц шириною близько 0,21 Гц. Для трикомпонентної локально-резонансної комірки з бетонною матрицею, гумовим кільцем і сталевим ядром при a_{total} = 0,4 м, f_{area} = 0,5 та β = 1,5 отримано першу заборонену зону 19,70–27,77 Гц шириною 8,07 Гц. Збіжність цієї зони підтверджено на сітках Fine, Finer та Extra fine; зміна меж при переході від Fine до Extra fine не перевищує 0,02 %. Встановлено, що формування першої забороненої зони трикомпонентної комірки пов’язане з локально-резонансним рухом сталевого ядра відносно бетонної матриці через податливий гумовий прошарок. Показано, що збільшення площової частки включення f_{area} у діапазоні 0,25–0,75 знижує нижню межу першої зони з 27,87 до 16,09 Гц і збільшує її ширину з 5,08 до 11,08 Гц. Для геометричного

масштабування підтверджено закон подібності $f_{low} = 7{,}880239/a_{total}$, $f_{upper} = 11{,}108791/a_{total}$, $\Delta f = 3{,}228552/a_{total}$, що дає змогу переносити захисний частотний діапазон до нижчих, сейсмічно та вібраційно релевантних частот шляхом зміни розміру комірки.

4. Для переходу від нескінченної періодичної моделі до оцінювання захисного ефекту скінченної конструкції розроблено нестаціонарну скінченноелементну модель масиву трикомпонентних бетонно-гумових комірок та виконано порівняння його динамічної відповіді з однорідною бетонною еталонною моделлю тієї самої геометрії без включень. У межах першої зони, визначеної для нескінченної періодичної комірки, насамперед у її нижній і центральній частині, у скінченному масиві встановлено додатне ослаблення IL ≈ 1,7–2,1 дБ у діапазоні 20–26 Гц, тоді як на контрольній ділянці 28–30 Гц масив залишається майже прохідним. Показано, що збільшення кількості комірок уздовж напряму поширення підсилює захисний ефект: для частоти 24 Гц вставні втрати зростають від 1,07 дБ для Nx = 3 до 1,84 дБ для Nx = 5 та 2,62 дБ для Nx = 7. Дослідження масштабування показало, що збільшення a_{total} до 1,2–3,0 м переносить діапазон частотно-вибіркового ослаблення до області одиниць герц, що якісно узгоджується із законом геометричної подібності, отриманим у спектральній задачі; для $a_{total} = 3{,}0$ м найкраще узгодження зі масштабованою забороненою зоною проявляється в діапазоні приблизно 2,25–3,25 Гц. Результат є стійким до зменшення кроку інтегрування за часом: різниця IL при зменшенні кроку вдесятеро становить близько 0,0013 дБ. При цьому вставні втрати розглядаються як практична вхідно-вихідна метрика ослаблення, а не як чистий коефіцієнт проходження падаючої плоскої хвилі; тому результати інтерпретуються насамперед за трендами та порівнянням з еталонною моделлю тієї самої геометрії.

5. Для врахування невизначеності фізико-механічних характеристик матеріалів побудовано предиктор заборонених зон бетонно-гумової шаруватої структури методом матриці переносу, точний у межах прийнятої одновимірної моделі. Номінально перша зона становить 25,30–57,78 Гц із максимумом

згасання 42,57 Гц, друга - 68,61–115,56 Гц. Однофакторний аналіз чутливості при варіації параметрів ±20 % показав, що модуль пружності бетону E_{con} практично не впливає на положення зон, модуль пружності гуми E_{rub} зміщує всі межі майже рівномірно приблизно на 10,6 %, а густини діють селективно: ρ_{con} переважно визначає нижню межу першої зони, тоді як ρ_{rub} суттєво впливає на її верхню межу та межі другої зони. Невизначеність матеріальних параметрів подано трикутними нечіткими числами з поширенням за α-рівнями та дефазифікацією меж заборонених зон. Сумісним поширенням чотирьох нечітких параметрів за принципом розширення визначено гарантовану заборонену зону 30,99–47,18 Гц шириною 16,19 Гц, що становить близько половини номінальної зони. Сформульовано рекомендації модельного характеру щодо попереднього вибору параметрів за гарантованою зоною, пріоритетного контролю E_{rub}, ρ_{rub} і ρ_{con}, а також урахування геометричних допусків, які за масштабним законом безпосередньо транслюються у зсув меж. Для трикомпонентної двовимірної комірки результати нечіткого аналізу обґрунтовують необхідність подальшого кількісного уточнення матеріальних допусків за МСЕ-предиктором, але вже на цьому етапі підтверджують важливість урахування параметричної невизначеності під час попереднього чисельного обґрунтування бетонно-гумових метаматеріальних конструкцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Hussein M. I., Leamy M. J., Ruzzene M. Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook // Applied Mechanics Reviews. 2014. Vol. 66. Art. 040802. DOI: 10.1115/1.4026911.

2. Den Hartog J. P. Mechanical Vibrations. 4th ed. New York : Dover, 1985. 436 p.

3. De Domenico D., Ricciardi G., Takewaki I. Design strategies of viscous dampers for seismic protection of building structures: a review // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2019. Vol. 118. P. 144–165. DOI: 10.1016/j.soildyn.2018.12.024.

4. Давидов І. І., Чабан В. П., Ковтун-Горбачова Т. А., Ковтун К. А. Аналіз впливу динамічних характеристик на розвиток прогресуючого обвалення будівельних конструкцій // Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 1 (031). С. 55–62. DOI: 10.30838/UJCEA.2312.250226.55.1209.

5. Brûlé S., Javelaud E. H., Enoch S., Guenneau S. Experiments on seismic metamaterials: molding surface waves // Physical Review Letters. 2014. Vol. 112. Art. 133901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.133901.

6. Maldovan M. Sound and heat revolution in phononics // Nature. 2013. Vol. 503. P. 209–217. DOI: 10.1038/nature12608.

7. Muhammad, Lim C. W. From photonic crystals to seismic metamaterials: a review via phononic crystals and acoustic metamaterials // Archives of Computational Methods in Engineering. 2022. Vol. 29. P. 1137–1198. DOI: 10.1007/s11831-021-09612-8.

8. Xiang H. J., Shi Z. F., Wang S. J., Mo Y. L. Periodic materials-based vibration attenuation in layered foundations: experimental validation // Smart Materials and Structures. 2012. Vol. 21. Art. 112003. DOI: 10.1088/0964-1726/21/11/112003.

9. Shi Z., Cheng Z., Xiang H. Seismic isolation foundations with effective attenuation zones // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2014. Vol. 57. P. 143–151. DOI: 10.1016/j.soildyn.2013.11.009.

10. Yan Y., Mo Y. L., Menq F-Y. et al. Development of seismic isolation systems using periodic materials. Technical Report no. 11-3219. Houston : Univ. of Houston, 2014. 218 p.

11. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V. V. Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches. Boca Raton : CRC Press, 2021. 256 p. DOI: 10.1201/9781003146162.

12. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Kaplunov J. D., Markert B. Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice // Proc. IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics. IUTAM Bookseries. Berlin : Springer, 2009. P. 123–132.

13. Baker G. A., Graves-Morris P. Padé Approximants. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 746 p.

14. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Applied Mechanics Reviews. 2001. Vol. 54. P. 69–92.

15. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Barantsev R. G. Asymptotic approaches in mechanics: new parameters and procedures // Applied Mechanics Reviews. 2003. Vol. 56. P. 87–110. DOI: 10.1115/1.1521436.

16. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. Continuous models for 2D discrete media valid for higher-frequency domain // Computers and Structures. 2008. Vol. 86. P. 140–144. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.05.013.

17. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. Asymptotic Methods for Engineers. Boca Raton : CRC Press, 2024. 350 p.

18. Colquitt D. J., Danishevskyy V. V., Kaplunov J. D. Composite dynamic models for periodically heterogeneous media // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. Vol. 24. P. 2663–2693. DOI: 10.1177/1081286518776704.

19. Danishevskyy V. V., Andrianov I. V., Rogerson G. A. Elastic waves in periodically heterogeneous two-dimensional media: locally periodic and anti-periodic modes // Proceedings of the Royal Society A. 2018. Vol. 474. Art. 20170908. DOI: 10.1098/rspa.2017.0908.

20. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Kaplunov J. D. Low-frequency vibrations of a high-contrast orthotropic lattice // Mechanics Research Communications. 2025. Vol. 144. Art. 104386. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2025.104386.

21. Andrianov I. V., Khajiyeva L. A., Kudaibergenov A. K., Starushenko G. A. On Aspects of Continuous Approximation of Diatomic Lattice // Mathematics. 2024. Vol. 12. Art. 1456. DOI: 10.3390/math12101456.

22. Andrianov I. V., Bolshakov V. I., Danishevskyy V. V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials // Proceedings of the Royal Society A. 2008. Vol. 464. P. 1181–1201. DOI: 10.1098/rspa.2007.0267.

23. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam : North-Holland, 1978. 700 p.

24. Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Dordrecht : Kluwer, 1989. 366 p.

25. Andrianov I. I., Andrianov I. V., Starushenko G. A., Borodin E. I. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. Vol. 27, No. 9. P. 1672–1687. DOI: 10.1177/10812865211053035.

26. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Mathematical Problems in Engineering. 2010. Art. 986242. DOI: 10.1155/2010/986242.

27. Craster R. V., Kaplunov J., Pichugin A. V. High-frequency homogenization for periodic media // Proceedings of the Royal Society A. 2010. Vol. 466. P. 2341–2362. DOI: 10.1098/rspa.2009.0612.

28. Craster R. V., Kaplunov J., Postnova J. High-frequency asymptotics, homogenisation and localisation for lattices // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2010. Vol. 63. P. 497–519. DOI: 10.1093/qjmam/hbq015.

29. Danishevskyy V. V., Kaplunov J. D., Rogerson G. A. Anti-plane shear waves in a fibre-reinforced composite with a non-linear imperfect interface //

International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 76. P. 223–232. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.009.

30. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Topol H., Rogerson G. A. Propagation of Floquet–Bloch shear waves in viscoelastic composites: analysis and comparison of interface/interphase models for imperfect bonding // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. P. 1177–1196. DOI: 10.1007/s00707-016-1765-4.

31. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Topol H., Weichert D. Homogenization of a 1D nonlinear dynamical problem for periodic composites // ZAMM. 2011. Vol. 91. P. 523–534. DOI: 10.1002/zamm.201000176.

32. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V. V. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Berlin : Springer, 2010. 255 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03126-7.

33. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. New York : Dover, 2003. 255 p.

34. Born M., Huang K. Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford : Clarendon Press, 1954. 420 p.

35. Kushwaha M. S., Halevi P., Dobrzynski L., Djafari-Rouhani B. Acoustic band structure of periodic elastic composites // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71. P. 2022–2025. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.2022.

36. Sigalas M. M., Economou E. N. Band structure of elastic waves in two-dimensional systems // Solid State Communications. 1993. Vol. 86. P. 141–143. DOI: 10.1016/0038-1098(93)90888-T.

37. Pennec Y., Vasseur J. O., Djafari-Rouhani B., Dobrzyński L., Deymier P. A. Two-dimensional phononic crystals: examples and applications // Surface Science Reports. 2010. Vol. 65. P. 229–291. DOI: 10.1016/j.surfrep.2010.08.002.

38. Khelif A., Adibi A. (eds.) Phononic Crystals: Fundamentals and Applications. New York : Springer, 2015. 266 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-9393-8.

39. Laude V. Phononic Crystals: Artificial Crystals for Sonic, Acoustic, and Elastic Waves. Berlin : De Gruyter, 2015. 342 p. DOI: 10.1515/9783110302660.

40. Deymier P. A. (ed.) Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals. Berlin : Springer, 2013. 378 p. DOI: 10.1007/978-3-642-31232-8.

41. Davies B. et al. Roadmap on metamaterial theory, modelling and design // Journal of Physics D: Applied Physics. 2025. Vol. 58. Art. 203002. DOI: 10.1088/1361-6463/adc271.

42. Thomson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // Journal of Applied Physics. 1950. Vol. 21. P. 89–93. DOI: 10.1063/1.1699629.

43. Mead D. J. Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems // Journal of Sound and Vibration. 1975. Vol. 40. P. 1–18. DOI: 10.1016/S0022-460X(75)80227-6.

44. Cheng Z., Shi Z. Complex dispersion relations and evanescent waves in periodic beams via the extended differential quadrature method // Composite Structures. 2018. Vol. 188. P. 37–54. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.12.062.

45. Jiang T., Han Q., Li C. Complex band structure and evanescent wave propagation of composite corrugated phononic crystal beams // Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. P. 2783–2808. DOI: 10.1007/s00707-023-03522-5.

46. De Ponti J. M., Iorio L., Riva E., Ardito R., Braghin F., Corigliano A. Selective mode conversion and rainbow trapping via graded elastic waveguides // Physical Review Applied. 2021. Vol. 16. Art. 034028. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.034028.

47. Tian Z., Yu L. Rainbow trapping of ultrasonic guided waves in chirped phononic crystal plates // Scientific Reports. 2017. Vol. 7. Art. 40004. DOI: 10.1038/srep40004.

48. Aravantinos-Zafiris N., Sigalas M. M. Large scale phononic metamaterials for seismic isolation // Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 118. Art. 064901. DOI: 10.1063/1.4928405.

49. Yan Y., Laskar A., Cheng Z., Shi Z., Menq F-Y., Tang Y. Seismic isolation of two-dimensional periodic foundations // Journal of Applied Physics. 2014. Vol. 116. Art. 044908. DOI: 10.1063/1.4891837.

50. Wu Q., Xu Z., Xu P. et al. Optimal design for rubber concrete layered periodic foundations based on the analytical approximations of band gaps and mapping relations // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2024. Vol. 23. P. 593–608. DOI: 10.1007/s11803-024-2259-3.

51. Cheng Z., Shi Z. Novel composite periodic structures with attenuation zones // Engineering Structures. 2013. Vol. 56. P. 1271–1282. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.06.039.

52. Liu Z., Zhang X., Mao Y. et al. Locally resonant sonic materials // Science. 2000. Vol. 289. P. 1734–1736. DOI: 10.1126/science.289.5485.1734.

53. Muhammad, Lim C. W., Żur K. K. Wide Rayleigh waves bandgap engineered metabarriers for ground borne vibration attenuation // Engineering Structures. 2021. Vol. 246. Art. 113019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113019.

54. Muhammad, Lim C. W., Reddy J. N. Built-up structural steel sections as seismic metamaterials for surface wave attenuation with low frequency wide bandgap in layered soil medium // Engineering Structures. 2019. Vol. 188. P. 440–451. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.03.046.

55. Li M., Jia G., Cheng Z., Shi Z. Generative adversarial network guided topology optimization of periodic structures via subset simulation // Composite Structures. 2021. Vol. 256. Art. 113254. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.113254.

56. Finocchio G., Casablanca O., Ricciardi G. et al. Seismic metamaterials based on isochronous mechanical oscillators // Applied Physics Letters. 2014. Vol. 104. Art. 191903. DOI: 10.1063/1.4876961.

57. Luo J., Bi K., Pu X. On the zero frequency bandgap of seismic metamaterials // Journal of Sound and Vibration. 2025. Vol. 607. Art. 119064. DOI: 10.1016/j.jsv.2025.119064.

58. Achaoui Y., Antonakakis T., Brûlé S. et al. Clamped seismic metamaterials: ultra-low frequency stop bands // New Journal of Physics. 2017. Vol. 19. Art. 063022. DOI: 10.1088/1367-2630/aa6e21.

59. Miniaci M., Krushynska A. O., Bosia F., Pugno N. M. Large scale mechanical metamaterials as seismic shields // New Journal of Physics. 2016. Vol. 18. Art. 083041. DOI: 10.1088/1367-2630/18/8/083041.

60. Colombi A., Roux P., Guenneau S., Gueguen P. Forests as a natural seismic metamaterial: Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances // Scientific Reports. 2016. Vol. 6. Art. 19238. DOI: 10.1038/srep19238.

61. Palermo A., Krödel S., Marzani A., Daraio C. Engineered metabarrier as shield from seismic surface waves // Scientific Reports. 2016. Vol. 6. Art. 39356. DOI: 10.1038/srep39356.

62. Colquitt D. J., Colombi A., Craster R. V. et al. Seismic metasurfaces: sub-wavelength resonators and Rayleigh wave interaction // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2017. Vol. 99. P. 379–393. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.12.004.

63. Palermo A., Vitali M., Marzani A. Metabarriers with multi-mass locally resonating units for broad band Rayleigh waves attenuation // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2018. Vol. 113. P. 265–277. DOI: 10.1016/j.soildyn.2018.05.035.

64. Ren T., Liu C., Li F., Zhang C. Active tunability of band gaps for a novel elastic metamaterial plate // Acta Mechanica. 2020. Vol. 231. P. 2728–2745. DOI: 10.1007/s00707-020-02651-y.

65. Santos R. B., Berres G., Inman D. J. et al. A practical approach to evaluate periodic rods composed of cells with geometric and material periodicity // Journal of Sound and Vibration. 2023. Vol. 553. Art. 117646. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117646.

66. Saeed H. M. Wave motion in continuous mono-coupled locally periodic structures // Wave Motion. 2024. Vol. 127. Art. 103290. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2024.103290.

67. Єгоров Є. А. та ін. Скінченно-елементне моделювання контакту оболонкової структури з основою // Опір матеріалів і теорія споруд. 2023. Вип. 110. С. 421–429. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.110.421-429.

68. Zhangabay N., Ibraimova U., Bonopera M., Suleimenov U., Avramov K., Chernobryvko M., Utelbayeva A., Uspenskyi B. Finite-Element Modeling of the Dynamic Behavior of a Crack-like Defect in an Internally Pressurized Thin-Walled Steel Cylinder // Applied Sciences. 2024. Vol. 14, No. 5. Art. 1790. DOI: 10.3390/app14051790.

69. Fabro A. T., Beli D., Ferguson N. S. et al. Wave and vibration analysis of elastic metamaterial and phononic crystal beams with slowly varying properties // Wave Motion. 2021. Vol. 103. Art. 102728. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2021.102728.

70. Ribeiro L. H. M. S., Dal Poggetto V. F., Arruda J. R. F. Robust optimization of attenuation bands of three-dimensional periodic frame structures // Acta Mechanica. 2022. Vol. 233. P. 3118–3135. DOI: 10.1007/s00707-021-03118-x.

71. Hussein M. I. Theory of damped Bloch waves in elastic media // Physical Review B. 2009. Vol. 80. Art. 212301. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.212301.

72. Hussein M. I., Frazier M. J. Band structure of phononic crystals with general damping // Journal of Applied Physics. 2010. Vol. 108. Art. 093506. DOI: 10.1063/1.3498806.

73. Frazier M. J., Hussein M. I. Viscous-to-viscoelastic transition in phononic crystal and metamaterial band structures // Journal of the Acoustical Society of America. 2015. Vol. 138. P. 3169–3180. DOI: 10.1121/1.4934845.

74. Lin X. Y., Li E., He Z. C., Wu Y. A novel method to study the phononic crystals with fluid-structure interaction and hybrid uncertainty // Acta Mechanica. 2020. Vol. 231. P. 2530–2548. DOI: 10.1007/s00707-019-02530-8.

75. Ghafar W. A., Zhong T., Lai Z. et al. Seismic isolation for existing structures: a review of retrofitting techniques, case studies, and trends // Discover Civil Engineering. 2025. Vol. 2. Art. 137. DOI: 10.1007/s44290-025-00300-1.

76. Brûlé S., Enoch S., Guenneau S. Emergence of seismic metamaterials: current state and future perspectives // Physics Letters A. 2020. Vol. 384. Art. 126034. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126034.

77. Mu D., Shu H., Zhao L., An S. A review of research on seismic metamaterials // Advanced Engineering Materials. 2020. Vol. 22. Art. 1901148. DOI: 10.1002/adem.201901148.

78. Varma T. V., Ungureanu B., Sarkar S. et al. The influence of clamping, structure geometry, and material on seismic metamaterial performance // Frontiers in Materials. 2021. Vol. 8. Art. 603820. DOI: 10.3389/fmats.2021.603820.

79. Wang G., Wang C., Liang C. et al. Subwavelength partial-embedded seismic metamaterial with wide working frequency: numerical simulation and experiment // Engineering Structures. 2025. Vol. 332. Art. 120093. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.120093.

80. Huang J.-K., Chen R., Zhang Z.-W. et al. Seismic metamaterials as foundations for buildings subjected to incident plane and bending waves: simulation and experiment // Engineering Structures. 2025. Vol. 343. Art. 121187. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.121187.

81. Zhao C., Zeng C., Huang H. et al. Preliminary study on the periodic base isolation effectiveness and experimental validation // Engineering Structures. 2021. Vol. 226. Art. 111364. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111364.

82. Masoom M. N., Karim Q., Badar I. et al. Development of a new base isolation system using the concept of metamaterials // Engineering Structures. 2023. Vol. 286. Art. 116151. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116151.

83. Cheng Z., Shi Z., Palermo A. et al. Seismic vibrations attenuation via damped layered periodic foundations // Engineering Structures. 2020. Vol. 211. Art. 110427. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.110427.

84. Gupta A., Sharma R., Thakur A., Gulia P. Metamaterial foundation for seismic wave attenuation for low and wide frequency band // Scientific Reports. 2023. Vol. 13. Art. 2293. DOI: 10.1038/s41598-023-27678-1.

85. Casablanca O., Gareschì F., Azzerboni B. et al. Periodic foundation piles for the seismic protection of structures // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2024. Vol. 182. Art. 108742. DOI: 10.1016/j.soildyn.2024.108742.

86. Sun Z., Zhao M., Gao Z. et al. Seismic mitigation performance of a periodic foundation for nuclear power structures considering soil–structure interactions // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2024. Vol. 184. Art. 108814. DOI: 10.1016/j.soildyn.2024.108814.

87. Li Y., Meng H., Zuo Y. et al. Seismic metamaterial barriers for ground vibration mitigation in railways considering the train–track–soil dynamic interactions // Construction and Building Materials. 2020. Vol. 251. Art. 119936. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2020.119936.

88. Kaewunruen S., Martin V. Life cycle assessment of vibration mitigation methods in railway corridors // Sustainability. 2018. Vol. 10. Art. 3753. DOI: 10.3390/su10103753.

89. Kaewunruen S., Qin Y. Sustainability of vibration mitigation methods using meta-materials/structures along railway corridors exposed to adverse weather conditions // Sustainability. 2020. Vol. 12. Art. 10236. DOI: 10.3390/su122410236.

90. Oz M. F., Kumbasaroglu A., Yalciner H. et al. Experimental investigation of metamaterial-inspired periodic foundation systems with embedded piezoelectric layers for seismic vibration attenuation // Buildings. 2025. Vol. 15. Art. 4399. DOI: 10.3390/buildings15244399.

91. Колохов В. В. Вдосконалення прийомів застосування механічних методів неруйнівного контролю // Український журнал будівництва та архітектури. 2023. № 6 (018). С. 69–77. DOI: 10.30838/J.BPSACEA.2312.261223.69.1008.

92. Bolotin V. V. Statistical Methods in Structural Mechanics. San Francisco : Holden-Day, 1969.

93. Bolotin V. V. Methods of the Theory of Probability and the Theory of Reliability in the Calculations of Structures. Moscow : Stroyizdat, 1982. (in Russian).

94. Augusti G., Baratta A., Casiati F. Probabilistic Methods in Structural Engineering. London : Chapman and Hall, 1984.

95. Zadeh L. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. P. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

96. Dubois D., Prade H. Possibility Theory: An Approach in Computerized Processing. New York : Plenum, 1988. 263 p.

97. Pawlak Z. Rough sets and fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1985. Vol. 17. P. 99–102. DOI: 10.1016/S0165-0114(85)80029-4.

98. Elishakoff I., Ferracuti B. Four alternative definitions of the fuzzy safety factor // Journal of Aerospace Engineering. 2006. Vol. 19, No. 4. P. 281–287. DOI: 10.1061/(ASCE)0893-1321(2006)19:4(281).

99. Elishakoff I., Ferracuti B. Fuzzy sets based interpretation of the safety factor // Fuzzy Sets and Systems. 2006. Vol. 157, No. 18. P. 2495–2512. DOI: 10.1016/j.fss.2006.06.009.

100. Elishakoff I., Ohsaki M. Optimization and Anti-Optimization of Structures Under Uncertainty. London : Imperial College Press, 2010. 402 p. DOI: 10.1142/p678.

101. Banichuk N. V. Introduction of Optimization of Structures. New York : Springer, 1990. 300 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-3376-3.

102. Banichuk N. V., Neittaanmäki P. J. Structural Optimization with Uncertainties. Dordrecht : Springer, 2010. DOI: 10.1007/978-90-481-2518-0.

103. Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming. Berlin : Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-3-540-89484-1.

104. Bellman R., Dreyfus S. Applied Dynamic Programming. Princeton : Princeton University Press, 1962.

105. Baranenko V., Volchok D. Evaluation of the maximum axial force on a cylindrical shell structure in terms of stability and strength using fuzzy quantities of chosen geometric parameters // Roads and Bridges. 2016. Vol. 15, No. 1. P. 71–81.

106. Baiev S. V., Volchok D. L. Nonlinear oscillations of a prestressed concrete bridge beam subjected to harmonic perturbation in the conditions of indeterminacy of parameters // Strength of Materials and Theory of Structures. 2020. Vol. 104. P. 147–163. DOI: 10.32347/2410-2547.2020.104.147-163.

107. Raizer V., Elishakoff I. Philosophies of Structural Safety and Reliability. Boca Raton : Taylor & Francis, 2022. 286 p. DOI: 10.1201/9781003265993.

108. Fang J. J., Smith S. M., Elishakoff I. Combination of anti-optimization and fuzzy-set based analyses for structural optimization under uncertainty // Mathematical Problems in Engineering. 1998. Vol. 4. P. 187–200. DOI: 10.1155/S1024123X98000787.

109. Kaufmann A. Introduction à la théorie des sous-ensembles flous: à l'usage des ingénieurs. Paris : Masson, 1977.

110. Majid K. I. Optimum Design of Structures. London : Newnes-Butterworths, 1974.

111. Volchok D., Danishevskyy V., Slobodianiuk S., Kuchyn I. Fuzzy sets application in the problems of structural mechanics and optimal design // Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. P. 6191–6204. DOI: 10.1007/s00707-023-03713-0.

112. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Annales scientifiques de l'ENS. 1883. Vol. 12. P. 47–88.

113. Bloch F. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern // Zeitschrift für Physik. 1928. Bd. 52. S. 555–600.

114. Кучин І. О. Двовимірні ґрунтові метаструктури та періодичні фундаменти для вібросейсмічного захисту: огляд // Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 2 (032). С. 160–166. DOI: 10.30838/UJCEA.2312.290426.160.1237.

115. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // The Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28, No. 2. P. 168–178.

116. Li L. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures // Journal of the Optical Society of America A. 1996. Vol. 13, No. 9. P. 1870–1876. DOI: 10.1364/JOSAA.13.001870.

117. Perrins W. T., McKenzie D. R., McPhedran R. C. Transport properties of regular arrays of cylinders // Proceedings of the Royal Society A. 1979. Vol. 369. P. 207–225.

118. Zbiciak A., Volchok D., Kozyra Z., Michalczyk R., Al Garssi N. Fuzzy-modulus-based layered elastic analysis of asphalt pavements for enhanced fatigue life prediction // Materials. 2025. Vol. 18, No. 13. Art. 3034. DOI: 10.3390/ma18133034.

119. Haskell N. A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bulletin of the Seismological Society of America. 1953. Vol. 43, No. 1. P. 17–34.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ:

Статті у наукових фахових виданнях України та виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах

1. Volchok D., Danishevskyy V., Slobodianiuk S., **Kuchyn I.** Fuzzy sets application in the problems of structural mechanics and optimal design. Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. P. 6191–6204. DOI: 10.1007/s00707-023-03713-0. **(особистий внесок:** формулювання задачі, оцінювання отриманих результатів та узагальнення підходів, використаних у дисертаційній роботі для оцінювання чутливості заборонених зон**).**

2. **Кучин І. О.** Двовимірні ґрунтові метаструктури та періодичні фундаменти для вібросейсмічного захисту: огляд. Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 2 (032). С. 160–166. DOI: 10.30838/UJCEA.2312.290426.160.1237. **(особистий внесок:** аналіз джерел за темою дослідження, систематизація підходів до використання двовимірних метаструктур і періодичних фундаментів, узагальнення сучасного стану досліджень для задач вібраційного та сейсмічного захисту будівель і споруд**).**

3. Данішевський В. В., **Кучин І. О.** Двовимірні бетонно-гумові періодичні конструкції для захисту будівель від вібрацій та сейсмічних навантажень. Український журнал будівництва та архітектури. 2026. № 3 (033). С. 62–66. DOI: 10.30838/UJCEA.0333.270526.62.1243. (**особистий внесок:** розроблення чисельних моделей двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій, виконання розрахунків заборонених зон, аналіз впливу геометричних параметрів комірки на положення та ширину захисного частотного діапазону, підготовка висновків щодо застосування таких конструкцій для вібраційного та сейсмічного захисту).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Bezverkhyi D., **Kuchyn I.**, Danishevskyy V. Propagation of elastic transient waves in 1D periodically heterogeneous structures. *Науково-практична*

конференція студентів, аспірантів і молодих вчених (Дніпро, 27–28 березня 2023 р.). Дніпро: ПДАБА, 2023. С. 358–360.

5. Андріанов І., Данішевський В., Безверхий Д., **Кучин І.** Шаруваті конструкції для вібро- та сейсмоізоляції. *Стародубовські читання – 2023: матеріали XXXIII науково-практичної конференції* (Дніпро, 19 квітня 2023 р.). Дніпро, 2023. С. 5–7.

6. Danishevskyy V., **Kuchyn I.** Splash effects in propagation of elastic waves in heterogeneous structures. *Інноваційні технології забезпечення параметрів комфорту, енергоефективності і екологічності житлових будівель на основі смарт-технологій: матеріали міжнародної науково-практичної конференції.* 2024. С. 21–23.

7. **Kuchyn I.** Investigation of the Impact of Geometric Configuration on Wave Attenuation in a Composite Beam with Circular Inclusions. *Mathematical modeling and experimental studies of civil and mechanical engineering problems: abstracts of the scientific and practical conference* (Bratislava, 28 January 2025). Bratislava: ROEZ, s.r.o., 2025. P. 12. DOI: 10.30838/PSACEA.978-966-3232-52-3

8. Данішевський В., **Кучин І. О.** Вплив конфігурації круглих включень на затухання хвиль у композитній балці. *Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення: збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції MPMSPS-2025* (Дніпро, 26–28 березня 2025 р.). Дніпро, 2025. С. 144–146.

9. Danishevskyy V., **Kuchyn I.,** Bezverkhyi D. Band gaps in seismic metamaterials: two-layer unit cell and design maps. *Innovative Technologies in Construction, Civil Engineering and Architecture: proceedings of the XX International Scientific and Practical Conference*. 2025. P. 406–407.

10. Shekhorkina S., Bezverkhyi D., **Kuchyn I.** Sound transmission loss of an eco-wall with CLT and straw insulation. *Innovative Technologies in Construction, Civil Engineering and Architecture: proceedings of the XX International Scientific and Practical Conference*. 2025. P. 407–409.

ДОДАТОК Б

ТОВ ДАКК

ЄДРПОУ 42964120

м.Дніпро, вул. Б.Хмельницького 4/308

вих №139 від 09.06.2026

ДАКК
ДНІПРОВСЬКА АРХІТЕКТУРНА КОНСТРУКТОРСЬКА КОМПАНІЯ

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Іллі КУЧИНА на тему «Неоднорідні метаматеріали та конструкції для захисту споруд від динамічних впливів», поданого на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія», впроваджені в робочий процес ТОВ "ДАКК".

В робочі алгоритми виконання розрахунків неоднорідних періодичних конструкцій фундаментного типу, призначених для захисту будівель і споруд від вібраційних та сейсмічних впливів, впроваджено розроблену автором методику розрахунку динамічних характеристик двовимірних бетонно-гумових періодичних конструкцій.

Запропонований метод розрахунку ґрунтується на умовах періодичності Флоке-Блоха та аналізі смуг непропускання (заборонених зон) пружних хвиль і, на відміну від традиційних засобів віброізоляції, дозволяє цілеспрямовано визначати та налаштовувати робочий частотний діапазон конструкції за її геометричними і фізико-механічними параметрами, у тому числі з урахуванням можливої мінливості властивостей матеріалів.

Зазначені методи та умови розрахунку конструкцій такого типу, викладені у розділах 3–5 дисертаційного дослідження, використовуються при проєктуванні та перевірочних розрахунках періодичних віброзахисних і сейсмоізоляційних фундаментних систем.

Впровадження результатів дисертаційної роботи дозволило підвищити точність і достовірність розрахунків динамічної реакції захисних конструкцій, скоротити трудомісткість проєктних робіт за допомогою параметричного розрахунку, а також забезпечити обґрунтоване використання матеріалів.

З повагою,

Директор ТОВ ДАКК Ушпик Т.М.

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Проректор з наукової роботи УДУНТ,
д.т.н., професор
_____ Юрій ПРОЙДАК
«___» _____ 2026 р.

ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ

Результати досліджень, отриманих при виконанні дисертаційного дослідження «Неоднорідні метаматеріали та конструкції для захисту споруд від сейсмічних та вібраційних впливів» Іллі КУЧИНА впроваджені в навчальний процес ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» Українського державного університету науки і технологій в курси освітньо-професійних (далі – ОПП) та освітньо-наукових програм (далі – ОНП) з підготовки магістрів:

- ОНП «Промислове та цивільне будівництво» (дисципліни «Енергоефективні та екологічні технології в будівництві», «Особливості проєктування сталих будівель»);
- ОПП «BIM технології в будівництві та цивільній інженерії» (дисципліна «Проєктування життєвого циклу будівель за критеріями стійкого розвитку»).

Грант ОНП «Промислове та
цивільне будівництво»,
д.т.н., професор Світлана ШЕХОРКІНА

Гарант ОНП «BIM технології в
будівництві та цивільній інженерії»,
к.т.н., доцент Артем СОПІЛЬНЯК